UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

ACTA
MATHEMATICA

P
Phys & Math
A.

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

34

12/1/85-
8/3/12.

STOCKHOLM
BEIJERS BOKFÖRLAGSAKTIEBOLAG
1911

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
PRINZ LOUIS FERDINANDSTRASSE 2.

ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B., UPPSALA

PARIS
A. HERMANN.
6 RUE DE LA SORBONNE

QA
1
A2575
v.34

REDACTION

SVERIGE:

A. V. Bäcklund, Lund.
I. Fredholm, Stockholm.
A. Lindstedt, »
G. Mittag-Leffler, »
E. Phragmén, »
A. Wiman, Uppsala.

NORGE:

Elling Holst, Christiania.
C. Störmer, »
L. Sylow, »

DANMARK:

J. L. W. V. Jensen, Kjöbenhavn.
H. G. Zeuthen, »

FINLAND:

Ernst Lindelöf, Helsingfors.
Hj. Mellin, »

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/actamathematica34upps

INHALTSVERZEICHNISS — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 34. — 1911. — TOME 34.

Seite. Pages.

CHAZY, JEAN, Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes 317—385

KNOPP, KONRAD, Divergenzcharactere gewisser Dirichlet'scher Reihen 165—204

NETTO, E., Über Pfaffsche Aggregate 285—292

NÖRLUND, N. E., Fractions continues et différences réciproques 1—108

OSEEN, C. W., Sur les formules de Green généralisées qui se présentent dans l'hydrodynamique et sur quelques-unes de leurs applications 205—284

PERRON, OSKAR, Über lineare Differenzengleichungen 109—137

PERRON, OSKAR, Über lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten 139—163

ZAREMBA, S., Sur le principe de Dirichlet 293—316

FRACTIONS CONTINUES ET DIFFÉRENCES RÉCIPROQUES.

PAR

N. E. NÖRLUND

à Copenhague.

§ 1. Les résultats que je vais exposer dans les pages suivantes sont en partie de nature assez différente, mais leur but principal est de contribuer au développement de la théorie des fractions continues. L'application qu'on a faite de ces algorithmes dans la théorie des nombres est assez connue, mais on s'y est borné à étudier leurs propriétés purement formelles sans pénétrer plus profondément dans la nature de ces algorithmes intéressants. Ce n'est que depuis quelques années qu'on y a réussi grâce aux recherches de Stieltjes. Mais ces recherches montrent aussi combien il y a de difficultés à vaincre. Cependant, depuis quelque temps on a fait un grand progrès par l'introduction des différences réciproques. Dans un mémoire profond qu'a présenté M. T.-N. Thiele[1] à l'Académie royale des Sciences et des Lettres de Danemark et qui est intitulé: «Différences réciproques» il a, en effet, fondé une théorie qui sera d'une importance fondamentale pour les recherches ultérieures sur les fractions continues. Dans le chapitre IV j'ai essayé de contribuer au développement de la théorie de ces fonctions intéressantes et dans le dernier chapitre je m'en suis servi pour développer quelques fonctions particulières en fractions continues. Pour étudier la convergence de ces fractions continues, j'ai considéré au chapitre II les équations aux différences finies auxquelles satisfont les nominateurs et les dénominateurs de leurs réduites. Un peu de méditation montre que l'examen de la convergence d'une fraction continue convient à la détermination de la manière dont

[1] Bulletin de l'Académie royale des Sciences et des Lettres de Danemark 1905, pag. 153—171.

se comportent les intégrales de ces équations aux différences pour des valeurs très grandes de la variable indépendante. Il n'était pas difficile de résoudre ce dernier problème en se rappelant l'analogie étroite qu'il y a entre les équations linéaires aux différentielles ordinaires et celles aux différences finies. En étudiant cela dans le premier chapitre j'ai été conduit, dans le deuxième chapitre, à des règles de convergence qui certainement laissent à désirer mais qui sont, cependant, si générales que, grâce à elles, on parvient à déterminer la convergence de la plupart des fractions continues étudiées jusqu'ici dans l'analyse. Au même chapitre j'ai, de plus, étudié la convergence d'une classe remarquable de fractions continues auxquelles on est conduit par l'intégration des équations différentielles du deuxième ordre.

CHAPITRE I.

Etude des intégrales d'une équation linéaire aux différences finies.

§ 2. Par les recherches de M. Poincaré[1] on sait que, étant donnée une équation différentielle linéaire

$$P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0 \tag{1}$$

dont les coefficients sont des polynômes, tous du même degré, on peut toujours trouver un système fondamental d'intégrales qui se comportent comme

$$e^{a_i x} x^{-\mu_i - 1} \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{2}$$

si x croît vers l'infini avec argument déterminé. Supposons que le coefficient de la plus haute puissance de x dans P_i soit A_i, on détermine les a_i comme des racines de l'équation

$$A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \cdots + A_1 z + A_0 = 0. \tag{3}$$

Il y a *généralement* exception, si a_i est une racine multiple de (2), mais il arrive exceptionellement que λ valeurs différentes de μ correspondent à la même valeur

[1] American Journal of Mathematics. Vol. 7, 1885, pag. 203—264.

de a_i, si a_i est λ fois racine de (3). Dans un mémoire[1] que M. Poincaré a publié plus tard dans ce journal il a démontré plus généralement que si, dans (1), les coefficients sont des polynômes de degré arbitraire, il existe n séries de la forme suivante

$$e^{Q} \cdot x^{\alpha} \cdot \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots \right) \tag{4}$$

qui satisfont *formellement* à l'équation différentielle. Q est ici un polynôme entier du degré p en x. Une telle série s'appelle une série normale d'ordre p. Elle est généralement divergente, mais elle représente l'intégrale asymptotiquement, ce qui est un des résultats les plus intéressants du beau mémoire de M. Poincaré. Les coefficients de la plus haute puissance de x dans les polynômes Q se déterminent comme les racines d'une certaine équation qu'on peut former des coefficients de l'équation différentielle. Il y a généralement exception, si cette équation a une racine multiple. Le degré p du polynôme Q se détermine par les degrés des coefficients dans (1). On trouvera généralement plusieurs valeurs différentes de p. Appelons celles-ci $p_1\, p_2 \ldots p_i$. Mais pour que les intégrales aient la forme susdite il faut que tous ces nombres soient des entiers. Supposons plus généralement que m soit le plus petit multiple commun des dénominateurs dans $p_1\, p_2 \ldots p_i$; l'intégrale générale aura la forme suivante

$$\Sigma\, e^{Q_i} \cdot x^{\alpha_i} \cdot \psi_i\left(x^{\frac{1}{m}}\right) \tag{5}$$

où Q_i est un polynôme entier en $x^{\frac{1}{m}}$, tandis que $\psi(x^{\frac{1}{m}})$ est une série généralement divergente, procédant suivant des puissances de $x^{\frac{1}{m}}$. Ces résultats s'appliquent maintenant mutatis mutandis aux équations linéaires aux différences. C'est ce que nous allons démontrer en procédant d'une manière semblable à celle que M. Poincaré a appliquée dans ces deux beaux mémoires susdits.

§ 3. Soit donnée une équation aux différences

$$P_k(n)\, u(n+k) + P_{k-1}(n)\, u(n+k-1) + \cdots + P_0(n)\, u(n) = 0 \tag{6}$$

nous appelons k l'ordre de l'équation. Remarquons tout d'abord que nous n'avons pas ici le but d'étudier l'intégrale la plus générale satisfaisant à cette équation et contenant k fonctions périodiques à module de périodicité 1 mais d'ailleurs arbitraires. Nous allons seulement faire voir qu'il existe une intégrale satisfaisant à l'équation (6) dans une certaine région du plan et contenant k

[1] Poincaré: Acta Mathematica, Vol. 8, pag. 295—344; voir aussi Fabry: Thèses. Paris 1885.

constantes arbitraires. Nous appelons une telle intégrale l'intégrale complète de (6). Considérons d'abord le cas où les coefficients $P_i(n)$ sont des polynômes en n tous du même degré p. Nous verrons alors qu'il existe k intégrales $u_1\, u_2 \ldots u_k$ qui se comportent pour des valeurs réelles très grandes de n comme

$$c_i\, a_i^n\, n^{-\beta_i - 1} \qquad (i = 1, 2, \ldots k) \tag{7}$$

où les c_i sont des constantes, et entre lesquelles il n'existe pas de relation linéaire à coefficients constants. J'appelle u_i une intégrale normale de (6). Soit $C_{i,p}$ le coefficient de la plus haute puissance de n dans $P_i(n)$, alors les a_i se déterminent comme les racines de l'équation

$$C_{k,p}\, z^k + C_{k-1,p}\, z^{k-1} + \cdots + C_{i,p}\, z^i + \cdots + C_{0,p} = 0 \tag{8}$$

les β_i sont des constantes qui, elles aussi, se déterminent facilement par les coefficients dans (6). J'appelle (8) l'équation caractéristique de (6). Si les degrés de quelques-uns des coefficients sont plus petits que p, cela ne change rien, pourvu que $C_{k,p} \gtrless 0$ et $C_{0,p} \gtrless 0$. Si, au contraire, quelques-unes des racines de (8) deviennent nulles ou infiniment grandes, les intégrales correspondantes se comporteront asymptotiquement comme

$$c_i\, \Gamma^{\mu_i}(n)\, a_i^n\, n^{-\beta_i - 1}. \tag{9}$$

Enfin, si les coefficients de l'équation au différences sont des polynômes de degré arbitraire, on pourra, si non généralement pourtant dans des cas étendus, obtenir, par une substitution de la forme

$$u(n) = \Gamma^{\mu}(n)\, v(n) \tag{10}$$

et en choisissant convenablement μ, que l'équation en $v(n)$ se reduise à une équation de la forme (6) dans laquelle du moins deux coefficients atteignent le degré maximal.

Etudions donc d'abord en détail l'équation (6) en employant la transformation de Laplace.

Transformation de Laplace.

§ **4.** Les coefficients de l'équation (6) pourront toujours prendre la forme

$$P_0(n) = C_{0,0} + C_{0,1}\, n + C_{0,2}\, n(n+1) + \cdots + C_{0,p}\, n(n+1) \ldots (n+p-1)$$

. . . . . .

$$P_i(n) = C_{i,0} + C_{i,1}(n+i) + C_{i,2}(n+i)(n+i+1) + \cdots + C_{i,p}(n+i)(n+i+1) \ldots (n+i+p-1)$$

car il suffit de poser

$$C_{i,0} = P_i(-i) \qquad rC_{i,r} = \Delta^r P_i(-i-r).$$

Je pose maintenant

$$u(n) = \int t^{n-1} v(t)\, dt \tag{11}$$

où je vais préciser plus tard la ligne d'intégration. En intégrant par parties on aura

$$n\, u(n) = t^n v(t) - \int t^n v'(t)\, dt.$$

Il faut maintenant choisir les limites d'intégration de manière que pour ces valeurs de t le premier terme du second membre de cette équation disparaisse. En intégrant par parties on aura encore

$$n(n+1)\, u(n) = -t^{n+1} v'(t) + \int t^{n+1} v''(t)\, dt$$

et généralement

$$n(n+1)\dots(n+p-1)\, u(n) = (-1)^p \int t^{n+p-1} v^{(p)}(t)\, dt$$

pourvu qu'on choisisse les limites d'intégration de manière à avoir pour ces valeurs de t

$$t^{n+i} \frac{d^i v(t)}{dt^i} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \dots p-1).$$

De la même manière on a

$$(n+k)(n+k+1)\dots(n+k+p-1)\, u(n+k) = (-1)^p \int t^{n+k+p-1} v^{(p)}(t)\, dt$$

pourvu que

$$t^{n+i+j} \frac{d^i v(t)}{dt^i} \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \dots p-1 \\ j = 0, 1, 2, \dots k \end{pmatrix} \tag{12}$$

disparaissent aux limites d'intégration.

En appliquant maintenant la transformation (11) à (6) on trouve que $v(t)$ satisfait à l'équation différentielle

$$Q_p(t)(-t)^p \frac{d^p v(t)}{dt^p} + Q_{p-1}(t)(-t)^{p-1} \frac{d^{p-1} v(t)}{dt^{p-1}} +$$

$$\dots + Q_1(t)(-t) \frac{dv(t)}{dt} + Q_0(t) v(t) = 0 \tag{13}$$

où

$$Q_i(t) = C_{0,i} + C_{1,i}t + \cdots + C_{k,i}t^k.$$

§ 5. Cette équation différentielle rentre généralement dans la classe de FUCHS; ses intégrales sont régulières dans tout le plan. Les points singuliers sont outre 0 et ∞ les racines de l'équation

$$Q_p(t) = C_{0,p} + C_{1,p}t + \cdots + C_{k,p}t^k = 0. \tag{14}$$

Ce sont ces quantités que nous avons appelées $a_1\, a_2 \ldots a_k$. Rangeons les de manière que $|a_i| \geq |a_j|$, si $i < j$. Aux environs du point 0 il existe alors p intégrales de la forme

$$t^{\alpha_i}\varphi(t)$$

$\varphi(t)$ étant holomorphe dans le domaine du point 0, tandis que

$$-\alpha_1,\ -\alpha_2, \ldots -\alpha_p$$

sont les racines de l'équation $P_0(n) = 0$; nous supposons celles-ci rangées de manière que

$$\Re(\alpha_1) \geq \Re(\alpha_2) \geq \Re(\alpha_3) \cdots \geq \Re(\alpha_p)$$

en désignant par $\Re(\alpha)$ la partie réelle de α. Si les différences entre quelques-unes de ces racines sont des entiers, des logarithmes entreront dans l'intégrale générale.

Aux environs du point ∞ l'intégrale est représentée par p séries de la forme

$$t^{\gamma_i}\left(a_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \cdots\right)$$

qui sont convergentes pour des valeurs suffisamment grandes de t. Les exposants γ_i se déterminent comme des racines de l'équation

$$P_k(n-k) = 0.$$

Rangeons celles-ci de manière que

$$\Re(\gamma_1) \geq \Re(\gamma_2) \geq \Re(\gamma_3) \cdots \geq \Re(\gamma_p).$$

Considérons maintenant un des autres points singuliers a_i que nous supposons d'abord être une racine simple de (14). L'équation déterminante de ce point a les racines $0, 1, 2, \ldots p-2, \beta_i$, où β_i est un nombre arbitraire que nous supposons d'abord non entier. L'intégrale générale de (13) aura alors aux environs de a_i la forme

$$v(t) \quad \psi_i(t) + (t - a_i)^{\lambda_i} \varphi_i(t)$$

où $\psi_i(t)$ et $\varphi_i(t)$ sont holomorphes dans le domaine de a_i.

§ 6. Retournons maintenant à l'intégrale (11) où nous allons fixer la ligne d'intégration en nous rappelant que les limites d'intégration devront satisfaire aux conditions (12). Nous traçons une ligne droite de 0 à a_i; soit b_i un point de celle-ci entre 0 et a_i et assez rapproché de a_i pour qu'un cercle décrit du point a_i comme centre et qui passera par b_i ne passe par aucun point singulier et ne renferme d'autres points singuliers que a_i. Nous intégrerons alors le long de la ligne droite de 0 jusqu'à b_i, parcourrons la périphérie du cercle et puis la ligne droite de b_i jusqu'à 0. Cela posé, les conditions (12) seront satisfaites pourvu que $\Re(n + \alpha_p) > 0$. On aura alors

$$u_i(n) = \int t^{n-1} (t - a_i)^{\lambda_i} \varphi_i(t)\, dt.$$

En intégrant de la même manière autour de chacun des autres points singuliers on aura, en tout, k intégrales de (6); nous verrons plus tard que celles-ci seront, en effet, linéairement indépendantes. Ces intégrales sont valables partout dans un demi-plan à droite de la ligne droite $\Re(n) = \Re(-\alpha_p)$, où $-\alpha_p$ est celle des racines de $P_0(n) = 0$ dont la partie réelle est la plus grande.

§ 7. Nous allons maintenant étudier la façon dont se comporte $u(n)$ pour des valeurs très grandes de n. Nous diviserons la ligne d'intégration en 3 parties: 1) de 0 jusqu'à b_i, 2) la périphérie du cercle, 3) de b_i jusqu'à 0, et nous désignerons les intégrales correspondantes par K_1, K_2 et K_3. Considérons celles-ci séparément. Nous posons donc

$$K_1 = \int_0^{b_i} t^{n-1} v(t)\, dt.$$

Soit M le module de la valeur la plus grande que prend $t^{-\alpha_p} v(t)$ le long de la ligne d'intégration. On aura alors

$$|K_1| < M \cdot |b_i^{n+\alpha_p}|.$$

$|b_i|$ étant plus pétit que $|a_i|$, on aura

$$\lim_{n=\infty} a_i^{-n} \cdot \frac{\Gamma(n + \mu + 1)}{\Gamma(n)} \cdot K_1 = 0 \tag{15}$$

pour toutes les valeurs de μ. Nous allons considérer ensuite l'intégrale suivante

$$T = \int_{1-r}^{1} t^{n-1}(t-1)^{\beta}\varphi(t)\,dt$$

où $\Re(\beta) > -1$, et où r est un nombre positif entre 0 et 1, tandis que $\varphi(t)$ est une fonction développable, aux environs du point 1, en série de la forme

$$\varphi(t) = A_0 + A_1(t-1) + A_2(t-1)^2 + \cdots + A_m(t-1)^m + R_m$$

qui est convergente pour $|t-1| \leq \varrho$ où $1 \geq \varrho > r$.

Nous allons maintenant déterminer la limite

$$\lim_{n=\infty} T \cdot \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n)}.$$

En développant en série $\varphi(t)$ on aura

$$T = A_0 \int_{1-r}^{1} t^{n-1}(t-1)^{\beta}\,dt + A_1 \int_{1-r}^{1} t^{n-1}(t-1)^{\beta+1}\,dt +$$
$$+ A_m \int_{1-r}^{1} t^{n-1}(t-1)^{\beta+m}\,dt + \int_{1-r}^{1} t^{n-1}(t-1)^{\beta} R_m\,dt. \quad (16)$$

Nous déterminons un nombre positif M_1 de sorte que pour tout m

$$|A_m| < \frac{M_1}{\varrho^m}.$$

On aura donc dans l'intervalle $1 > t > 1-r$

$$|R_m| < \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{m+1} \cdot M_1 \cdot \frac{1}{1-\frac{r}{\varrho}}.$$

Considérons l'intégrale

$$P = \int_{1-r}^{1} t^{n-1}(t-1)^{\beta} R_m\,dt$$

on trouvera facilement en posant $\beta = \beta' + i\beta''$

$$|P| < M_1 \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{m+1} \frac{\varrho}{\varrho - r} \cdot \int_{1-r}^{1} |t^{n-1}(t-1)^{\beta}|\,dt < M_1 \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{m+1} \cdot \frac{\varrho}{\varrho - r} \cdot \frac{\Gamma(n)\,\Gamma(\beta'+1)}{\Gamma(n+\beta'+1)} e^{-\beta''\pi}.$$

Puisque $r < \varrho$, on pourra toujours choisir m assez grand pour que

$$\frac{\Gamma(n+\beta'+1)}{\Gamma(n)}|P|$$

soit plus petit qu'une quantité positive $\frac{\varepsilon}{2}$ arbitrairement donnée *pour tous les* n. Considérons ensuite l'intégrale

$$Q = A_q \cdot \int_{1-r}^{1} t^{n-1}(t-1)^{\beta+q} dt$$

On verra facilement que

$$|Q| < |A_q| \cdot \int_0^1 |t^{n-1}(t-1)^{\beta+q}| dt.$$

On aura donc

$$\left|\frac{\Gamma(n+\beta'+1)}{\Gamma(n)} Q\right| < |A_q| \cdot \frac{\Gamma(\beta'+q+1)\,\Gamma(\beta'+n+1)}{\Gamma(\beta'+n+q+1)}$$

si $q = 0$, le second membre de cette inégalité sera égal à $|A_0 \Gamma(\beta'+1)|$: soit, au contraire, $q > 0$, on trouvera toujours une valeur de n assez grande pour que

$$\left|\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n)} \cdot Q\right| < \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Nous avons alors déterminé n et m de manière que

$$\left|T e^{\pi i \beta} \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n)} - A_0 \Gamma(\beta+1)\right| < \varepsilon$$

ou

$$\lim_{n=\infty} T \cdot \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n)} = A_0 \Gamma(\beta+1) e^{-\pi i \beta}. \tag{17}$$

Il est aisé de voir comment ce qui précède s'applique à l'étude de notre intégrale

$$u(n) = \int t^{n-1} v(t)\, dt$$

prise le long du contour du cercle qui renferme a_i. Aux environs du point a_i $v(t)$ est de la forme

$$v(t) = v'(t) + (t-a_i)^{\beta_i} q(t)$$

donc

$$K_2 = \int_{a_i}^{b_i} t^{n-1}(t-a_i)^{\beta_i}\varphi(t)\,dt = (1-e^{2\pi i\beta_i})\int_{b_i}^{a_i'} t^{n-1}(t-a_i)^{\beta_i}\varphi(t)\,dt.$$

Soit $t = a_i z$, on trouvera alors

$$K_2 = (1-e^{2\pi i\beta_i})\,a_i^{n+\beta_i}\int_{b_i}^{a_i'} z^{n-1}(z-1)^{\beta_i}\varphi(a_i z)\,dz.$$

D'après (17) on aura

$$\lim_{n=\infty} a_i^{-n}\,\frac{\Gamma(n+{}_i\beta_i+1)}{\Gamma(n)}\,K_2 = (e^{-\pi i\beta_i}-e^{\pi i\beta_i})\,\Gamma(1+{}_i\beta_i)\,A_0 \qquad (18)$$

où A_0 est une constante. En se rappelant que $u_i(n) = K_1 + K_2 + K_3$, on trouvera d'après (15) et (18) que, pour des valeurs positives très grandes de n, $u_i(n)$ se comporte comme

$$A_0 a_i^{n+\beta_i}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+{}_i\beta_i+1)}\,\Gamma(1+{}_i\beta_i)(e^{-\pi i\beta_i}-e^{\pi i\beta_i}). \qquad (18\text{ bis})$$

Dans cette démonstration nous avons supposé essentiellement $\Re({}_i\beta_i) > -1$ mais le théorème subsiste même si $\Re({}_i\beta_i) \leq -1$; pour le voir il suffit dans K_2 d'intégrer par parties. L'étude de K_2 se ramène donc à une intégrale de la forme

$$(-1)^p\frac{(n-1)\ldots(n-p)}{({}_i\beta-1)\ldots({}_i\beta-p)}\int_{a_i}^{b_i} t^{n-p-1}(t-1)^{\beta+p}\,dt. \qquad \Re({}_i\beta+p) > -1$$

En intégrant de la même manière autour de chacun des autres points singuliers on aura, en tout, k intégrales qui se comporteront asymptotiquement comme

$$c_i a_i^n n^{-\beta_i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots k) \qquad (19)$$

Ces intégrales sont linéairement indépendantes; car, supposons qu'il y eût une relation de la forme

$$C_1 u_1(n) + C_2 u_2(n) + \cdots + C_k u_k(n) = 0$$

nous diviserons alors cette équation par $a_1^n\,\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+{}_1\beta_1+1)}$, ensuite nous ferons converger n vers ∞. Nous aurons alors $C_1 A_1 = 0$ d'où $C_1 = 0$. Nous effaçons le premier terme de la relation nommée; puis en divisant par $a_2^n\,\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+{}_2\beta_2+1)}$

on aura $C_2 = 0$. Nous montrerons ainsi que toutes les constantes C seront 0, ou qu'il ne peut y avoir de relation linéaire.

§ 8. Au lieu de la ligne d'intégration définie plus haut, on aurait pu se servir de la suivante: soit c_i un point du petit cercle autour de a_i, choisi de manière que $|c_i| > |a_i|$. De c_i nous traçons une ligne droite L s'étandant à l'infini qui ne passe par aucun point singulier, et nous intégrons de ∞ le long de L jusqu'à c_i, nous parcourons la périphérie du cercle, ensuite nous retournons le long de L à ∞. Une intégrale définie de cette manière satisfera à l'équation aux différences dans un demi-plan *à gauche* d'une certaine ligne droite déterminée par $\Re(n - \xi) = 0$ où ξ est celle des racines de $P_k(n) = 0$ dont la partie réelle est la plus petite (12). En concluant exactement comme plus haut on trouvera que, pour de très grandes valeurs négatives de n, les intégrales de (9) se comporteront comme

$$A_0 a_i^{n+\beta_i} \frac{\Gamma(\quad n \quad ,\beta_i)}{\Gamma(1 - n)} (1 \quad e^{2\pi i \beta_i}) \Gamma(1 + \beta_i).$$

Les intégrales se comportent donc de la même manière pour des valeurs très grandes, soit positives, soit négatives, de n.

§ 9. Nous allons étudier quelques cas d'exception.

1) Si les différences entre quelques-uns des nombres α_i sont des entiers, $v(t)$ se représente aux environs de 0 par des séries de la forme

$$t^{\alpha_i} (\log t)^q \varphi(t)$$

où $\varphi(t)$ est holomorphe dans le domaine de 0. En verra facilement que, par-là, rien n'est changé de ce qui précède: $|v(t) t^{-\alpha_p + 1}|$ sera toujours fini le long de la ligne d'intégration.

2) Nous avons supposé que a_i soit une racine simple de (14); si, au contraire, a_i est λ fois racine de cette équation, deux cas essentiellement différents peuvent se présenter. En général, a_i sera un point singulier essentiel pour $v(t)$ le développement pour, au moins, quelques-unes des branches de celui-ci contenant un nombre infini de puissances positives et négatives de t, mais il arrive, par exception, que a_i est un point singulier à branchement déterminé; car si a' est λ fois racine de $Q_p(t) = 0$ est $\lambda - i$ fois racine de $Q_{p-i}(t) = 0$, l'équation déterminante du point a_i aura les racines $0, 1, 2, \ldots p - \lambda - 1, \beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \ldots \beta_{i,\lambda}$. En ce cas l'intégrale générale aura la forme

$$v(t) = \psi(t) + (t - a_i)^{\beta_{i,1}} \varphi_{i,1}(t) + (t - a_i)^{\beta_{i,2}} \varphi_{i,2}(t) + \cdots + (t - a_i)^{\beta_{i,\lambda}} \varphi_{i,\lambda}(t).$$

Donc λ intégrales différentes correspondent à la racine a_i; ces intégrales se comporteront asymptotiquement comme

$$c_{i,\mu} \cdot a_i^n \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n + \beta_{i,\mu} + 1)}. \qquad (\mu = 1, 2, \ldots \lambda) \tag{20}$$

Si entre les nombres $\beta_{i,\mu}$ il y a un ou plusieurs entiers, ou bien si les différences entre quelques-uns de ces nombres sont des entiers, des logarithmes entreront encore dans l'intégrale complète. Déterminons la valeur asymptotique d'une telle intégrale logarithmique. Posons

$$v_i(t) = (t - a_i)^{\beta_i} \log(t - a_i)\varphi_i(t) \qquad v_i(n) = \int t^{n-1} v_i(t)\, dt$$

où $\varphi_i(t)$ est holomorphe aux environs de a_i, et où β_i est supposé ne pas être un nombre entier, et encore

$$T \int_{1-r}^{1} t^{n-1}(t-1)^{\beta_i} \log(t-1)\varphi_i(t)\, dt \qquad \Re(\beta_i) > -1$$

on aura alors, en concluant exactement comme plus haut, que

$$\lim_{n=\infty} T \cdot \frac{\Gamma(n + \beta_i + 1)}{\Gamma(n)} = A_0 \Gamma(1 + \beta_i) e^{-\pi i \beta_i} \{\psi(1 + \beta_i) - \psi(n + \beta_i + 1) - \pi i\}$$

où

$$\psi(x) = D_x \log \Gamma(x).$$

Considérons finalement l'intégrale

$$K_2 = \int t^{n-1}(t - a_i)^{\beta_i} \log(t - a_i)\varphi(t)\, dt$$

où la ligne d'intégration est un petit cercle autour de a_i, on trouvera

$$K_2 = (1 - e^{2\pi i \beta_i}) \int_{b_i}^{a_i} t^{n-1}(t - a_i)^{\beta_i} \log(t - a_i)\varphi(t)\, dt - 2\pi i e^{2\pi i \beta_i} \int_{b_i}^{a_i} t^{n-1}(t - a_i)^{\beta_i} \varphi(t)\, dt.$$

On verra facilement que, si β_i n'est pas un nombre entier, $v_i(n)$ se comportera asymptotiquement comme

$$A_0 a_i^n \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n + \beta_i + 1)} \cdot \psi(n + \beta_i + 1)(e^{\pi i \beta_i} - e^{-\pi i \beta_i}) \Gamma(1 + \beta_i). \tag{21}$$

3) Si, au contraire, β_i est un entier, $v_i(t)$ peut contenir un logarithme, que a_i soit une racine simple ou multiple de (14). Si β_i est entier et négatif, le facteur $\Gamma(1+\beta_i)(e^{\pi i\beta_i}-e^{-\pi i\beta_i})$ dans (21) sera de forme indéfinie. Mais en se rappelant que

$$\Gamma(1+\beta_i)\Gamma(-\beta_i)\sin\pi\beta_i$$

on verra que $u_i(n)$ se comporte, en ce cas, asymptotiquement comme

$$A_0\cdot a_i^n\,\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\beta_i+1)}\,{}^iF(n+\beta_i+1)\,\frac{2\pi i}{\Gamma(-\beta_i)}. \tag{22}$$

Si, au contraire, β_i est un nombre entier et positif, le terme contenant ${}^iF(n)$ disparaîtra, et $u_i(n)$ se comportera asymptotiquement comme

$$-A_0 a_i^n\,\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\beta_i+1)}\,\Gamma(1+\beta_i)\,2\pi i\,e^{\pi i\beta_i}. \tag{23}$$

4) Si β_i est un nombre entier, il peut arriver que $v_i(t)$ ne contient pourtant pas de logarithme; il faut, en ce cas, que β_i soit négatif ou plus grand que $p-1$. Si β_i est négatif, on trouvera par (18 bis) que $u_i(n)$ se comporte asymptotiquement comme

$$-A_0\cdot a_i^n\,\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\beta_i+1)}\cdot\frac{2\pi i}{\Gamma(-\beta_i)}. \tag{24}$$

Si, enfin, β_i est un entier, plus grand que $p-1$, l'intégrale prise autour de a_i sera identiquement nulle. Mais, en ce cas, nous pourrons remplacer la ligne d'intégration dont nous nous sommes servi plus haut, par une ligne de 0 à a_i; on voit facilement que, dans ces deux points, les conditions (12) sont satisfaites. $u_i(n)$ se comporte alors pour des valeurs très grandes de n comme

$$A_0 a_i^n\,\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\beta_i-1)}\cdot\Gamma(1+\beta_i). \tag{25}$$

Il y a exception encore, si quelques-unes des quantités a_i sont nulles ou infiniment grandes; nous allons étudier ces cas plus tard. On voit facilement, comme plus haut, que encore dans les divers cas d'exception les intégrales sont linéairement indépendantes.

Représentation des intégrales par des séries de factorielles normales.

§ **10.** Dans la détermination de la valeur de $u(n)$ pour des valeurs très grandes de n nous n'avons considéré, jusqu'ici, que le premier terme, mais on peut obtenir une approximation plus grande en développant en séries de factorielles les intégrales étudiées plus haut. Considérons l'intégrale

$$u_i(n) = \int_{\cdot}^{\cdot} t^{n-1}(a_i - t)^{\beta_i}\varphi_i(t)\,dt. \tag{26}$$

Ici $\varphi_i(t)$ se représente par une série de puissances de la forme

$$\varphi_i(t) = B_0 + B_1(a_i - t) + B_2(a_i - t)^2 + \cdots + B_r(a_i - t)^r + R_r \tag{27}$$

qui est convergente dans un cercle dont a_i est le centre et qui passe par le point singulier le plus rapproché de a_i. Supposons que, exceptionellement, o ne soit pas un point singulier de $v(t)$, et qu'il se trouve dans ce cercle. En remplaçant dans (26) $\varphi(t)$ par l'expression (27) et en intégrant, on aura

$$u_i(n) = (1 - e^{2\pi i\beta_i})\,a_i^{n+\beta_i}\,\frac{\Gamma(n)\,\Gamma(1+\beta_i)}{\Gamma(n+\beta_i+1)}\cdot\left\{B_0 + B_1 a_i\,\frac{\beta_i+1}{n+\beta_i+1} + \right.$$
$$\left. + B_2 a_i^2\,\frac{(\beta_i+1)(\beta_i+2)}{(n+\beta_i+1)(n+\beta_i+2)} + \cdots\right\}. \tag{28}$$

Soit g_r le $(r+1)^{\text{ième}}$ terme de (28).

Nous appelons cette série une série de factorielles normale. En excluant les points $-\beta_i - 1$, $-\beta_i - 2$, $-\beta_i - 3$, ... par des aires aussi petites qu'on voudra on voit que cette série converge uniformement dans toute portion finie du plan.

Si, au contraire, o est un point singulier, qui est plus rapproché de a_i qu'aucun des autres points singuliers, (28) converge si $\Re(n+\alpha_p) > 0$ ou α_p est le nombre défini dans § 6; c'est ce qui résulte d'un théorème de M. Pincherle[1] sur la convergence des séries de factorielles. Mais si nous laissons tomber ces hypothèses spéciales nous voyons qu'en général les séries de factorielles normales divergeront malheureusement; *nous verrons cependant que, en ce cas, elles représentent l'intégrale asymptotiquement.*

[1] Rendiconti della reale Accademia dei Lincei. Febbraio 1902.

Posons

$$S_\nu(n) = (1 - e^{2\pi i \beta_i}) a_i^{n+\beta_i} \frac{\Gamma(1+{}_i\beta_i)\,\Gamma(n)}{\Gamma(1+{}_i\beta_i+n)} \Big\{ B_0 + B_1 a_i \frac{{}_i\beta_i+1}{n+{}_i\beta_i+1} + \\ + B_\nu a_i^\nu \frac{({}_i\beta_i+1)({}_i\beta_i+2)\dots({}_i\beta_i+\nu)}{(n+{}_i\beta_i+1)(n+{}_i\beta_i+2)\dots(n+{}_i\beta_i+\nu)} \Big\}$$

Je dis maintenant que

$$\lim_{n=\infty} a_i^{-n} \frac{\Gamma(n+{}_i\beta_i+\nu+1)}{\Gamma(n)} \{u_i(n) - S_\nu(n)\} = 0. \tag{20}$$

Traçons un cercle dont a_i est le centre, et dont le rayon est assez petit pour que tous les autres points singuliers de $v(t)$ soient situés en dehors du cercle. La série

$$u_i(n) - B_0 \int t^{n-1}(a_i - t)^{\beta_i} dt + B_1 \int t^{n-1}(a_i - t)^{\beta_i+1} dt + \\ + B_m \int t^{n-1}(a_i - t)^{\beta_i+m} dt + \int t^{n-1}(a_i - t)^{\beta_i} R_m dt$$

sera alors uniformément convergente si on étend l'intégration le long de ce cercle. En posant encore

$$P = \int t^{n-1}(a_i - t)^{\beta_i} R_m dt \qquad Q = B_q \int t^{n-1}(a_i - t)^{\beta_i+q} dt$$

on trouvera, d'après § 7, toujours un nombre N tel que, pour toutes les valeurs de m plus grandes que N on a

$$\left| a_i^{-n} \frac{\Gamma(n+{}_i\beta_i+\nu+1)}{\Gamma(n)} P \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Plus, Q se représente asymptotiquement par g_q, c'est-à-dire qu'on pourra toujours déterminer un nombre N_1 de sorte que, pour toutes les valeurs de n plus grandes que N_1 on aura

$$\left| (Q - g_q) a_i^{-n} \frac{\Gamma(n+{}_i\beta_i+\nu+1)}{\Gamma(n)} \right| < \frac{\varepsilon}{2(m-1)}.$$

Nous aurons alors déterminé n et m de manière que

$$\left| a_i^{-n} \frac{\Gamma(n+{}_i\beta_i+\nu+1)}{\Gamma(n)} \{u_i(n) - S_\nu(n)\} \right| < \varepsilon$$

C. Q. F. D.

Équations de rang supérieur.

§ 11. Considérons maintenant une équation aux différences finies de la forme (6) où les coefficients sont des polynômes de degrés arbitraires. Au moyen de la substitution $u(n) = \Gamma^{\mu_i}(n)\, u^{(\mu_i)}(n)$ on peut toujours réduire une telle équation à une équation dont deux coefficients, au moins, soient du même degré, tandis qu'aucun des autres ne seront de degré supérieur. On trouvera généralement plusieurs valeurs différentes de μ_i. Pour déterminer celles-ci, nous appelons les degrés des coefficients de

$$P_k(n)\, u(n+k) + P_{k-1}(n)\, u(n+k-1) + \cdots + P_0(n)\, u(n) = 0 \qquad (6)$$

respectivement $\varkappa_k, \varkappa_{k-1}, \ldots \varkappa_0$. En posant $u(n) = \Gamma^{\mu}(n)\, u^{(\mu)}(n)$ nous aurons l'équation

$$P_k(n)\, u^{(\mu)}(n+k) + \frac{P_{k-1}(n)}{(n+k-1)^{\mu}}\, u^{(\mu)}(n+k-1)$$

$$+ \frac{P_{k-2}(n)}{(n+k-1)^{\mu}(n+k-2)^{\mu}}\, u^{(\mu)}(n+k-2) + \cdots + \frac{P_0(n)}{(n+k-1)^{\mu}\ldots n^{\mu}}\, u^{(\mu)}(n) = 0. \quad (30)$$

Les degrés des coefficients sont ici respectivement

$$\varkappa_k,\ \varkappa_{k-1} - \mu,\ \varkappa_{k-2} - 2\mu, \ldots \varkappa_0 - k\mu.$$

Posons $\varkappa'_{k-1} = \varkappa_{k-i} - i\mu$; nous déterminerons μ tel que deux de ces quantités, au moins, soient égales, tandis qu'aucune des autres ne soit plus grande que celles-ci. Nous formerons alors les nombres

$$\frac{\varkappa_{k-1} - \varkappa_k}{1}, \quad \frac{\varkappa_{k-2} - \varkappa_k}{2}, \ldots \frac{\varkappa_{k-i} - \varkappa_k}{i}, \ldots \frac{\varkappa_0 - \varkappa_k}{k}.$$

Soit $\dfrac{\varkappa_{k-\alpha} - \varkappa_k}{\alpha} = \mu_1$ le plus grand de ceux-ci, ou, s'il y en a plusieurs de la même grandeur, le dernier des plus grands. En posant alors $\mu = \mu_1$ on aura $\varkappa'_k = \varkappa'_{k-\alpha}$ et $\varkappa'_{k-\alpha} \geq \varkappa'_{k-i}$; $\mu = \mu_1$ sera alors la première solution de notre problème. J'appelle $\mu_1 + 1$ le rang de l'équation aux différences finies. L'équation caractéristique de (30) aura alors α racines qui seront différentes de zéro: $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots a_{1,\alpha}$.

Nous formerons ensuite les nombres

$$\frac{\varkappa_{k-\alpha-1} - \varkappa_{k-\alpha}}{1}, \ldots \frac{\varkappa_{k-\alpha-i} - \varkappa_{k-\alpha}}{i}, \ldots \frac{\varkappa_0 - \varkappa_{k-\alpha}}{k-\alpha}.$$

Soit $\frac{\Delta^{k-\beta}u_{k-\alpha}}{\beta-\alpha} = \mu_2 < \mu_1$ le plus grand ou le dernier des plus grands. Pour $\mu = \mu_2$ on aura $\Delta'_{k-\alpha} = \Delta'_{k-\beta}$ et $\Delta'_{k-\beta} > \Delta'_{k-i}$.

$\mu = \mu_2$ est donc encore une solution de notre problème et à laquelle correspondent les $\beta - \alpha$ racines $a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots a_{2,\beta-\alpha}$. Ensuite nous formons les nombres

$$\frac{\Delta^{k-\beta-1}u_{k-\beta}}{1} \cdots \frac{\Delta^{k-\beta-i}u_{k-\beta}}{i} \cdots \frac{\Delta^{0}u_{k-\beta}}{k-\beta}$$

et nous continuons de cette manière jusqu'à ce que nous trouvons une série dans laquelle le dernier nombre soit entre les plus grands. Ainsi nous aurons les λ valeurs suivantes de μ

$$\mu_1 > \mu_2 > \mu_3 \cdots > \mu_\lambda.$$

Le nombre total de valeurs correspondantes de $a_{i,j}$ est

$$\alpha + (\beta - \alpha) + (\gamma - \beta) + \cdots (k - \varepsilon) = k$$

c'est-à-dire précisément égal à l'ordre de l'équation. Il est vrai que, si quelques-unes des nombres μ_i ne sont pas des entiers, les coefficients de l'équation aux différences en $u^{(\mu_i)}(n)$ correspondantes ne seront pas des polynômes. En ce cas, il est nécessaire d'employer des artifices particuliers; c'est ce que nous montrerons plus tard par des exemples particuliers; mais, dans ce qui suit, nous supposons que tous les nombres μ_i soient des entiers. Si, en outre, aucune des quantités $a_{i,j}$ n'est une racine multiple, l'équation (9) aura toujours k intégrales normales de la forme

$$l^{\mu_i}(n)\, a_{i,j}^{n} \cdot \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\beta_{i,j}+1)}\, \varphi_{i,j}(n) \qquad (i = 1, 2, \ldots \lambda) \qquad (31)$$

où les séries $\varphi_{i,j}(n)$ sont généralement divergentes. Comment former maintenant ces intégrales? Considérons la transformée de Laplace de (30) en posant

$$u^{(j)}(n) = \int t^{n-1} v^{(j)}\, t\, dt.$$

Si $\mu = \mu_j$, celle-ci aura, outre 0 et ∞, les points singuliers

$$a_{j,1},\ a_{j,2},\ a_{j,3} \ldots a_{j,r}.$$

Aux environs de $a_{j,i}$ l'intégrale générale aura la forme

$$v^{(j)}(t) = \psi(t) + (t - a_{j,i})^{\beta_{j,i}} \varphi(t)$$

où $\psi(t)$ et $\varphi(t)$ sont holomorphes aux environs de $a_{j,i}$. Si $\mu = \mu_i$, toutes les

intégrales de la transformée de Laplace de (30) seront régulières aux environs de o, c'est-à-dire de la forme

$$\sum t^{\alpha} (\log t)^{q} \varphi(t)$$

où $\varphi(t)$ est holomorphe aux environs de $t = 0$. En ce cas, nous pourrons nous servir de la même ligne d'intégration que dans § 6: Un lacet s'étendant de o et enveloppant un point singulier. Si, au contraire, $\mu = \mu_j$ (où $j < \lambda$), $P_0(n)$ ne sera pas parmi les coefficients du plus haut degré; o sera alors un point singulier irrégulier pour $v^{(j)}(t)$. Ceci correspond à ce qu'on avait dans (13): $o = C_{0,p} = -C_{1,p} \quad C_{2,p} = \cdots$. En ce cas, on pourra représenter $v^{(j)}(t)$ aux environs de o par des séries normales de la forme:

$$v^{(j)}(t) = i \sum_{1}^{p} e^{\Psi_{j,i}(t)} \varphi_{j,i}(t) \tag{32}$$

où $\varphi_{j,i}(t)$ est de la forme d'une intégrale régulière, tandis que

$$\Psi_{j,i}(t) = \frac{\alpha_{\lambda_i}}{t^{\rho_i}} + \frac{\alpha_{\lambda_i - 1}}{t^{\rho_i - 1}} + \cdots + \frac{\alpha_1}{t}$$

λ_i s'appelle l'ordre de la série normale —. Quant au point infiniment éloigné $v^{(1)}(t)$ se comportera, aux environs de celui-ci, comme une intégrale régulière; $v^{(j)}(t)\,(j > 1)$, au contraire, se comportera comme une intégrale normale, c'est-à-dire sera de la forme (32), seulement ici

$$\Psi_{j,i}(t) = {}_i\beta_{\lambda_i} t^{\rho_i} + {}_i\beta_{\lambda_i - 1} t^{\rho_i - 1} + \cdots + {}_i\beta_1 t.$$

Nous pourrons maintenant préciser la ligne d'intégration de $u^{(j)}(t)$. Appelons les arguments des quantités $\alpha_{\lambda_1}, \alpha_{\lambda_2}, \ldots \alpha_{\lambda_p}$ respectivement $\theta_1\, \theta_2 \ldots \theta_p$. Nous traçons un cercle autour de zéro avec un rayon assez petit pour que tous les autres points singuliers pour $v^{(j)}(t)$ se trouvent en dehors du cercle. Nous traçons, de zéro, une ligne L_1 qui coupe le cercle en E formant l'angle φ avec l'axe des nombres réels positifs, et nous déterminons φ de manière que toutes les quantités

$$\cos(\theta_1 - \varphi\lambda_1),\ \cos(\theta_2 - \varphi\lambda_2),\ \ldots\ \cos(\theta_p - \varphi\lambda_p), \tag{33}$$

soient négatives. Ceci n'est pas toujours possible, mais supposons d'abord que nous ayons trouvé une valeur de φ qui satisfasse à ces conditions. Nous traçons alors autour d'un des points singuliers $a_{j,r}$ un cercle dont le rayon sera assez petit pour que le cercle ne contienne pas d'autres points singuliers. Soit $b_{j,r}$ un point de ce cercle choisi de manière que $|b_{j,r}| < |a_{j,r}|$. Nous tracerons alors une ligne L_2 de E à $b_{j,r}$ ne passant par aucun point singulier, et nous

intégrerons de o le long de L_1 et L_2 autour de $a_{j,r}$ et retournerons à o le long de L_2 et L_1. *Une telle ligne d'intégration satisfera aux conditions* (12) *dans tout le plan complexe de* n. De la même façon on peut intégrer autour de chacun des autres points singuliers; de cette manière on forme l'intégrale complète. On verra facilement que ces intégrales se comporteront asymptotiquement comme indiqué plus haut.

Si l'on déforme la ligne d'intégration, on aura une nouvelle intégrale particulière en franchissant un point singulier. Or comme il est possible de faire la déformation de manière que la valeur asymptotique ne change pas, on verra que la même série normale représentera asymptotiquement des intégrales particulières différentes. D'autre part nous pourrons toujours choisir notre système fondamental d'intégrales de manière que chaque élément en est représenté asymptotiquement par sa série normale.

Il arrive qu'il n'est pas possible de déterminer aucune valeur de φ satisfaisante aux conditions (33); en ce cas, il faut prendre, au lieu de $v^{(j)}(t)$ qui est l'intégrale complète de la transformée de Laplace, une intégrale particulière convenablement choisie, de sorte que les conditions en soient satisfaites: ou on pourra se servir d'une ligne d'intégration s'étendant de l'infini et enveloppant un point singulier. Soient $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$ les arguments des quantités $\beta_{\lambda_1}\,\beta_{\lambda_2} \ldots \beta_{\lambda_p}$, il faudra alors que l'argument φ par lequel on s'approche de l'infini soit déterminé de manière que les quantités

$$\cos(\varepsilon_1 + \varphi\lambda_1),\ \cos(\varepsilon_2 + \varphi\lambda_2),\ \ldots\ \cos(\varepsilon_p + \varphi\lambda_p)$$

soient toutes négatives.

Coefficients différentiels d'ordre infini.

§ 12. Au lieu de se servir de la transformation

$$u(n) = \int t^{n-1} v(t)\, dt$$

on aurait pu poser

$$u(n) = \int t^{-n-1} v_1(t)\, dt. \tag{34}$$

En intégrant par parties on aurait alors

$$(n+i)(n+i-1) \ldots (n+i-j+1)\, u(n+i) = \int t^{-n-i+j-1} \frac{d^{j} v_1(t)}{dt^{j}}\, dt$$

supposé que les limites d'intégration aient été choisies de manière que

$$t^{-n-i+j}\,\frac{d^j v_1(t)}{dt^j} \qquad \begin{pmatrix} j = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ p-1 \\ i = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ k \end{pmatrix} \tag{35}$$

disparaisse pour ces valeurs de t. Supposons que les coefficients de notre équation aux différences

$$P_k(n)\,u(n+k) + P_{k-1}(n)\,u(n+k-1) + \cdots + P_0(n)\,u(n) = 0 \tag{6}$$

soient ici de la forme

$$P_i(n) = c_{i,0} + c_{i,1}(n+i) + c_{i,2}(n+i)(n+i)(n+i-1) + \\ + c_{i,p}(n+i)(n+i-1)\dots(n+i-p+1)$$

où les $c_{i,\nu}$ se déterminent par la formule

$$\nu!\,c_{i,\nu} = \Delta^\nu P_i(-i).$$

Remarquons surtout que $c_{i,p} = C_{i,p}\,(i = 1,\ 2,\ \dots\ k)$. Pour $v_1(t)$ on trouvera maintenant par la transformation (34) l'équation différentielle

$$q_p(t)\,t^p\frac{d^p v_1(t)}{dt^p} + \cdots + q_i(t)\,t^i\frac{d^i v_1(t)}{dt^i} + \cdots + q_0(t)\,v_1(t) = 0 \tag{36}$$

où

$$q_i(t) = c_{k,i} + c_{k-1,i}\,t + \cdots + c_{0,i}\,t^k.$$

Cette équation est de la même forme que (13). Les points singuliers sont, outre 0 et ∞, les racines de $q_p(t) = 0$; mais celles-ci sont $\frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_2},\ \dots\ \frac{1}{a_k}$. Aux environs de 0 $v_1(t)$ se représente par p séries de la forme

$$t^{\gamma_i}(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots)$$

où les exposants γ_i se déterminent comme les racines de l'équation $P_k(\gamma - k) = 0$: pour des valeurs très grandes de t, au contraire, par p séries de la forme

$$t^{-\alpha_i}\left(A_0 + \frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t^2} \quad \right)$$

où les exposants α_i se déterminent comme les racines de l'équation $P_0(-\alpha) = 0$. Les quantités α_i et γ_i sont les mêmes que plus haut (§ 6), et nous les supposons rangées de la même manière. En suivant la ligne d'intégration, définie au § 8, on trouvera une intégrale satisfaisant aux conditions (35), si $\Re(n) > \Re(-\alpha_p)$. En se servant, au contraire, de la ligne d'intégration définie au § 6, l'intégrale sa-

tisfera à l'équation aux différences pourvu que $\Re(u) < \Re(\gamma_p - k)$. En concluant exactement comme plus haut on verra maintenant que l'une et l'autre des deux intégrales se comportent asymptotiquement comme

$$c \cdot a_i^u \, n^{-\beta_i - 1} (1 - e^{2\pi i \beta_i}) \, \Gamma(1 + \beta_i). \tag{37}$$

Appliquons maintenant cette transformation à la solution du problème suivant: Soit y l'intégrale complète de l'équation différentielle

$$P_k(x) \frac{d^k y}{dx^k} + P_{k-1}(x) \frac{d^{k-1} y}{dx^{k-1}} + \cdots + P_0(x) \, y = 0 \tag{38}$$

en posant

$$\frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n y}{dx^n} = u(n)$$

nous allons étudier la manière dont se comporte $u(n)$ pour des valeurs très grandes de n. Nous supposons que les points singuliers de l'équation différentielle soient en nombre fini, et qu'ils soient tous réguliers. Les coefficients seront alors des polynômes en x dont le degré diminue avec l'indice. Si $P_k(x)$ est du $p^{\text{ième}}$ degré, $P_{k-i}(x)$ sera au plus du $(p-i)^{\text{ième}}$ degré en x. Outre ∞ nous aurons alors p points singuliers; appelons les $a_1, a_2 \ldots a_p$. Aux environs du point a_i y sera de la forme

$$\sum_j (t - a_i)^{\gamma_{i,j}} \varphi_{i,j}(t) \tag{39}$$

où $\varphi_{i,j}(t)$ est holomorphe dans le domaine de a_i. Nous différentierons maintenant (38) n fois et poserons $y^{(n)} = n! \, u(n)$. On aura alors une équation aux différences d'ordre p en $u(n)$, car p sera nécessairement plus grand que k, ∞ n'étant pas sans cela un point singulier régulier. On aura donc

$$Q_k u(n+k) + Q_{k-1} u(n+k-1) + \cdots + Q_{k-p} u(n+k-p) = 0 \tag{40}$$

où

$$Q_k = (n+k)(n+k-1) \ldots (n+1) P_k(x)$$

. . . . . .

$$Q_{k-p} = \frac{P_0^{(p-k)}(x)}{(p-k)!} + (n+k-p) \frac{P_1^{(p-k+1)}(x)}{(p-k+1)!} + \cdots + (n+k-p) \ldots (n+1) \frac{P_k^{(p)}(x)}{p!}.$$

Ce qu'il y a de plus important maintenant, c'est de déterminer les racines de l'équation caractéristique de (40). Ici, cette équation est

$$P_k(x) z^p + \frac{P'_k(x)}{1!} z^{p-1} + \frac{P''_k(x)}{2!} z^{p-2} + \cdots \frac{P_k^{(p)}(x)}{p!} = z^p P_k\left(x + \frac{1}{z}\right) = 0. \tag{41}$$

Donc, les racines sont

$$\frac{1}{a_1 - x}, \frac{1}{a_2 - x}, \ldots \frac{1}{a_p - x}.$$

Formons maintenant la transformée de Laplace de (40) en posant

$$u(n) = \int t^{-n-1} v_1(t)\, dt.$$

On verra facilement qu'elle est

$$P_k(x+t)\frac{d^k v_1}{dt^k} + P_{k-1}(x+t)\frac{d^{k-1} v_1}{dt^{k-1}} + \cdots + P_0(x+t)\, v_1 = 0$$

y étant, aux environs de a_i, de la forme (39), on verra en étendant l'intégration de ∞ ou de 0 autour de chacun des points singuliers que pour des valeurs très grandes de n, $u(n) = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\frac{d^n y}{dx^n}$ se comportera comme

$$i\sum j\sum C_{i,j}\left(\frac{1}{a_i - x}\right)^n \cdot n^{-\beta_{i,j}-1} \cdot \Gamma(1+\beta_{i,j})\,(1 - e^{2\pi i \beta_{i,j}}). \qquad (42)$$

$C_{i,j}$ sont des constantes dont, cependant, k seules sont indépendantes. Cette expression nous sera très utile plus tard. Nous avons supposé ici que tous les points singuliers soient réguliers, mais quand même ∞ serait un point singulier irrégulier, on trouverait la même valeur asymptotique que plus haut, pourvu que y soit l'intégrale générale de (38); mais nous allons démontrer qu'il y aura alors certaines intégrales particulières qui se comporteront d'une autre manière. Nous supposons donc que les coefficients de (38) soient des polynômes de degrés arbitraires, mais tels que tous les points singuliers situés dans la partie finie du plan soient réguliers. Désignons par π_i le degré de $P_i(x)$, et soit r le plus grand des nombres

$$\pi_k,\ \pi_{k-1} - 1,\ \pi_{k-2} - 2, \ldots \pi_0 - k$$

l'équation aux différences en $u(n)$ sera alors d'ordre r. Les premiers $\pi_k + 1$ coefficients $Q_k \ldots Q_{k-\pi_k}$ de celle-ci serons tous du même degré k, tandis que ceux qui suivent seront d'un degré inférieur. Nous formerons alors l'équation qui jouera le même rôle que (41); celle-là aura $r - p$ racines nulles et, en outre, les mêmes racines que (41). A ces dernières racines correspond une intégrale $u(n)$ se comportant asymptotiquement comme il est indiqué par l'expression (42). Pour déterminer les intégrales correspondant aux racines nulles, il faudra faire une substitution de la forme

$$u(n) = \Gamma^{\mu}(n)\ w^{(\mu)}(n).$$

Ainsi que nous l'avons déjà montré (v. § 11), $w^{(\mu)}(n)$ sera alors une intégrale particulière dont l'expression asymptotique est de la même forme que (42). On trouvera généralement plusieurs valeurs différentes de μ; celles-ci se déterminent facilement par les nombres α_i, et on verra qu'elles seront toutes négatives et plus petites que 1. La valeur asymptotique de ces intégrales particulières seront donc d'un ordre beaucoup moins élevé que celles étudiées plus haut; on verra par-là que (42) est, en effet, l'expression asymptotique de l'intégrale générale, quand même ∞ serait un point singulier irrégulier.

CHAPITRE II.

Intégration des équations différentielles et des équations aux différences finies par des fractions continues.

Equations différentielles.

§ 13. LAGRANGE[1] a déjà traité ce problème en développant en fraction continue quelques transcendantes élémentaires (e^x, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arc\,tg} x, \ldots$) en partant de certaines équations différentielles de premier ordre. Le procédé est assez simple. Pour développer en fraction continue une intégrale particulière y_1 LAGRANGE pose

$$y_1 = \cfrac{\xi_1}{1 + y_2}$$

où ξ_1 est une première approximation de y_1 (p. ex. le premier terme de la série de puissances de y_1). Nous aurons alors une équation différentielle en y_2 et poserons de même

$$y_2 = \cfrac{\xi_2}{1 + y_3}$$

et ainsi de suite; nous trouverons alors que

$$y_1 = \cfrac{\xi_1}{1 + \cfrac{\xi_2}{1 + \cfrac{\xi_3}{1 + \cdots}}} \qquad (1)$$

[1] LAGRANGE: Sur l'usage des fractions continues dans le calcul intégral. Mémoires de l'Acad. de Berlin 1776.

Le succès de la méthode dépend d'un choix heureux des ξ_i, mais il faut surtout transformer l'équation différentielle à quelque forme invariable pour ne pas être arrêté, dès les premiers pas, par l'embarras des calculs. Considérons, par exemple, l'équation de Riccati

$$x\frac{dy}{dx} - ay + by^2 - cx^n = 0 \tag{2}$$

où a, b et c sont des constantes. En posant

$$y = \frac{a}{b} \cdot \frac{x^n}{y_1}$$

on aura l'équation transformée

$$x\frac{dy_1}{dx} - (a+n)y_1 + cy_1^2 - bx^n = 0.$$

En appliquant ici la substitution

$$y_1 = \frac{a+n}{c} \cdot \frac{x^n}{y_2}$$

on aura l'équation transformée

$$x\frac{dy_2}{dx} - (a+2n)y_2 + by_2^2 - cx^n = 0.$$

Mais cette équation est de la même forme que (2); on aura donc pour y la fraction continue

$$y = \frac{a}{b} \cdot \frac{x^n}{\dfrac{a+n}{c} \cdot \dfrac{x^n}{\dfrac{a+2n}{b} \cdot \dfrac{x^n}{\dfrac{a+3n}{c} \cdot \ddots \cdot \dfrac{a+(2r-1)n}{c} \cdot \dfrac{x^n}{y_{2r}}}}} \tag{3}$$

où le reste est déterminé par l'équation différentielle

$$x\frac{dy_{2r}}{dx} - (a+2rn)y_{2r} + by_{2r}^2 - cx^n = 0.$$

On aurait aussi pu poser en (2)

$$y = \frac{x^n}{y_1}.$$

L'équation transformée serait alors

$$x\frac{dy_1}{dx} - (n-a)y_1 + cy_1^2 - bx^n = 0.$$

On aurait donc la fraction continue

$$y \quad \cfrac{x^n}{n-a + \cfrac{c}{2n-a + \cfrac{b}{3n-a + \cfrac{c}{4n-a + \cfrac{b}{\ddots}}}}} \tag{4}$$

Il est facile, du reste, de trouver la valeur de ces deux fractions continues en se rappelant la fraction continue de Bessel bien connue

$$\frac{J^{\nu+1}(x)}{J^{\nu}(x)} = \cfrac{x}{2\nu + 2 - \cfrac{x^2}{2\nu + 4 - \cfrac{x^2}{2\nu + 6 - \cfrac{x^2}{\ddots}}}}$$

où $J^{\nu}(x)$ est la fonction bessélienne; on verra, par comparaison, que la valeur de (3) est

$$y = \frac{n}{2b} z \cdot \frac{J^{\nu-1}(z)}{J^{\nu}(z)}$$

où

$$\nu = \frac{a}{n} \qquad z = \frac{2}{n}\sqrt{-bc}\, x^n.$$

Pour la valeur de (4) on trouve, au contraire,

$$y = -\frac{n}{2b} z \cdot \frac{J^{1-\nu}(z)}{J^{-\nu}(z)}.$$

Les fractions continues (3) et (4) donnent donc, si ν n'est pas un entier, deux intégrales de (12) indépendantes l'une de l'autre.

Il arrive que les fractions continues auxquelles on est conduit ainsi, sont finies; mais, en général, elles ne le seront pas. Il faut alors examiner la convergence; en appliquant les règles connues de Stieltjes, M. Pringsheim, etc. cela est possible quelquefois, mais on n'a aucun moyen de se rendre compte de

la convergence ou de la divergence avant la formation de la fraction continue. Aussi nous allons exposer une autre méthode qui ne souffre pas de cet inconvénient.

§ 14. Pour former une fraction continue dont les réduites sont des fonctions données, on peut se servir d'un théorème énoncé par M. Thiele dans un mémoire sur les fractions continues finies.[1] Soient $x_1, x_2, x_3 \ldots$ une série de quantités arbitraires que nous supposons être des réduites d'une fraction continue. En étudiant maintenant le rapport anharmonique entre 4 réduites $x_i\, x_j\, x_k\, x_l$, M. Thiele démontre l'équation suivante

$$x_n = x_1 - \cfrac{x_1 - x_2}{1 - \cfrac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3 - \cfrac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}{x_2 - x_4 - \ddots \cfrac{(x_{n-3} - x_{n-2})(x_{n-1} - x_n)}{x_{n-2} - x_n}}}}$$

qui donne encore l'identité

$$\begin{vmatrix} x_n & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_n & x_2 & x_1 & x_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 - x_4 \\ x_1 & x_3 & x_2 - x_4 \\ x_2 & x_1 & x_4 - x_5 \\ x_2 & x_4 & x_3 - x_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot \frac{(x_{n-3} - x_{n-2})}{(x_{n-3} - x_{n-1})} \frac{(x_{n-1} - x_n)}{(x_{n-2} - x_n)}. \tag{5}$$

Soient maintenant y_1 et y_2 deux solutions indépendantes d'une équation différentielle linéaire de second ordre

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P \cdot \frac{dy}{dx} + Q \cdot y = 0. \tag{6}$$

Pour intégrer cette équation au moyen de fractions continues je pose

$$x_{n+1} = \frac{y_1^{(n)}}{y_2^{(n)}}$$

on trouvera alors que le rapport anharmonique entre 4 réduites consécutives est

$$\frac{x_n - x_{n+1}}{x_n - x_{n+2}} \cdot \frac{x_{n+2} - x_{n+3}}{x_{n+1} - x_{n+3}} = \frac{y_1^{(n-1)} y_2^{(n)} - y_1^{(n-1)} y_1^{(n)}}{y_1^{(n-1)} y_2^{(n+1)} - y_2^{(n-1)} y_1^{(n+1)}} \cdot \frac{y_1^{(n+1)} y_2^{(n+2)} - y_2^{(n+1)} y_1^{(n+2)}}{y_1^{(n)} y_2^{(n+2)} - y_2^{(n)} y_1^{(n+2)}}.$$

[1] Den endelige Kjædebrökfunktions Teori: Tidskrift for Mathematik, Ser. 2, vol. 6, 1870. Köbenhavn.

Les dérivées successives de (6) sont maintenant

$$\begin{aligned} &y'' + P_0\, y' + Q_0\, y = 0 \\ &y''' + P_1\, y'' + Q_1\, y' = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &y^{(n+2)} + P_n\, y^{(n+1)} + Q_n\, y^{(n)} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

où les coefficients se déterminent par les relations de récurrence

$$P_{n+1} = P_n + \frac{Q'_n}{Q_n} \qquad Q_{n+1} = Q_n + \frac{Q_n P'_n - P_n Q'_n}{Q_n}. \tag{8}$$

De (7) on dérive encore les relations

$$\begin{aligned} &\{ y_1^{(n)} y_2^{(n+2)} - y_2^{(n)} y_1^{(n+2)} \} + P_n \{ y_1^{(n)} y_2^{(n+1)} - y_2^{(n)} y_1^{(n+1)} \} = 0 \\ &\{ y_1^{(n+1)} y_2^{(n+2)} - y_2^{(n+1)} y_1^{(n+2)} \} - Q_n \{ y_1^{(n)} y_2^{(n+1)} - y_2^{(n)} y_1^{(n+1)} \} = 0. \end{aligned}$$

Pour le rapport anharmonique on trouve alors

$$\frac{x_n - x_{n+1}}{x_n - x_{n+2}} \cdot \frac{x_{n+2} - x_{n+3}}{x_{n+1} - x_{n+3}} = \frac{Q_n}{P_{n-1} \cdot P_n}. \tag{9}$$

En substituant dans (5) cette expression on aura l'identité

$$\begin{vmatrix} y'_1 y_2^{(n+1)} & y'_2 y_1^{(n+1)} \\ y_1 y_2^{(n+1)} & y_2 y_1^{(n+1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Q_0 & & & \\ P_0 & Q_1 & & \\ & P_1 & Q_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \dfrac{Q_{n-1}}{P_{n-1}} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Mais on pourra encore trouver une autre fraction continue toute analogue: En désignant par $y^{(-n)}$ la $n^{\text{ième}}$ intégrale on peut, après avoir trouvé la loi générale des coefficients de (7), former les équations suivantes

$$\begin{aligned} &y' + P_{-1}\, y + Q_{-1}\, y^{(-1)} = 0 \\ &y + P_{-2}\, y^{(-1)} + Q_{-2}\, y^{(-2)} = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &y^{(2-n)} + P_{-n}\, y^{(1-n)} + Q_{-n}\, y^{(-n)} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

En posant dans (5)

$$x_{n+2} = \frac{y_1^{(-n)}}{y_2^{(-n)}}$$

on aura

$$\frac{y_1 y_2^{(-n)} - y_2 y_1^{(-n)}}{y'_1 y_2^{(-n)} - y'_2 y_1^{(-n)}} = \cfrac{1}{P_{-1} - \cfrac{Q_{-1}}{P_{-2} - \cfrac{Q_{-2}}{P_{-3} - \ddots \cfrac{Q_{1-n}}{P_{-n}}}}} \tag{12}$$

Les équations (10) et (12) sont simplement des identités, mais il est naturel de faire croître n vers l'infini dans ces fractions continues. L'examen de la convergence dépendra alors de la manière dont $y^{(n)}$ se comporte pour des valeurs très grandes de n. On voit que si

$$\lim_{n=\infty} \frac{y_1^{(n)}}{y_2^{(n)}} = c$$

où c est une constante, (10) tendra vers

$$\frac{y'_1 - c y'_2}{y_1 - c y_2}$$

c'est-à-dire vers la dérivée logarithmique d'une intégrale particulière de (6); mais nous allons voir que cette constante n'a pas la même valeur dans tout le plan. La fraction continue tendra donc vers des fonctions analytiques différentes dans des parties différentes du plan. Pour étudier de plus près cette particularité nous supposons que les coefficients de (6) soient des fonctions rationnelles de x. Soient les points singuliers de l'équation différentielle $a_1\, a_2 \ldots a_p$ et ∞; ce dernier point peut être un point singulier, soit régulier soit irrégulier, mais nous supposons que tous les autres points singuliers soient réguliers. Aux environs de a_i on pourra toujours déterminer 2 intégrales linéairement indépendantes $y_{i,1}$ et $y_{i,2}$ de la forme

$$y_{i,1} = (x - a_i)^{\beta_{i,1}} \varphi_{i,1}(x) \qquad y_{i,2} = (x - a_i)^{\beta_{i,2}} \varphi_{i,2}(x) \tag{13}$$

$\varphi_{i,1}(x)$ et $\varphi_{i,2}(x)$ étant holomorphes dans le voisinage du point a_i. Nous allons maintenant étudier la convergence de (10) et de (12) aux environs d'un point arbitraire x du plan. Soit a_i le point singulier le plus rapproché de x, a_j le point singulier le plus éloigné de x (∞ non compris), on aura alors d'après (Chap. I (42)) que, pour des valeurs positives très grandes de n, $\frac{y_{i,1}^{(n)}}{n!}$ et $\frac{y_{i,2}^{(n)}}{n!}$ se comportent respectivement comme

$$C_{i,1}(a_i - x)^{-n} n^{-\beta_{i,1}-1} \Gamma(1 + \beta_{i,1})(1 - e^{2\pi i \beta_{i,1}})$$
$$\text{et comme } C_{i,2}(a_i - x)^{-n} n^{-\beta_{i,2}-1} \Gamma(1 + \beta_{i,2})(1 - e^{2\pi i \beta_{i,2}}) \tag{14}$$

tous les autres termes étant d'ordre inférieur. Donc

$$\lim_{n=+\infty} \frac{y_{i,1}^{(n)}}{y_{i,2}^{(n)}} n^{\beta_{i,1}-\beta_{i,2}} = \frac{c_{i,1}}{c_{i,2}}$$

où nous avons posé

$$c_{i,k} = C_{i,k} \cdot \Gamma(1 + {}_i\beta_{i,k})(1 - e^{2\pi i \beta_{i,k}}).$$

On voit de même que pour des valeurs négatives très grandes de n

$$\lim_{n=-\infty} \frac{y_{j,1}^{(n)}}{y_{j,2}^{(n)}} n^{\beta_{j,1}-\beta_{j,2}} = \frac{c_{j,1}}{c_{j,2}}.$$

Les intégrales $y_{j,1}$ et $y_{j,2}$ sont ici des fonctions linéaires de $y_{i,1}$ et de $y_{i,2}$ dont les coefficients se déterminent de la connaissance du groupe de l'équation; (10) tendra alors vers $\frac{y'_{i,1}}{y_{i,1}}$ ou vers $\frac{y'_{i,2}}{y_{i,2}}$, selon que $\Re({}_i\beta_{i,1}) > \Re({}_i\beta_{i,2})$, ou que $\Re({}_i\beta_{i,1}) < \Re({}_i\beta_{i,2})$. Si $\Re({}_i\beta_{i,1}) = \Re({}_i\beta_{i,2})$, sans que ${}_i\beta_{i,1} = {}_i\beta_{i,2}$, la fraction continue divergera. (12) tend au contraire vers $\frac{y_{j,1}}{y'_{j,1}}$ ou vers $\frac{y_{j,2}}{y'_{j,2}}$, selon que $\Re({}_i\beta_{j,2}) \gtrless \Re({}_i\beta_{j,1})$. (10) *et* (12) *conduisent donc généralement à deux intégrales de* (6) *linéairement indépendantes l'une de l'autre; nous pouvons donc intégrer complètement l'équation différentielle au moyen de fractions continues.* Etudions encore quelque cas d'exception:

1) Si ${}_i\beta_{i,1}$ est 0 ou un nombre entier positif, le terme contenant $(a_i - x)^{-n}$ disparait dans la valeur asymptotique de $\frac{1}{n!} y_{i,1}^{(n)}$ à cause du facteur $1 - e^{2\pi i \beta_{i,1}}$. En ce cas (10) tendra toujours vers $\frac{y'_{i,1}}{y_{i,1}}$.

2) Si ${}_i\beta_{i,1} - {}_i\beta_{i,2}$ est 0 ou un nombre entier positif, $y_{i,2}$ sera de la forme

$$y_{i,2} = (x - a_i)^{\beta_{i,2}} \{\psi_1(x) + \psi_2(x) \log (x - a_i)\},$$

tandis que $y_{i,1}$ ne sera pas logarithmique. En se rappelant (Chap. I (21)) on trouvera facilement que la valeur asymptotique de $\frac{1}{n!} y_{i,2}^{(n)}$ sera

$$\left(\frac{1}{a_i - x}\right)^n n^{-\beta_{i,2}-1} i\pi (n + {}_i\beta_{i,2} + 1)(1 - e^{2\pi i \beta_{i,2}}) \Gamma(1 + {}_i\beta_{i,2})$$

on voit donc *que* (10) *tendra toujours vers l'intégrale non-logarithmique, c'est-à-dire* $\frac{y'_{i,1}}{y_{i,1}}$.

§ **15.** En considérant, au contraire, un point x pour lequel a_k est le point singulier le plus rapproché, *la fraction continue convergera généralement aussi pour cette valeur de x, mais vers une autre fonction qui n'est pas la continuation analytique de la première. Donc, la valeur de la fraction continue saute sur certaines lignes que nous appelons les lignes critiques de la fraction continue et dont la position se détermine par les points singuliers de l'équation différentielle.*

Etudions de plus près quelques uns des cas les plus simples:

1) S'il n'y a qu'un seul point singulier situé dans le fini, ou s'il n'y en a pas du tout, la fraction continue tend partout vers la même fonction.

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

2) S'il y a deux points singuliers a_1 et a_2 dans la partie finie du plan, nous traçons une ligne droite BA (fig. 1) perpendiculaire au milieu de la ligne a_1a_2. Les fractions continues convergent alors généralement dans chacun des demi-plans limités par la droite BA, mais dans le demi-plan où a_i est situé (10), par exemple, tendra vers $\frac{y'_{1,1}}{y_{1,1}}$, dans l'autre, au contraire, vers $\frac{y'_{2,1}}{y_{2,1}}$. Sur la ligne droite elle-même la fraction continue peut tendre vers l'une ou l'autre de ces fonctions, ou elle peut diverger.

3) S'il y a trois points singuliers a_1, a_2, a_3 (fig. 2), nous traçons des lignes perpendiculaires au milieu des côtés du triangle $a_1a_2a_3$. Que celles-ci se coupent en O. Ces lignes divisent le plan en 3 parties COA, AOB et BOC chacune s'étendant à l'infini; dans chacune de celles-ci la fraction continue tend vers une fonction analytique déterminée.

4) On voit de même que, s'il y a 4 points singuliers $a_1a_2a_3a_4$ (fig. 3), le plan est divisé en 4 domaines de convergence AO_2B, BO_2O_1C, CO_1D et DO_1O_2A

par des droites perpendiculaires au milieu des côtés et des diagonales du quadrilatère.

Et généralement si l'équation différentielle a un nombre fini de points singuliers tous réguliers, nous pouvons l'intégrer complètement dans tout le plan par deux fractions continues (10) et (12). Celles-ci ne divergeront que exceptionnellement: lorsque $\Re(\beta_{i,1}) = \Re(\beta_{i,2})$ sans que $\beta_{i,1} = \beta_{i,2}$ mais elles conduiront à des intégrales particulières différentes dans des parties différentes du plan, les fractions continues ayant certaines lignes critiques sur lesquelles sautent leurs valeurs. La position de ces lignes se détermine par les points singuliers. Sur les lignes critiques les fractions continues peuvent tendre vers une des fonctions qu'elles représentent dans les parties contiguës du plan, mais elles peuvent aussi diverger. Dans les points singuliers de l'équation différentielle, au contraire, les fractions continues convergent.

Il arrive que les fonctions représentées par les fractions continues, chacune de son côté d'une des lignes droites, coïncident, ainsi il arrive, par exception, que la fraction continue tend vers la même fonction dans tout le plan. Mais il arrive aussi, par exception, qu'elle diverge dans tout le plan: Si pour tous les points singuliers $\Re(\beta_{i,1}) = \Re(\beta_{i,2})$ sans que $\beta_{i,1} = \beta_{i,2}$.

Nous allons mentionner encore un cas d'exception. Au § 12 nous avons vu que, si ∞ est un point singulier irrégulier, il y a certaines intégrales particulières qui se comportent asymptotiquement comme

$$\Gamma^{(n)}(n)\,\alpha^n n^\mu$$

où $0 > \mu \geq -1$ *tandis que* α *est une constante indépendante de* x. *Si* $\frac{1}{n!} y_1^{(n)}$ *est une telle intégrale, on verra que, dans ce cas,* (10) *tendra vers* $\frac{y_1'}{y_1}$ *dans tout le plan.*

§ **16.** Un système d'équations différentielles de la forme

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + P_0 \frac{dz}{dx} + Q_0 \cdot y &= 0 \\ \frac{dz}{dx} + S_0 \cdot z + T_0 \cdot y &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

peut se traiter de la même façon, supposé que les coefficients soient des fonctions rationnelles de x. En différentiant (15) n fois on en dérivera facilement les équations

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + P_n \frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}} + Q_n \frac{d^n y}{dx^n} &= 0 \\ \frac{d^{n+1}z}{dx^{n-1}} + S_n \frac{d^n z}{dx^n} + T_n \frac{d^n y}{dx^n} &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Soient y_1, z_1 et y_2, z_2 deux solutions particulières indépendantes du système proposé. Je pose alors

$$\Delta_{2n+2} \quad \begin{matrix} y_1^{(n)} \\ y_2^{(n)} \end{matrix} \qquad \Delta_{2n+1} \quad \begin{matrix} z_1^{(n)} \\ z_2^{(n)} \end{matrix}.$$

Au moyen de (16) on pourra maintenant exprimer par les coefficients $P_n, Q_n \ldots$ le rapport anharmonique entre 4 réduites consécutives; un calcul facile donnera en substituant dans (5) la fraction continue

$$\cfrac{S_0}{T_1 - \cfrac{Q_0}{P_0 - \cfrac{S_1}{T_1 - \cfrac{Q_1}{P_1 - \cfrac{S_2}{\ddots}}}}} \tag{17}$$

La réduite qu'on trouve en interrompant la fraction continue par le dénominateur partiel T_{n-1} est

$$\frac{y_1 z_2^{(n)} - y_2 z_1^{(n)}}{z_1 z_2^{(n)} - z_2 z_1^{(n)}}$$

tandis que la réduite suivante est

$$\frac{y_1 y_2^{(n)} - y_2 y_1^{(n)}}{z_1 y_2^{(n)} - z_2 y_1^{(n)}}.$$

Au moyen de (15) on dérive encore de (17) la fraction continue

$$\cfrac{Q_0}{P_0 - \cfrac{S_1}{T_1 - \cfrac{Q_1}{P_1 - \cfrac{S_2}{T_2 - \ddots}}}} \tag{7 bis}$$

où les réduites paires et impaires sont respectivement

$$\frac{z'_1 z_2^{(n)} - z'_2 z_1^{(n)}}{y_1 z_2^{(n)} - y_2 z_1^{(n)}} \quad \text{et} \quad \frac{z'_1 y_2^{(n)} - z'_2 y_1^{(n)}}{y_1 y_2^{(n)} - y_2 y_1^{(n)}}.$$

Pour étudier la convergence de ces fractions continues on n'aura qu'à former de (15) les équations différentielles de 2ième ordre que satisfont y et z et à y déterminer les points singuliers ainsi que les racines des équations déterminantes correspondantes. On verra que, si

$$\lim \frac{z_1^{(n)}}{z_2^{(n)}} = \lim \frac{y_1^{(n)}}{y_2^{(n)}} = c$$

(17) tendra vers $\frac{y_1 - cy_2}{z_1 - cz_2}$ et (17 bis) vers $\frac{z'_1 - cz'_2}{y_1 - cy_2}$; en combinant ceux-ci on détermine facilement une solution particulière de (15). Si, au contraire, $\frac{z_1^{(n)}}{z_2^{(n)}}$ et $\frac{y_1^{(n)}}{y_2^{(n)}}$ tendent vers deux limites différentes les fractions continues oscilleront, cependant elles n'en gardent pas moins le sens, car, en ce cas, elles nous conduiront même au système complet d'intégrales.

Équations aux différences finies.

§ 17. Considérons l'équation linéaire homogène de 2ième ordre

$$U(n+2) + P(n)U(n+1) + Q(n)U(n) = 0. \tag{18}$$

Pour intégrer celle-ci par des fractions continues je pose dans (5)

$$v_{n+1} = \frac{U_1(r+n)}{U_2(r+n)}$$

où $U_1(n)$ et $U_2(n)$ désignent deux intégrales linéairement indépendantes de (18). On trouve alors l'identité

$$\frac{U_1(r+1)U_2(r+n) - U_2(r+1)U_1(r+n)}{U_1(r)U_2(r+n) - U_2(r)U_1(r+n)} = -\frac{Q(r)}{P(r) - \dfrac{Q(r+1)}{P(r+1) - \cdots - \dfrac{Q(r+n-2)}{P(r+n-2)}}}. \tag{19}$$

En posant, au contraire

$$v_{n+1} = \frac{U_3(r-n)}{U_4(r-n)}$$

où $U_3(n)$ et $U_4(n)$ désignent deux intégrales linéairement indépendantes de (18) mais généralement différentes de $U_1(n)$ et $U_2(n)$, on aura

$$\frac{U_3(r)\,U_4(r-n)-U_4(r)\,U_3(r-n)}{U_3(r+1)\,U_4(r-n)-U_4(r+1)\,U_3(r-n)}$$

$$=\cfrac{1}{P(r-1)-\cfrac{Q(r-1)}{P(r-2)-\cfrac{Q(r-2)}{\ddots\;-\cfrac{Q(r-n+1)}{P(r-n)}}}}. \tag{20}$$

Supposons maintenant que les coefficients de (18) soient des fonctions rationnelles de n, mais des fonctions arbitraires d'un paramètre x. On pourra toujours donner à l'équation aux différences une telle forme que les coefficients soient des polynômes en n. Nous choisissons maintenant les intégrales particulières $U_1(n)$ et $U_2(n)$ ($U_3(n)$ et $U_4(n)$) de telle façon que, pour des valeurs positives (négatives) très grandes, elles se comportent respectivement comme (voir § 11)

$$c_1\,\Gamma^{\mu_1}(n)\,a_1^n\,n^{-\beta_1-1} \text{ et } c_2\,\Gamma^{\mu_2}(n)\,a_2^n\,n^{-\beta_2-1} \tag{21}$$

μ_1 et μ_2 sont ici deux nombres qui se déterminent par les degrés des polynômes, tandis que a_1, a_2, β_1 et β_2 sont des fonctions de x, qui se déterminent facilement par les coefficients de (18). Si maintenant $\mu_1 > \mu_2$, alors

$$\lim_{n=+\infty}\frac{U_2(n)}{U_1(n)}=0 \qquad \lim_{n=-\infty}\frac{U_3(n)}{U_4(n)}=0. \tag{22}$$

Donc, en faisant tendre n vers l'infini dans les fractions continues (19) et (20), (19) tendra vers $\dfrac{U_2(r+1)}{U_2(r)}$ et (20) vers $\dfrac{U_3(r)}{U_3(r+1)}$. Si, au contraire, $\mu_1=\mu_2$, alors

$$\frac{U_1(n)}{U_2(n)}\sim\frac{c_1}{c_2}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n n^{\beta_2-\beta_1} \tag{23}$$

en ce cas, (19) tendra vers

$$\frac{U_1(r+1)}{U_1(r)} \text{ ou vers } \frac{U_2(r+1)}{U_2(r)}$$

selon que $\left|\dfrac{a_1}{a_2}\right|$ sera plus petit ou plus grand que 1. Mais a_1 et a_2 étant des fonctions de x, ce module sera tantôt plus grand, tantôt plus petit que 1. Donc, si l'on considère la fraction continue (19) comme une fonction de la variable x, celle-ci convergera généralement dans tout le plan, mais tantôt vers $\dfrac{U_1(r+1)}{U_1(r)}$,

tantôt vers $\frac{U_2(r+1)}{U_2(r)}$. Les courbes sur lesquelles saute la valeur, se déterminent par l'équation $\left|\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}\right| = 1$. Quant à (20) on voit qu'elle se comporte exactement de même, de telle façon que, dans les domaines où (19) tend vers

$$\frac{U_1(r+1)}{U_1(r)}$$

(20) tend vers

$$\frac{U_4(r)}{U_4(r+1)}$$

et vice versa. (19) et (20) nous conduisent donc à l'intégrale complète de l'équation aux différences dans tout le plan, à l'exception des courbes critiques déterminées par l'équation $|a_1| = |a_2|$. Sur ces courbes mêmes (19) tend vers $\frac{U_1(r+1)}{U_1(r)}$ ou vers $\frac{U_2(r+1)}{U_2(r)}$ selon que $\Re(\beta_2 - \beta_1)$ sera négatif ou positif. Si à la fois $|a_1| = |a_2|$ et $\Re(\beta_1) = \Re(\beta_2)$ sans que $a_1 = a_2$, $\Re(\beta_1) = \Re(\beta_2)$, l'une et l'autre des fractions continues divergeront. Nous avons donc démontré le théorème suivant:

Les fractions continues (19) *et* (20) *sont convergentes dans tout le plan excepté possiblement sur certaines courbes critiques, et elles conduisent ensemble à l'intégrale complète de l'équation aux différences finies. Si* $\mu_1 \gtrless \mu_2$, *les fractions continues tendront, dans tout le plan, chacune vers sa fonction analytique. Si, au contraire,* $\mu_1 = \mu_2$, *les valeurs des fractions continues sautent sur certaines courbes critiques, déterminées par l'équation* $|a_1| = |a_2|$. *Dans un domaine limité par une de ces courbes, les fractions continues sont convergentes, et elles tendent vers des fonctions qui ne sont pas des valeurs réciproques l'une de l'autre. Sur les courbes critiques mêmes, les fractions continues convergent si* $\Re(\beta_1) \gtrless \Re(\beta_2)$, *au cas contraire elles divergent au moins qu'on ait à la fois* $a_1 = a_2$, $\beta_1 = \beta_2$.

Il arrive que $|a_1| = |a_2|$ dans une certaine partie du plan, éventuellement dans tout le plan, si, par exemple, $\left|\frac{a_1}{a_2}\right|$ est indépendant de x. Dans un tel domaine du plan les courbes critiques de (19) et (20) se déterminent par l'équation $\Re(\beta_1 - \beta_2) = 0$. Il arrive encore par exception que dans ce domaine $U_1(n) = U_3(n)$ est une constante. Nous ne trouverons alors, de l'équation aux différences, qu'une intégrale particulière. Quant aux autres cas d'exception qui peuvent arriver il suffit de renvoyer à § 9.

§ **18.** Nous avons dérivé la fraction continue (19) en partant d'une certaine équation aux différences finies de 2ième ordre, mais on voit inversement que toute fraction continue est de cette forme. Pourvu que les numérateurs et les dénominateurs partiels d'une fraction continue donnée satisfassent aux conditions susnommées, nous pourrons toujours en étudier la convergence. Il arrive, cependant, souvent que les coefficients d'une telle fraction continue suivent une loi alternante. Pour examiner ce cas il faut considérer un système d'équations linéaires, et, en conséquence immédiate de ce qui précède, nous serons conduits à des règles de convergence qui, en pratique, seront généralement satisfaisantes.

§ **19.** Considérons donc le système:

$$\begin{aligned} U(n+1) + P(n)\,V(n+1) + Q(n)\,U(n) &= 0 \\ V(n+1) + S(n)\,U(n) + T(n)\,V(n) &= 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Pour intégrer ces équations par des fractions continues on substitue en (5)

$$x_{2n+2} \quad \frac{U_1(n+r)}{U_2(n+r)} \qquad x_{2n+1} = \frac{V_1(n+r)}{V_2(n+r)}.$$

On trouvera alors facilement

$$\begin{array}{l} -\dfrac{T(r)}{S(r) - \dfrac{Q(r)}{P(r) - \dfrac{T(r+1)}{S(r+1) - \dfrac{Q(r+1)}{P(r+1)\cdot}}}} \end{array} \tag{26}$$

La $(2n+4)^{\text{ième}}$ réduite de la fraction continue égale

$$\frac{U_1(r)\,V_2(n+r) - U_2(r)\,V_1(n+r)}{V_1(r)\,V_2(n+r) - V_2(r)\,V_1(n+r)} \tag{27}$$

tandis que la réduite suivante est

$$\frac{U_1(r)\,U_2(r+n) - U_2(r)\,U_1(r+n)}{V_1(r)\,U_2(r+n) - V_2(r)\,U_1(r+n)}. \tag{28}$$

On trouvera de même en posant

$$x_{2n} = \frac{V_1(n+r)}{V_2(n+r)} \qquad x_{2n+1} = \frac{U_1(n+r)}{U_2(n+r)}$$

la fraction continue

$$\begin{matrix} Q(r) & & \\ P(r) & T(r-1) & \\ & S(r-1) & Q(r+1) \\ & & P(r-1) \end{matrix} \qquad (29),$$

avec les réduites

$$\begin{matrix} V_1(r-1)V_2(r-n) & V_2(r-1)V_1(r-n) \\ U_1(r)V_2(r+n) & U_2(r)V_1(r+n) \end{matrix} \text{ et}$$

$$\frac{V_1(r+1)U_2(r+n) - V_2(r+1)U_1(r+n)}{U_1(r)U_2(r+n) - U_2(r)U_1(r+n)}. \qquad (30)$$

Il sera maintenant facile d'examiner la convergence de (26) et de (29) en formant de (25) les équations aux différences finies de 2ième ordre en $U(n)$ et en $V(n)$ et en déterminant

$$\lim \frac{U_1(n)}{U_2(n)} \quad \text{et} \quad \lim \frac{V_1(n)}{V_2(n)}.$$

Si, dans un certain domaine, ces quantités tendent toutes deux vers, par exemple, zéro, (26) et (29) tendront dans ce même domaine vers

$$\frac{U_1(r)}{V_1(r)} \text{ et vers } \frac{V_1(r+1)}{U_1(r)} \text{ respectivement},$$

d'où il est facile de dériver $U_1(r)$ et $V_1(r)$. Si, au contraire, dans un certain domaine

$$\lim \frac{U_1(n)}{U_2(n)} = c_1 \qquad \lim \frac{V_1(n)}{V_2(n)} = c_2$$

(26) et (29) oscilleront dans ce domaine. Mais, en ce cas, nous pourrons décomposer en deux chacune de ces fractions continues. Considérons par exemple (26); en supprimant ici toutes les réduites d'ordre pair la fraction continue tendra vers

$$\begin{matrix} U_1(r) & -c_2 U_2(r) \\ V_1(r) & c_2 V_2(r) \end{matrix}$$

en supprimant, au contraire, les réduites d'ordre impair la fraction continue tendra vers

$$\begin{matrix} U_1(r) & c_1 U_2(r) \\ V_1(r) & c_1 V_2(r) \end{matrix}.$$

On voit donc que, en ce cas, (26) et (29) nous conduisent à l'intégrale complète du système (25). Si, au contraire, (26) et (29) sont convergentes, il faudra encore, pour trouver l'intégrale complète, se servir des fractions continues

$$\cfrac{1}{P(r-1)-\cfrac{Q(r-1)}{S(r-1)-\cfrac{T(r-1)}{P(r-2)-\cfrac{Q(r-2)}{S(r-2)-\cdots}}}} \tag{31}$$

avec les réduites

$$\frac{V_1(r)\,U_2(r-n)-V_2(r)\,U_1(r-n)}{U_1(r)\,U_2(r-n)-U_2(r)\,U_1(r-n)} \text{ et } \frac{V_1(r)\,V_2(r-n)-V_2(r)\,V_1(r-n)}{U_1(r)\,V_2(r-n)-U_2(r)\,V_1(r-n)} \tag{32}$$

et

$$\cfrac{1}{S(r)-\cfrac{T(r)}{P(r-1)-\cfrac{Q(r-1)}{S(r-1)-\cfrac{T(r-1)}{P(r-2)-\cdots}}}} \tag{33}$$

avec les réduites

$$\frac{U_1(r)\,U_2(r-n)}{V_1(r+1)\,U_2(r-n)-V_2(r+1)\,U_1(r-n)} \text{ et}$$

$$\frac{U_1(r)\,V_2(r-n)-U_2(r)\,V_1(r-n)}{V_1(r+1)\,V_2(r-n)-V_2(r+1)\,V_1(r-n)}. \tag{34}$$

De même que plus haut on voit facilement que ces quatres fractions continues donnent ensemble l'intégrale complète de notre système d'équations aux différences finies.

§ **20.** Nous avons vu que les séries de factorielles normales divergeront généralement; il est donc d'importance d'observer que, pour des cas très étendus, ces fractions continues conservent leur sens; un autre avantage qu'on trouve aux méthodes d'intégration étudiées ici, c'est qu'elles intègrent aussitôt les équations complétement dans tout le plan, et que non seulement elles donnent une représentation formellement valable des intégrales, mais qu'à cause de la rapidité de la convergence, elles seront souvent bien utiles pour des déterminations numériques. Mais, d'autre part, la forme de fonction peu souple des fractions continues en empêche l'application à la plupart des recherches plus étendues. L'approfondissement ultérieur de la théorie des différences réciproques y remédiera peut-être. Mais avant de passer à l'étude de ces fonctions intéressantes nous appliquerons encore ce qui précède à quelques exemples particuliers.

CHAPITRE III.

Étude de l'équation de Gauss.

§ 21. En différentiant n fois l'équation

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0 \tag{1}$$

on trouve

$$x(1-x)y^{(n+2)}+\{(1-2x)n+\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}y^{(n+1)}-(\alpha+n)(\beta+n)y^{(n)}=0 \tag{2}$$

en l'intégrant n fois, au contraire, on trouve

$$x(1-x)y^{(2-n)}+\{(2x-1)n+\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}y^{(1-n)}-(\alpha-n)(\beta-n)y^{(-n)}=0. \tag{3}$$

Soit y_1 et y_2 deux intégrales particulières de (1) linéairement independantes, on trouve au moyen de (10) et de (12) Chap. II, les fractions continues

$$K_1=\frac{y'_1y_2^{(n+1)}-y'_2y_1^{(n+1)}}{y_1y_2^{(n+1)}-y_2y_1^{(n+1)}}$$

$$=\cfrac{\alpha\beta}{\gamma-(\alpha+\beta+1)x+\cfrac{(\alpha+1)(\beta+1)x(1-x)}{\gamma+1-(\alpha+\beta+3)x+\cfrac{(\alpha+2)(\beta+2)x(1-x)}{\ddots\,\cfrac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)x(1-x)}{\gamma+n-1-(\alpha+\beta+2n-1)x}}}}. \tag{4}$$

$$K_2=\frac{y_1y_2^{(-n)}-y_2y_1^{(-n)}}{y'_1y_2^{(-n)}-y'_2y_1^{(-n)}}=$$

$$=\cfrac{x(x-1)}{\gamma-1-(\alpha+\beta-1)x+\cfrac{(\alpha-1)(\beta-1)x(1-x)}{\gamma-2-(\alpha+\beta-3)x+\cfrac{(\alpha-2)(\beta-2)x(1-x)}{\ddots\,\cfrac{(\alpha-n+1)(\beta-n+1)x(1-x)}{\gamma-n-(\alpha+\beta-2n+1)x}}}}. \tag{5}$$

Les points singuliers de l'équation différentielle (1) sont 0, 1 et ∞ qui sont tous réguliers. En faisant tendre n vers l'infini dans K_1 et K_2 ils nous conduisent tous ensemble à l'intégrale complète dans tout le plan. La ligne critique est une droite perpendiculaire sur l'axe des nombres réels traversant le point $+\frac{1}{2}$.

Il est facile d'ailleurs d'exprimer par des séries hypergéométriques les valeurs des fractions continues. Aux environs des points singuliers 0 et 1 l'équation (1) comporte les intégrales suivantes

$$y_1 = x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x)$$
$$y_2 = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$
$$y_3 = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - x)$$
$$y_4 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - x).$$

Considérons d'abord l'aire commune aux deux cercles décrits des points 0 et 1 respectivement comme centres avec un rayon égal à l'unité.

En appliquant les règles exposées dans le chapitre précedent on voit tout de suite que:

$$\text{Pour } \Re(x) < \tfrac{1}{2} \quad K_1 \text{ tend vers } \frac{y'_2}{y_2} \text{ et } K_2 \text{ tend vers } \frac{y_1}{y'_1}$$

$$\text{et pour } \Re(x) > \tfrac{1}{2} \quad K_1 \text{ tend vers } \frac{y'_3}{y_3} \text{ et } K_2 \text{ tend vers } \frac{y_4}{y'_4}.$$

Il reste d'étudier les valeurs des fractions continues pour $\Re(x) = \frac{1}{2}$. Pour des valeurs positives très grandes de n on trouve

$$\frac{y_2^{(n)}}{y_1^{(n)}} \sim \left(\frac{x}{x-1}\right)^n n^{\alpha+\beta+1} 2^{\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} x^{\gamma-1} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}. \tag{6}$$

Pour des valeurs très grandes négatives de n on trouve pour $\frac{y_4^{(n)}}{y_1^{(n)}}$, à une constante près, cette même valeur asymptotique. Cela posé on voit que trois cas différents se présentent:

$$\Re(\gamma) > \Re\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right) \quad K_1 \text{ tend vers } \frac{y'_2}{y_2} \text{ et } K_2 \text{ tend vers } \frac{y_1}{y'_1}$$

$$\Re(\gamma) < \Re\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right) \quad K_1 \text{ tend vers } \frac{y'_3}{y_3} \text{ et } K_2 \text{ tend vers } \frac{y_4}{y'_4}$$

$$\Re(\gamma) = \Re\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right) \text{ toutes les deux fractions continues divergent.}$$

Les séries $y_1, \ldots y_4$ si bien que leurs derivées ne sont convergentes que aux environs des points singuliers 0 et 1. Or il est facile d'en déduire d'autres qui représentent les valeurs des fractions continues dans toute leur domaine de convergence. Il suffit d'appliquer à celles-ci la transformation d'Euler bien connue

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$$

les séries ainsi transformées convergent dans l'un ou l'autre des deux demi-plans limités de la droite $\Re(x) = \frac{1}{2}$.

A cette même droite, au contraire, les séries ne convergent pas toujours, car le module de la 4ième paramètre de la série hypergéométrique est ici 1. La condition de convergence est d'après un criterium assez connu de Weierstrass $\Re(\alpha-\beta) < 1$. Or les séries étant symetriques en α et β, on voit qu'on peut en effet dans tous les cas représenter les valeurs des fractions continues dans toute leur domaine de convergence par les transformés de y_1, y_2, y_3 et y_4. Il y a seulement exception si $\Re(x) = \frac{1}{2}$ et $\Re(\alpha-\beta) = 1$. Dans ce cas toutes les 8 séries transformées divergeront. Nous pouvons alors nous servir de y_1 et y_3, si $|x| < 1$; au contraire, si $|x| > 1$, il faut se servir de séries procédant suivant les puissances entières et décroissantes de x.

Etudions maintenant les différents cas d'exception se présentant lorsque α, γ ou $\gamma-\alpha-\beta$ sont des nombres entiers, ou lorsqu'un ou plusieurs des paramètres croissent vers l'infini.

1) Si α (ou β) est un nombre entier négatif, $y_2 = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ sera un polynôme entier en x du $-\alpha^{\text{ième}}$ degré. La dérivée du $(1-\alpha)^{\text{ième}}$ ordre de y_2 sera par conséquent identiquement zéro. K_1 tendra alors pour toutes les valeurs de x vers

$$\frac{\alpha, \beta}{\gamma} \cdot \frac{F(\alpha-1, \beta-1, \gamma-1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}.$$

2) Si γ est un nombre entier positif, et que ni α ni β ne soient aucun des nombres $1, 2, 3, \ldots \gamma-1$, on aura aux environs de zéro au lieu de y_1 et y_2 les deux intégrales particulières[1]

$$y_1 = F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) + F(\alpha, \beta, \gamma, x) \log x$$
$$y_2 = F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

$F_1(\alpha, \beta, \gamma, x)$ est ici une fonction ayant une certaine ressemblance avec $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. Nous savons que la fraction continue tend vers l'intégrale non-logarithmique

[1] Frobenius: Ueber die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen (Crelles Journal, Vol. 76, p. 214 f.

(Chap. II, § 14), on verra donc que, pour $\Re(x) < \frac{1}{2}$, K_1 tend vers $\frac{y'_2}{y_2}$, quand même γ est un nombre entier positif.

3) Si γ est nul ou un nombre entier négatif, et que ni α ni β ne soient aucun des nombres $0, -1, -2, \ldots \gamma$, on aura aux environs de zéro les deux intégrales particulières

$$x^{1-\gamma} F_1(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x) - x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x) \log x$$

$$x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x).$$

Comme K_1 tendra encore vers l'intégrale non logarithmique, on voit que, pour $\Re(x) < \frac{1}{2}$, K_1 tendra vers $\frac{y'_1}{y_1}$, tandis que, pour toute autre valeur des paramètres, elle tendra vers $\frac{y'_2}{y_2}$.

4) Si $\alpha + \beta - \gamma$ est nul ou un nombre entier positif et que ni α ni β ne soient aucun des nombres $1, 2, 3, \ldots \alpha + \beta - \gamma$, on aura aux environs du point 1, au lieu de y_3 et de y_4 les deux intégrales particulières:

$$F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - x)$$

$$F_1(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - x) + F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - x) \log (1 - x)$$

pour $\Re(x) < \frac{1}{2}$, K_1 tend donc vers $\frac{y'_3}{y_3}$ comme au cas général.

5) Si, au contraire, $\alpha + \beta - \gamma$ est un nombre entier négatif, et que ni α ni β ne soient aucun des nombres $0, -1, -2, \ldots \alpha + \beta - \gamma + 1$, nous aurons au lieu de y_3 et de y_4

$$(1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - x)$$

$$(1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F_1(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - x) +$$

$$+ (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - x) \log (1 - x).$$

Dans ce cas d'exeption K_1 tendra donc, pour $\Re(x) > \frac{1}{2}$ vers $\frac{y'_4}{y_4}$.

6) Passons à l'étude des cas où un ou plusieurs des paramètres tendent vers l'infini, ce qui a lieu pour plusieurs des fonctions les plus appliquées dans l'analyse. Mettons dans l'équation différentielle de Gauss (1) k au lieu de α et $\frac{x}{k}$ au lieu de x et faisons tendre k vers ∞, nous aurons alors l'équation différentielle

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(\gamma-x)\frac{dy}{dx}-\beta y=0 \tag{18}$$

avec les deux intégrales particulières

$$y_1=x^{1-\gamma}F\left(k,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ \frac{x}{k}\right)$$

$$y_2=F\left(k,\ \beta,\ \gamma,\ \frac{x}{k}\right)$$

où ici, et dans la suite, k désigne un nombre infiniment grand. Ces séries sont convergentes dans tout le plan, l'équation différentielle n'ayant que les deux points singuliers 0 et ∞. Donc, il est évident que, dans tout le plan, la fraction continue tend vers la même fonction analytique, car en différentiant y_1 et y_2 n fois on trouve

$$y_1^{(n)}=x^{1-\gamma-n}(-1)^n\frac{\Gamma(\gamma+n-1)}{\Gamma(\gamma-1)}F\left(k,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma-n,\ \frac{x}{k}\right)$$

$$y_2^{(n)}=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)}F\left(k,\ \beta+n,\ \gamma+n,\ \frac{x}{k}\right)$$

$y_1^{(n)}$ et $y_2^{(n)}$ se comportent donc asymptotiquement comme

$$\frac{x^{1-\gamma}}{\Gamma(\gamma-1)}\Gamma(\gamma+n-1)(-x)^{-n}\quad\text{et}\quad\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)}e^x n^{\beta-\gamma}.$$

Donc

$$\frac{y_2^{(n)}}{y_1^{(n)}}\sim\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\beta)}e^x x^{\gamma-1}\frac{(-x)^n n^{\beta-\gamma}}{\Gamma(\gamma+n-1)}$$

mais cette limite est *nulle pour toutes les valeurs de* x.

On trouve la fraction continue

$$\frac{\beta x}{\gamma}\frac{F\left(k,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ \frac{x}{k}\right)}{F\left(k,\ \beta,\ \gamma,\ \frac{x}{k}\right)}=\frac{\beta x}{\gamma-x+\dfrac{(\beta+1)x}{\gamma+1-x+\dfrac{(\beta+2)x}{\gamma+2-x+\dots}}} \tag{19}$$

qui tend vers le premier membre pour toutes les valeurs complexes de x, β et γ. Ce n'est que lorsque γ égale zéro ou un nombre entier négatif sans que β soit un des nombres 0, -1, -2, ... γ qu'il y a exception; car, en ce cas, les séries

du premier membre n'ont pas de sens. De même que plus haut on voit facilement que, dans ce cas, la fraction continue tend vers

$$\frac{1-\gamma}{1}\cdot\frac{F\left(k,\beta+1-\gamma,1-\gamma,\frac{x}{k}\right)}{F\left(k,\beta+1-\gamma,2-\gamma,\frac{x}{k}\right)}. \tag{20}$$

Si β aussi tend vers ∞, rien n'est changé. Si, au contraire, α et β restent finis, tandis que γ croît au-delà de toutes limites, on aura, au lieu de (1), l'équation différentielle

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+\{(\alpha+\beta+1)x-1\}\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y=0. \tag{21}$$

Les points singuliers sont ici 0 et ∞, mais 0 est un point singulier irrégulier. Nous posons donc

$$x=\frac{1}{z},\quad y=z^{\alpha}\,.\,u$$

et trouvons

$$z\frac{d^2u}{dz^2}+(z+1+\alpha-\beta)\frac{du}{dz}+\alpha u=0 \tag{22}$$

mais cette équation différentielle est de la même forme que (18).

Système d'équations hypergéometriques aux différences finies.

§ **22.** On peut donner une forme plus élégante aux fractions continues (4) et (5) en intercalant entre toutes les deux réduites une réduite nouvelle. Les fractions continues ainsi obtenues se laissent cependant dériver directement en partant du système d'équations aux différences suivants

$$\begin{gathered} xU(n+1)+x(\beta-\gamma)V(n+1)+(\beta+n)U(n)=0 \\ (x-1)V(n+1)-\frac{1}{x}U(n)+(\alpha+n)V(n)=0. \end{gathered} \tag{23}$$

D'après les formules (26) et (29) Chap. II on en trouve

$$K_3=\cfrac{\alpha x}{1-\cfrac{\beta(x-1)}{\gamma-\beta-\cfrac{(\alpha+1)x}{1-\cfrac{(\beta+1)(x-1)}{\gamma-\beta-\cfrac{(\alpha+2)x}{1-\cfrac{(\beta+2)(x-1)}{\gamma-\beta}}}}}} \tag{24}$$

$$K_1 \quad \frac{1}{x(x-1)} \cdot \frac{\beta(x-1)}{\gamma} \quad \frac{(\alpha-1)x}{\beta} \quad 1 - \frac{(\beta-1)(x-1)}{\gamma-\beta} \qquad (25)$$

D'autre part, il est facile d'intégrer (23) par des séries hypergéométriques, car en éliminant entre ces équations V et U respectivement on trouve

$$x(1-x)U(n+2)+\{n(1-2x)+\gamma+1-(\alpha+\beta+2)x\}U(n+1)-(\alpha+n+1)(\beta+n)U(n)=0 \qquad (26)$$

$$x(1-x)V(n+2)+\{n(1-2x)+\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}V(n+1)-(\alpha+n)(\beta+n)V(n)=0.$$

Mais ces équations s'obtiennent aussi en différentiant n fois les 2 équations différentielles hypergéométriques

$$\begin{aligned} x(1-x)\frac{d^2z}{dx^2}+\{\gamma+1-(\alpha+\beta+2)x\}\frac{dz}{dx}-(\alpha+1)\beta z=0 \\ x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0 \end{aligned} \qquad (27)$$

et en posant

$$U(n)=\frac{d^n z}{dx^n}, \qquad V(n)=\frac{d^n y}{dx^n}$$

alors le système suivant d'intégrales satisfait à (23)

$$U_1(n)=c_1\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n+1)}F(\alpha+n+1,\beta+n,\gamma+n+1,x)$$

$$V_1(n)=c_1 x^{(\frac{1}{\gamma}-\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)}F(\alpha+n,\beta+n,\gamma+n,x)$$

$$U_2(n)=c_2 x^{(-1)^n}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+n+1)}F(\alpha+n+1,\beta+n,\alpha+\beta-\gamma+n+1,1-x)$$

$$V_2(n)=c_2(-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+n+1)}F(\alpha+n,\beta+n,\alpha+\beta-\gamma+n+1,1-x).$$

Les valeurs de (24) et de (25) dépendent donc de la même valeur asymptotique que (4) et (5). Il faut noter spécialement que pour $\Re(x)<\frac{1}{2}$ on a

$$K_1 = \frac{\alpha(\gamma-\alpha-\beta)x}{\gamma-1}\cdot\frac{F(\alpha+1,\beta,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)} = \frac{\alpha(\gamma-\alpha-\beta)}{\gamma-1}\cdot\frac{x}{1}\cdot\frac{F\left(\gamma-\alpha,\beta,\gamma+1,\frac{x}{x-1}\right)}{F\left(\gamma-\alpha,\beta,\gamma,\frac{x}{x-1}\right)} \quad (28)$$

$$K_1 = \frac{\beta}{x(\gamma-\beta)}\cdot\frac{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha+1,\beta,\gamma+1,x)}$$

$$\frac{\beta}{\gamma-\beta}\cdot\frac{1}{x(1-x)}\cdot\frac{F\left(\gamma-\alpha,\beta+1,\gamma+1,\frac{x}{x-1}\right)}{F\left(\gamma-\alpha,\beta,\gamma+1,\frac{x}{x-1}\right)}. \quad (29)$$

Pour $\Re(x) > \frac{1}{2}$ on a, au contraire,

$$K_2 = \alpha x\frac{F(\alpha+1,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-x)}{F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-x)} = \alpha x\frac{F\left(\beta-\gamma,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,\frac{x-1}{x}\right)}{F\left(1+\beta-\gamma,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,\frac{x-1}{x}\right)} \quad (30)$$

$$K_1 = \frac{\beta}{(\gamma-\alpha-\beta-1)x}\frac{F(\alpha+1,\beta+1,\alpha+\beta-\gamma+2,1-x)}{F(\alpha+1,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-x)}$$

$$\frac{\beta}{\gamma-\alpha-\beta-1}\frac{F\left(\beta-\gamma+1,\beta+1,\alpha+\beta-\gamma+2,1-\frac{1}{x}\right)}{F\left(\beta-\gamma,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-\frac{1}{x}\right)} \quad (31)$$

Système d'équations différentielles hypergéométriques.

§ 23. Nous avons vu qu'on peut intégrer, par des fractions continues, encore des systèmes d'équations différentielles; traitons à titre d'exemple

$$\begin{aligned}(\gamma-\alpha-\beta)x\frac{dy}{dx} + (\gamma-\alpha)(1-x)\frac{dz}{dx} - \alpha\beta y &= 0\\ (1-x)\frac{dz}{dx} + (\gamma-\alpha-\beta)z + (\beta-\gamma)y &= 0.\end{aligned} \quad (32)$$

On voit facilement que tant z que y satisfont aux équations différentielles de 2ième ordre de la forme (1). On trouve alors le système d'intégrales suivant

$$z_1 = c_1 F(\alpha, \beta, \gamma, x) \qquad y_1 = c_1 \frac{\alpha}{\gamma} F(\alpha, \beta, \gamma + 1, x)$$

$$z_2 = c_2 x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x) \quad y_2 = c_2 F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x). \tag{33}$$

Ceci se laisse d'ailleurs facilement vérifier; car en substituant (33) dans (32) on est conduit à des relations bien connues de Gauss entre des fonctions contiguës. En différentiant (32) n fois on trouve

$$(\alpha+\beta-\gamma+n)x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + (\alpha-\gamma)(1-x)\frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}} + (n+\alpha)(n+\beta)\frac{d^n y}{dx^n} = 0$$

$$(1-x)\frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}} - (\alpha+\beta-\gamma+n)\frac{d^n z}{dx^n} + (\beta-\gamma)\frac{d^n y}{dx^n} = 0.$$

On trouve alors par (17) la fraction continue

$$\cfrac{\alpha+\beta-\gamma}{\gamma-\beta-\cfrac{\alpha\beta}{\gamma-\alpha-\cfrac{(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\beta-\gamma+1)x_1}{\gamma-\beta-\cfrac{(\alpha+1)(\beta+1)}{\gamma-\alpha-\cfrac{(\alpha+\beta-\gamma+1)(\alpha+\beta-\gamma+2)x_1}{\gamma-\beta-\cdots}}}}} \tag{34}$$

où $x_1 = \dfrac{x}{x-1}$.

La convergence dépend ici de la même valeur asymptotique que nous avons étudiée plus haut (§ 21). En considérant cette fraction continue comme fonction de x_1 on voit facilement que, dans un cercle de rayon 1 ayant pour centre l'origine, elle tend vers:

$$\gamma - 1 + \frac{\gamma}{\beta}\frac{F(\alpha, \gamma-\beta+1, \gamma+1, x_1)}{F(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x_1)} \tag{35}$$

mais hors de ce cercle vers:

$$\alpha+\beta-\gamma + \frac{\gamma}{\beta}\frac{F\left(\alpha, \alpha-\gamma, \alpha+\beta-\gamma, \frac{1}{x_1}\right)}{F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1, \frac{1}{x_1}\right)}. \tag{36}$$

La fraction continue de Gauss.

§ 24. Dans son mémoire classique sur la fonction hypergéométrique[1] Gauss a représenté le rapport entre deux séries hypergéométriques contiguës par une fraction continue. Mais Gauss se borne à déduire formellement la fraction continue sans entrer dans les questions de convergence. Riemann, Thomé, van Vleck et d'autres encore ont, plus tard, traité cette question. Riemann[2] n'a pu achever sa démonstration qui n'a paru qu'après sa mort et dans une rédaction due à M. Schwartz. Riemann y démontre que la fraction continue est convergente pour toutes valeurs de x, excepté pour des valeurs réelles positives non inférieures à 1, et qu'elle tend, en effet, vers la fonction indiquée par Gauss. Mais Riemann suppose que tous les paramètres soient finis; nous allons encore étudier le cas où α ou β tend vers ∞, et nous verrons que, dans ce cas, la fraction continue converge dans tout le plan. Nous partons du système d'équations aux différences finies:

$$\begin{aligned} U(n) - V(n) + \frac{(\alpha+n)(\gamma-\beta+n)}{(\gamma+2n)(\gamma+2n+1)}\,x\,U(n+1) &= 0 \\ V(n) - U(n+1) + \frac{(\beta+n+1)(\gamma-\alpha+n+1)}{(\gamma+2n+1)(\gamma+2n+2)}\,x\,V(n+1) &= 0. \end{aligned} \tag{37}$$

d'où, par (26) Chap. II, on dérive la fraction continue de Gauss:

$$\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)} = \cfrac{\gamma}{\gamma - \cfrac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma+1 - \cfrac{(\beta+1)(\gamma-\alpha+1)x}{\gamma+2 - \cfrac{(\alpha+1)(\gamma-\beta+1)x}{\gamma+3 - \cfrac{(\beta+2)(\gamma-\alpha+2)x}{\gamma+4 - \cdots}}}}} \tag{38}$$

Pour examiner la convergence de cette fraction continue nous éliminons V entre les équations (37), et nous trouvons l'équation aux différences finies:

$$\frac{(\alpha+n+1)(\beta+n+1)(\gamma-\alpha+n+1)(\gamma-\beta+n+1)}{(\gamma+2n+1)(\gamma+2n+2)^2(\gamma+2n+3)}\,U(n+2) + \left\{\frac{(\beta+n+1)(\gamma-\alpha+n+1)}{(\gamma+2n+1)(\gamma+2n+2)}\,x + \frac{(\alpha+n)(\gamma-\beta+n)}{(\gamma+2n)(\gamma+2n+1)}\,x - 1\right\} U(n+1) + U(n) = 0. \tag{39}$$

[1] Gauss: Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \cdots$ Werke III, pag. 125.

[2] Riemann: Werke XXIII, pag. 424. Zweite Auflage, 1892.

En éliminant U, au contraire, on obtient une équation en $V(n)$ toute semblable. L'équation caractéristique de (39) est maintenant:

$$x^2z^2 + 8(x-2)z + 16 = 0 \tag{40}$$

ayant les racines

$$z = \left(\frac{2}{1 \mp \sqrt{1-x}}\right)^2;$$

les deux intégrales particulières $U_1(n)$ et $U_2(n)$ de (39) se comportent alors asymptotiquement respectivement comme

$$c_1 n^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{1-\sqrt{1-x}}\right)^{2n} \text{ et } c_2 n^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{2n}.$$

Si x est réel positif et non inférieur à 1, les deux racines de (40) ont le même module: la fraction continue est divergente. Mais pour toute autre valeur de x la fraction continue converge, car $|1+\sqrt{1-x}| > |1-\sqrt{1-x}|$, si par $\sqrt{1-x}$ nous désignons la valeur de la racine carrée de laquelle la partie réelle est positive. Si, au contraire, on pose, en (39), $\alpha = k$ et, si l'on met $\frac{x}{k}$ au lieu de x en faisant k tendre vers ∞, on aura l'équation:

$$x^2 \frac{(\beta+n+1)(\gamma-\beta+n+1)}{(\gamma+2n+1)(\gamma+2n+2)^2(\gamma+2n+3)} U(n+2) +$$

$$+ \left\{ \frac{\beta+n+1}{(\gamma+2n+1)(\gamma+2n+2)} x - \frac{\gamma-\beta+n}{(\gamma+2n)(\gamma+2n+1)} x + 1 \right\} U(n+1) - U(n) = 0. \tag{39 bis}$$

Désignons maintenant par β_1 et β_2 deux nombres indépendants de n, sans d'ailleurs les déterminer, il y aura alors deux intégrales particulières $U_1(n)$ et $U_2(n)$ de (39 bis) se comportant asymptotiquement comme

$$c_1 n^{-\beta_1-1} \text{ et } c_2 \Gamma^2(\gamma+2n+1) \left(\frac{2i}{x}\right)^{2n} n^{-\beta_2-1}.$$

On voit que *pour toutes les valeurs de* x

$$\lim \frac{U_1(n)}{U_2(n)} = 0.$$

La fraction continue

$$\frac{F\left(k,\beta+1,\gamma+1,\frac{x}{k}\right)}{F\left(k,\beta,\gamma,\frac{x}{k}\right)} = \cfrac{\gamma}{\gamma-\dfrac{(\gamma-\beta)x}{\gamma+1+\dfrac{(\beta+1)x}{\gamma+2-\dfrac{(\gamma-\beta+1)x}{\gamma+3+\dfrac{(\beta+2)x}{\gamma+4-\cdots}}}}} \tag{41}$$

est donc *convergente dans tout le plan de* x. Il en est ainsi lors même que β tendrait aussi vers ∞.

Les fonctions sphériques.

§ **25.** On sait que l'équation aux différences:

$$(n+2)\,U(n+2) - (2n+3)\,x\,U(n+1) + (n+1)\,U(n) = 0 \tag{42}$$

s'intègre complètement par les fonctions sphériques de la 1ière et de la 2ième espèce; on a

$$U_1(n) = P^{(n)}(x) \qquad U_2(n) = Q^{(n)}(x).$$

A l'aide de (19) et de (20), chap. II, on obtient alors les deux fractions continues

$$\frac{P^{(r)}(x)\,Q^{(r+n)}(x) - Q^{(r)}(x)\,P^{(r+n)}(x)}{P^{(r-1)}(x)\,Q^{(r+n)}(x) - Q^{(r-1)}(x)\,P^{(r+n)}(x)} =$$

$$\cfrac{r}{(2r+1)x - \cfrac{(r+1)^2}{(2r+3)x - \cfrac{(r+2)^2}{(2r+5)x - \cdots \cfrac{(r+n-1)^2}{(2r+2n-1)x}}}} \tag{43}$$

$$\frac{P^{(r-1)}(x)\,Q^{(r-n)}(x) - Q^{(r-1)}(x)\,P^{(r-n)}(x)}{P^{(r)}(x)\,Q^{(r-n)}(x) - Q^{(r)}(x)\,P^{(r-n)}(x)} =$$

$$= \cfrac{r}{(2r-1)x - \cfrac{(r-1)^2}{(2r-3)x - \cfrac{(r-2)^2}{(2r-5)x - \cdots \cfrac{(r-n+2)^2}{(2r-2n+3)x}}}} \tag{44}$$

Soit $\xi = x - \sqrt{x^2-1}$ où nous choisissons le signe de la racine carrée de sorte que $\sqrt{x^2-1}$ ait le même signe que la partie réelle de x; alors $|\xi| < 1$ pour

toutes valeurs complexes de x, et si x est réel et $|x|>1$; si, au contraire, x est réel et compris entre $+1$ et -1, alors $|\xi|=1$. $P^{(n)}(x)$ et $Q^{(n)}(x)$ peuvent se représenter par les séries hypergéométriques:

$$P^{(n)}(x)=\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}\xi^{-n}F\left(\frac{1}{2},\ -n,\ \frac{1}{2}-n,\ \xi^2\right)$$

$$Q^{(n)}(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\xi^{n+1}F\left(\frac{1}{2},\ n+1,\ n+\frac{3}{2},\ \xi^2\right). \quad (45)$$

En faisant tendre ici n vers ∞, on verra que, si $|\xi|<1$, $P^{(n)}(x)$ et $Q^{(n)}(x)$ se comportent asymptotiquement comme

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}}\xi^{-n}(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ et } \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{n}}\xi^{n+1}(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}},$$

en faisant tendre n vers l'infini dans (43) et (44), la première tendra vers:

$$\frac{Q^{(r)}(x)}{Q^{(r-1)}(x)}$$

la dernière vers

$$\frac{P^{(r-1)}(x)}{P^{(r)}(x)}$$

pour toutes les valeurs de x, excepté pour des valeurs réelles comprises entre $+1$ et -1. Pour ces dernières on a asymptotiquement[1]

$$Q^{(n)}(\cos\theta)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2n\sin\theta}}\cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$P^{(n)}(\cos\theta)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi n\sin\theta}}\sin\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right\}$$

en ce cas, les deux fractions continues sont donc divergentes.

Intégrons ensuite par fraction continue l'équation différentielle de Legendre:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0. \quad (46)$$

[1] Darboux: »Approximation des fonctions de grands nombres». Journal de Mathématiques sér. 3, tom. IV, 1878, pag. 21 s. s.

En différentiant r fois on trouve:

$$(1-x^2)\frac{d^{r+2}y}{dx^{r+2}} - 2x(r+1)\frac{d^{r+1}y}{dx^{r+1}} + (n-r)(n+r+1)\frac{d^r y}{dx^r} = 0$$

d'où l'on obtient, par (10), chap. II:

$$D_x \log P^{(n)}(x) = \cfrac{n(n+1)x^{-1}}{2\cdot 1 - \cfrac{(x^{-2}-1)(n-1)(n+2)}{2\cdot 2 - \cfrac{(x^{-2}-1)(n-2)(n+3)}{2\cdot 3 - \cfrac{(x^{-2}-1)(n-3)(n+4)}{2\cdot 4 - \ddots}}}} \qquad \Re(x) > 0 \tag{47}$$

qui est convergente dans tout le plan excepté sur l'axe des nombres imaginaires; les points singuliers sont $+1$ et -1, et l'équation déterminante pour ces deux points est $\varrho^2 = 0$. Aux environs du point $+1$ on trouve une intégrale particulière de la forme $y_1 = F\left(-n,\ 1+n,\ 1,\ \frac{1-x}{2}\right) = P^{(n)}(x)$ et une autre qui est logarithmique. Pour $\Re(x) > 0$ la fraction continue tend donc vers $\frac{D_x P^{(n)}(x)}{P^{(n)}(x)}$. Si x change de signe, il en est de même de la fraction continue; pour $\Re(x) < 0$ (47) tendra alors vers $\frac{D_x P^{(n)}(-x)}{P^{(n)}(-x)}$. Si n est un nombre entier, ces deux fonctions coïncident, car $P^{(n)}(-x) = (-1)^n P^{(n)}(x)$, mais, en ce cas, la fraction continue est finie.

§ **26.** *La fraction continue périodique.* En intégrant par fraction continue l'équation:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

on aura

$$x \pm \sqrt{x^2-1} = \cfrac{1}{2x - \cfrac{1}{2x - \cfrac{1}{2x - \ddots}}}$$

La $n^{\text{ième}}$ réduite est ici

$$\frac{T_n(x)}{N_n(x)} = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}}{(x+\sqrt{x^2-1})^n - (x-\sqrt{x^2-1})^n}.$$

En posant $x = \cos V$ on aura

$$\begin{array}{lll} T_n(x) & e^{i(n+1)V} - e^{-i(n+1)V} & \sin (n+1)V \\ N_n(x) & e^{inV} - e^{-inV} & \sin nV \end{array}$$

Si V est réel, e^{-inV} oscillera; la fraction continue est, par conséquent, divergente, si x est réel et situé entre $+1$ et -1. Si, au contraire, V est de la forme $V = V_1 + iV_2$, la fraction continue est convergente, et elle tend vers e^{iV} ou vers e^{-iV} suivant que V_2 est négatif ou positif. On trouve donc l'équation curieuse:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sin (n+1)V}{\sin nV} = \cos V \pm i \sin V$$

pourvu que V ne soit pas un nombre réel. Le numérateur de la $n^{\text{ième}}$ réduite

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2-1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sin (n+1)V}{\sin V}$$

est un polynôme entier de $n^{\text{ième}}$ degré en x ayant plusieurs propriétés interessantes. On voit ainsi que les zéros de $T_n(x)$ sont

$$x = \cos \frac{r\pi}{n+1} \qquad (r = 1, 2, \ldots n).$$

La fonction génératrice de $T_n(x)$ est:

$$\frac{1}{1 - 2x\alpha + \alpha^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} T_n(x)\alpha^n.$$

Remarquons encore que les réduites ont une sorte de théorème d'addition; car en posant:

$$F(n) = \frac{\sin (n+1)V}{\sin nV}$$

$F(n)$ satisfait à l'équation aux différences:

$$F(n+1) = 2x - \frac{1}{F(n)}.$$

De plus on a:

$$F(-n)F(n-1) = 1.$$

On trouvera alors facilement:

$$F(n+m) = \frac{F(n)F(m) - 1}{F(n) + F(m) - 2\cos V}$$

qui se réduit encore à:

$$F(n+m) = F(n-1)\,\frac{1 - F(n)F(m)}{1 - F(n-1)F(m)}$$

$$F(n-m) = F(n-1)\,\frac{F(m-1) - F(n)}{F(m-1) - F(n-1)}.$$

§ 27. Pour étudier la convergence de la fraction continue

$$\frac{1}{2}\frac{U(n+1)}{U(n)} = \cfrac{-\frac{n+1}{2x}}{1-\cfrac{\frac{n+2}{2x}}{1-\cfrac{\frac{n+3}{2x}}{1-\cfrac{\frac{n+4}{2x}}{1-\frac{n+5}{2x}}}}} \tag{48}$$

il faut considérer l'équation aux différences:

$$U(n+2) + 2x\,U(n+1) + 2(n+1)\,U(n) = 0$$

et y appliquer la substitution $U(n) = \Gamma(n)\,U^{(1)}(n)$ de sorte que l'équation sera:

$$\Gamma(n+1)\,U^{(1)}(n+2) + 2x\,\Gamma(n+1)\,U^{(1)}(n+1) + 2(n+1)\,U^{(1)}(n) = 0.$$

L'équation caractéristique est $z^2 + 2 = 0$; mais les coefficients ne sont pas des polynômes en n. Pour tourner cette difficulté nous supprimons dans (48) toutes les deux réduites, et nous aurons alors

$$\frac{1}{2}\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n)} \qquad \cfrac{-(n+1)(n+2)}{2x^2 - 2n - 5 - \cfrac{(n+3)(n+4)}{2x^2 - 2n - 9 - \cfrac{(n+5)(n+6)}{2x^2 - 2n - 13 - \cdots}}} \tag{49}$$

avec l'équation aux différences:

$$U(n+4) + 2(2n+5-2x^2)\,U(n+2) + 4(n+1)(n+2)\,U(n) = 0.$$

L'équation caractéristique est ici:

$$z^2 + 4z + 4 = 0$$

et les coefficients sont des polynômes.

CHAPITRE IV.

Différences réciproques.

Représentations par des déterminants.

§ 28. Abstraction faite des propriétés purement formelles, le caractère d'une fraction continue change complètement avec la manière dont la variable entre dans les numérateurs et les dénominateurs partiels. Il a été malheureux pour le développement de la théorie des fractions continues que, dans les recherches antérieures, on ait varié entre différents types, une forme canonique déterminée ayant fait défaut. Aussi est-ce un des résultats les plus intéressants des recherches de M. THIELE[1] que la démonstration de l'existence des types de fractions continues entièrement analogues à la formule de TAYLOR et à la formule générale d'interpolation de NEWTON. Pour démontrer cela M. THIELE introduit »les différences réciproques», fonctions qui jouent ici le même rôle que, dans le calcul des différences ordinaires, les différences divisées de NEWTON.

Soit $\varphi(x)$ une fonction connue par les valeurs $\varphi_0\,\varphi_1 \ldots \varphi_n$ qu'elle prend pour des valeurs $x_0\,x_1 \ldots x_n$ de la variable x; la différence réciproque du $n^{\text{ième}}$ ordre est alors une fonction des arguments $x_0\,x_1 \ldots x_n$; je désigne celle-là par $\varrho^n(x_0\,x_1 \ldots x_n)$ ou par $\varrho_x^n\varphi(x)$ ou, s'il ne peut y avoir d'ambiguité, par ϱ^n simplement. Le cas limite où tous les arguments tendent vers la même valeur est d'un intérêt tout particulier. La différence réciproque du $n^{\text{ième}}$ ordre deviendra alors le »coefficient différentiel réciproque» du $n^{\text{ième}}$ ordre. Je désigne celui-ci par $r_x^n[\varphi(x)]$ ou simplement par r^n. M. THIELE définit la différence réciproque du $(n+1)^{\text{ième}}$ ordre $\varrho^{n+1}(x_0\,x_1 \ldots x_{n+1})$ par la relation de récurrence

$$\varrho^{n+1}(x_0\,x_1 \ldots x_{n+1}) = \frac{x_{n+1} - x_n}{\varrho^n(x_0\,x_1 \ldots x_{n-1}\,x_{n+1}) - \varrho^n(x_0\,x_1 \ldots x_n)} + \varrho^{n-1}(x_0\,x_1 \ldots x_{n-1}) \qquad (1)$$

où

$$\varrho^0(x_0) = \varphi_0 \quad \varrho^0(x_0\,x_1) = \frac{x_1 - x_0}{\varphi_1 - \varphi_0}.$$

Pour le cas limite où tous les arguments tendent vers la même valeur, la relation de récurrence prend la forme

$$r_x^{n+1}\varphi(x) = (n+1)\,r_x[r_x^n\varphi(x)] + r_x^{n-1}\varphi(x). \qquad (2)$$

[1] T. N. THIELE: Différences réciproques. Bulletin de l'Acad. royale des Sciences et des Lettres de Danemark 1906. Pag. 153—171.

Supposons donné un tableau sur la fonction $\varphi(x)$ et les différences réciproques de celle-ci de manière que les valeurs de fonction $\varphi_0 \varphi_1 \dots \varphi_n$ correspondent aux arguments arbitraires $x_0 x_1 \dots x_n$. Si l'on y interpole par des différences réciproques, on trouve, d'après M. Thiele, en vertu de l'équation de définition (1) que la formule générale d'interpolation est

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \cfrac{x-x_0}{\varrho^1(x_0x_1) + \cfrac{x-x_1}{\varrho^2(x_0x_1x_2) - \varphi_0 + \cfrac{x-x_2}{\varrho^3(x_0x_1x_2x_3) - \varrho^1(x_0x_1) + \cfrac{x-x_3}{\varrho^4(x_0\dots x_4) - \varrho^2(x_0x_1x_2) + \dots}}}} \tag{3}$$

Nous indiquons par N_n et T_n les dénominateurs et les numérateurs des réduites et posons

$$\begin{aligned} N_{2n} &= n_0 + n_1 x + n_2 x^2 + \dots + n_{n-1} x^{n-1} \\ N_{2n+1} &= \nu_0 + \nu_1 x + \nu_2 x^2 + \dots + \nu_n x^n \\ T_{2n} &= t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + \dots + t_n x^n \\ T_{2n+1} &= \tau_0 + \tau_1 x + \tau_2 x^2 + \dots + \tau_n x^n \end{aligned} \tag{4}$$

Les coefficients de ceux-ci sont des fonctions assez compliquées des différences réciproques, mais il suffit ici de connaître les coefficients de la puissance la plus élevée de x. On voit immédiatement que ceux-ci sont

$$\begin{aligned} n_{n-1} &= \varrho^{2n-1}(x_0 x_1 \dots x_{2n-1}) & \nu_n &= 1 \\ t_n &= 1 & \tau_n &= \varrho^{2n}(x_0 x_1 \dots x_{2n}) \end{aligned} \tag{5}$$

La fraction continue (3) montre que la $n^{\text{ième}}$ réduite de celle-ci et $\varphi(x)$ coïncident pour $x = x_0, x_1, \dots x_{n-1}$. On en obtient une série d'équations linéaires d'un nombre justement suffisant pour la détermination des coefficients des réduites. On trouve ainsi pour les réduites d'ordre pair

$$\varphi_0 = \frac{T_{2n}(x_0)}{N_{2n}(x_0)} \quad \dots\dots \quad \varphi_{2n-1} = \frac{T_{2n}(x_{2n-1})}{N_{2n}(x_{2n-1})} \tag{6}$$

qui s'écrit aussi

$$\begin{aligned} &n_0\varphi_0 + n_1 x_0 \varphi_0 + \dots + n_{n-1} x_0^{n-1} \varphi_0 - t_0 - t_1 x_0 - \dots - t_n x_0^n = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &n_0\varphi_{2n-1} + n_1 x_{2n-1} \varphi_{2n-1} + \dots + n_{n-1} x_{2n-1}^{n-1} \varphi_{2n-1} - t_0 - t_1 x_{2n-1} - \dots - t_n x_{2n-1}^n = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

En éliminant maintenant $t_0, t_1, \ldots t_n$ on trouve N_{2n} représenté par les déterminants suivants:

$$N_{2n} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & x & 0 & x^2 & \ldots & x^{n-1} & 0 \\ 1 & \varphi_0 & x_0 & x_0\varphi_0 & x_0^2 & x_0^2\varphi_0 & \ldots & x_0^{n-1}\varphi_0 & x_0^n \\ 1 & \varphi_1 & x_1 & x_1\varphi_1 & x_1^2 & x_1^2\varphi_1 & \ldots & x_1^{n-1}\varphi_1 & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \varphi_{2n-1} & x_{2n-1} & x_{2n-1}\varphi_{2n-1} & x_{2n-1}^2 & x_{2n-1}^2\varphi_{2n-1} & \ldots & x_{2n-1}^{n-1}\varphi_{2n-1} & x_{2n-1}^n \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} 1 & \varphi_0 & x_0 & x_0\varphi_0 & \ldots & x_0^{n-1} & x_0^{n-1}\varphi_0 \\ 1 & \varphi_1 & x_1 & x_1\varphi_1 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^{n-1}\varphi_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \varphi_{2n-1} & x_{2n-1} & x_{2n-1}\varphi_{2n-1} & \ldots & x_{2n-1}^{n-1} & x_{2n-1}^{n-1}\varphi_{2n-1} \end{vmatrix} \qquad (8)$$

en éliminant, au contraire, $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots$ on trouve pour T_{2n}

$$T_{2n} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & 0 & x^2 & \ldots & 0 & x^n \\ 1 & \varphi_0 & x_0 & x_0\varphi_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-1}\varphi_0 & x_0^n \\ 1 & \varphi_1 & x_1 & x_1\varphi_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1}\varphi_1 & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \varphi_{2n-1} & x_{2n-1} & x_{2n-1}\varphi_{2n-1} & x_{2n-1}^2 & \ldots & x_{2n-1}^{n-1}\varphi_{2n-1} & x_{2n-1}^n \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} 1 & \varphi_0 & x_0 & x_0\varphi_0 & \ldots & x_0^{n-1}\varphi_0 \\ 1 & \varphi_1 & x_1 & x_1\varphi_1 & \ldots & x_1^{n-1}\varphi_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \varphi_{2n-1} & x_{2n-1} & x_{2n-1}\varphi_{2n-1} & \ldots & x_{2n-1}^{n-1}\varphi_{2n-1} \end{vmatrix} \qquad (9)$$

Pour la détermination des réduites à indices impairs nous avons les équations

$$\varphi_0 = \frac{T_{2n+1}(x_0)}{N_{2n+1}(x_0)}, \quad \ldots \ldots \quad \varphi_{2n} = \frac{T_{2n+1}(x_{2n})}{N_{2n+1}(x_{2n})} \qquad (6 \text{ bis})$$

ou bien

$$\begin{aligned} &\nu_0\varphi_0 + \nu_1 x_0\varphi_0 + \nu_2 x_0^2\varphi_0 + \cdots + \nu_n x_0^n\varphi_0 - t_0 - t_1 x_0 - \cdots - t_n x_0^n = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (7 \text{ bis}) \\ &\nu_0\varphi_{2n} + \nu_1 x_{2n}\varphi_{2n} + \nu_2 x_{2n}^2\varphi_{2n} + \cdots + \nu_n x_{2n}^n\varphi_{2n} - t_0 - t_1 x_{2n} - \cdots - t_n x_{2n}^n = 0 \end{aligned}$$

En éliminant on trouve pour N_{2n+1} et T_{2n+1}

$$N_{2n+1} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & x & 0 & \dots & 0 & x^n \\ 1 & \varphi_0 & x_0 & x_0\varphi_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n & x_0^n\varphi_0 \\ 1 & \varphi_1 & x_1 & x_1\varphi_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n & x_1^n\varphi_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varphi_{2n} & x_{2n} & x_{2n}\varphi_{2n} & x_{2n}^2 & \dots & x_{2n}^n & x_{2n}^n\varphi_{2n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & \varphi_0 & x_0 & x_0\varphi_0 & \dots & x_0^{n-1}\varphi_0 & x_0^n \\ 1 & \varphi_1 & x_1 & x_1\varphi_1 & \dots & x_1^{n-1}\varphi_1 & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varphi_{2n} & x_{2n} & x_{2n}\varphi_{2n} & \dots & x_{2n}^{n-1}\varphi_{2n} & x_{2n}^n \end{vmatrix} \quad (8\text{ bis})$$

$$T_{2n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & 0 & \dots & x^n & 0 \\ 1 & \varphi_0 & x_0 & x_0\varphi_0 & \dots & x_0^n & x_0^n\varphi_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varphi_{2n} & x_{2n} & x_{2n}\varphi_{2n} & \dots & x_{2n}^n\varphi_{2n} & x_{2n}^n\varphi_{2n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & \varphi_0 & x_0 & x_0\varphi_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & \varphi_1 & x_1 & x_1\varphi_1 & \dots & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varphi_{2n} & x_{2n} & x_{2n}\varphi_{2n} & \dots & x_{2n}^n \end{vmatrix} \quad (9\text{ bis})$$

Par (8) et (9 bis) on trouve immédiatement les différences réciproques exprimées par le rapport entre deux déterminants, car d'après (5) celles-ci sont justement les coefficients des puissances les plus élevées de x dans N_{2n} et T_{2n+1}. En introduisant pour un déterminant tel que le dénominateur de (9 bis) l'abréviation $|1, \varphi_i, x_i, x_i\varphi_i, \dots x_i^n|$ on trouve

$$\varrho^{2n}[\varphi(x)] = \frac{|1, \varphi_i, x_i, x_i\varphi_i, \dots x_i^{n-1}, x_i^{n-1}\varphi_i, x_i^n\varphi_i|}{|1, \varphi_i, x_i, x_i\varphi_i, \dots x_i^{n-1}, x_i^{n-1}\varphi_i, x_i^n|} \quad (10)$$

$$\varrho^{2n+1}[\varphi(x)] = \frac{|1, \varphi_i, x_i, x_i\varphi_i, \dots x_i^n, x_i^{n+1}|}{|1, \varphi_i, x_i, x_i\varphi_i, \dots x_i^n, x_i^n\varphi_i|} \quad (11)$$

d'où on voit que quatre types différents de déterminants se présentent dans les différences réciproques.

On peut abaisser le degré du déterminant numérateur se N_n et T_n par une unité; considérons, par exemple, N_{2n}; de la $2n^{\text{ième}}$ colonne, on soustrait la $(2n-2)^{\text{ième}}$ colonne multipliée par x; de la $(2n-2)^{\text{ième}}$ colonne, on soustrait la $(2n-4)^{\text{ième}}$ colonne multipliée par x en continuant ainsi jusqu'à ce qu'on arrive à la $2^{\text{ième}}$ colonne, qu'on ne change pas. On trouvera alors

$$N_{2n} = \frac{|1, (x-x_i)\varphi_i, x_i, x_i(x-x_i)\varphi_i, x_i^2, \dots x_i^{n-2}(x-x_i)\varphi_i, x_i^{n-1}, x_i^n|}{|1, \varphi_i, x_i, x_i\varphi_i, \dots x_i^{n-1}, x_i^{n-1}\varphi_i|} \quad (12)$$

$$N_{2n+1} = \frac{|1, (x-x_i)\varphi_i, x_i, x_i(x-x_i)\varphi_i, x_i^2, \dots x_i^{n-1}(x-x_i)\varphi_i, x_i^n|}{|1, \varphi_i, x_i, x_i\varphi_i, \dots x_i^n|} \quad (12\text{ bis})$$

$$T_{2n} = \frac{\begin{vmatrix} 1, & \dfrac{\varphi_i}{x-x_i}, & x_i, & x_i\dfrac{\varphi_i}{x-x_i}, & \dots & x_i^{n-1}, & x_i^{n-1}\dfrac{\varphi_i}{x-x_i} \\ 1, & \varphi_i, & x_i, & x_i\varphi_i, & \dots & x_i^{n-1}, & x_i^{n-1}\varphi_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1, & \varphi_i, & x_i, & x_i\varphi_i, & \dots & x_i^{n-1}, & x_i^{n-1}\varphi_i \end{vmatrix}} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{2n-1}) \quad (13)$$

$$T_{2n+1} = \frac{\begin{vmatrix} 1, & \dfrac{\varphi_i}{x-x_i}, & x_i, & x_i\dfrac{\varphi_i}{x-x_i}, & \dots & x_i^{n-1}, & x_i^{n-1}\dfrac{\varphi_i}{x-x_i}, & x_i^n\dfrac{\varphi_i}{x-x_i} \\ 1, & \varphi_i, & x_i, & x_i\varphi_i, & \dots & x_i^{n-1}\varphi_i, & x_i^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1, & \varphi_i, & x_i, & x_i\varphi_i, & \dots & x_i^{n-1}\varphi_i, & x_i^n \end{vmatrix}} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{2n}) \quad (13\text{ bis})$$

On en voit que les dénominateurs et les numérateurs des réduites se forment facilement des différences réciproques.

On dérive, en effet, N_{2n} de ϱ^{2n-1} en multipliant φ_i par $x-x_i$ dans le déterminant numérateur de celle-ci, le dénominateur restant invariable. On trouve de même T_{2n+1} par ϱ^{2n} en multipliant celle-ci par $(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{2n})$ et en divisant φ_i par $x-x_i$ partout dans le déterminant numérateur. Le dénominateur de N_{2n+1} est le dénominateur de ϱ^{2n}, tandis qu'on en forme le numérateur en multipliant φ_i par $x-x_i$. Le dénominateur de T_{2n} est le dénominateur de ϱ^{2n-1}, tandis qu'on en forme le numérateur en divisant φ_i par $x-x_i$ et en multipliant ensuite tout le déterminant par $(x-x_0)\dots(x-x_{2n-1})$.

De chacune des formules suivantes relatives aux différences réciproques on dérive facilement des formules correspondantes pour N_n et T_n.

§ 29. Les déterminants (10) et (11) sont justement la forme sous laquelle M. Thiele a indiqué les différences réciproques. Mais celles-ci se simplifient en abaissant de n et de $n+1$ unités respectivement le degré des déterminants.

En posant

$$\psi_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

on a, on le sait de la théorie des fractions partielles,

$$\sum \frac{x_i^p}{\psi'_n(x_i)} = 0 \qquad (p = 1, 2, \dots n-1) \qquad \sum \frac{x_i^n}{\psi'_n(x_i)} = 1 \quad (14)$$

où la sommation est supposée étendue sur toutes les racines de $\psi_n(x) = 0$. En désignant par $\delta^n[\varphi(x)]$ la différence ordinaire divisée du $n^{\text{ième}}$ ordre, on sait que

$$\delta^n[\varphi(x)] = \frac{\varphi_0}{\psi'_n(x_0)} + \frac{\varphi_1}{\psi'_n(x_1)} + \dots + \frac{\varphi_n}{\psi'_n(x_n)} \quad (15)$$

Considérons maintenant (10) et ajoutons, dans les déterminants numérateurs et dénominateurs la $1^{\text{ière}}$, la $2^{\text{ième}}$ jusqu'à la $2n^{\text{ième}}$ ligne à la dernière après les avoir divisées par $\psi'_{2n}(x_0)$, $\psi'_{2n}(x_1)$, $\dots$ $\psi'_{2n}(x_{2n})$ respectivement. Ajoutons ensuite à la $2n^{\text{ième}}$ ligne la $1^{\text{ière}}$, la $2^{\text{ième}}$ jusqu'à la $(2n-1)^{\text{ième}}$ ligne après les avoir divisées par $\psi'_{2n-1}(x_0)$, $\psi'_{2n-1}(x_1)$, $\dots$ $\psi'_{2n-1}(x_{2n-1})$ respectivement et continuons

de même jusqu'à ce que nous arrivons à la 1ière ligne qui reste invariable. En réduisant alors, autant que possible, le degré des deux déterminants on trouve

$$\varrho^{2n}[\varphi(x)]=(-1)^n\begin{vmatrix}\delta^n(\varphi) & \delta^n(x\varphi) & \dots\delta^n(x^n\varphi)\\ \delta^{n+1}(\varphi) & \delta^{n+1}(x\varphi)\dots\delta^{n+1}(x^n\varphi)\\ \dots & \dots & \dots\\ \delta^{2n}(\varphi) & \delta^{2n}(x\varphi) & \dots\delta^{2n}(x^n\varphi)\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\delta^{n+1}(\varphi) & \delta^{n+1}(x\varphi)\dots\delta^{n+1}(x^{n-1}\varphi)\\ \delta^{n+2}(\varphi) & \delta^{n+2}(x\varphi)\dots\delta^{n+2}(x^{n-1}\varphi)\\ \dots & \dots & \dots\\ \delta^{2n}(\varphi) & \delta^{2n}(x\varphi) & \dots\delta^{2n}(x^{n-1}\varphi)\end{vmatrix} \quad (16)$$

$\delta^n(\varphi)$ est ici une fonction des arguments $x_0\, x_1 \dots x_p$. On trouve de même par (11) pour les différences réciproques d'ordre impair

$$\varrho^{2n+1}[\varphi(x)]=(-1)^n\begin{vmatrix}\delta^{n+2}(\varphi) & \delta^{n+2}(x\varphi) & \dots\delta^{n+2}(x^{n-1}\varphi)\\ \delta^{n+3}(\varphi) & \delta^{n+3}(x\varphi) & \dots\delta^{n+3}(x^{n-1}\varphi)\\ \dots & \dots & \dots\\ \delta^{2n+1}(\varphi) & \delta^{2n+1}(x\varphi) & \dots\delta^{2n+1}(x^{n-1}\varphi)\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\delta^{n+1}(\varphi) & \delta^{n+1}(x\varphi) & \dots\delta^{n+1}(x^n\varphi)\\ \delta^{n+2}(\varphi) & \delta^{n+2}(x\varphi) & \dots\delta^{n+2}(x^n\varphi)\\ \dots & \dots & \dots\\ \delta^{2n+1}(\varphi) & \delta^{2n+1}(x\varphi) & \dots\delta^{2n+1}(x^n\varphi)\end{vmatrix} \quad (16\text{ bis})$$

(16) et (16 bis) peuvent encore se transformer. Nous nous servons de l'identité

$$\delta^n(x\varphi) = x_n\delta^n(\varphi) + \delta^{n-1}(\varphi) \quad (17)$$

qu'on dérive de l'équation

$$(x-x_0)\frac{x_i\varphi_i}{(x_i-x_1)\dots(x_i-x_n)} - (x_i-x_0)\frac{x_n\varphi_i}{(x_i-x_1)\dots(x_i-x_n)} = \frac{\varphi_i}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{n-1})}$$

Considérons maintenant le déterminant numérateur de (16). On multiplie la $(n+1)^{\text{ième}}$ ligne par x_{2n} en y ajoutant la $n^{\text{ième}}$; on multiplie ensuite la $n^{\text{ième}}$ ligne par x_{2n-1} en y ajoutant la $(n-1)^{\text{ième}}$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à la première ligne qui reste invariable. On répète ensuite la même opération en recommançant par la $(n+1)^{\text{ième}}$ ligne, mais cette fois on s'arrête à la $2^{\text{ième}}$, et on continue ainsi jusqu'à ce qu'on s'arrête enfin par la $n^{\text{ième}}$ ligne. En opérant de la même manière sur le déterminant dénominateur on trouve

$$\varrho^{2n}[\eta(x)]\,\frac{(-1)^n}{x_{n+1}x_{n+2}\dots x_{2n}}\begin{vmatrix}\delta^n(\varphi) & \delta^n(x\varphi) & \dots\delta^n(x^n\varphi)\\ \delta^{n+1}(x\varphi) & \delta^{n+1}(x^2\varphi) & \dots\delta^{n+1}(x^{n+1}\varphi)\\ \dots & \dots & \dots\\ \delta^{2n}(x^n\varphi) & \delta^{2n}(x^{n+1}\varphi)\dots\delta^{2n}(x^{2n}\varphi)\end{vmatrix}:$$

$$:\begin{vmatrix}\delta^{n+1}(\varphi) & \delta^{n+1}(x\varphi) & \dots\delta^{n+1}(x^{n-1}\varphi)\\ \delta^{n+2}(x\varphi) & \delta^{n+2}(x^2\varphi)\dots & \delta^{n+2}(x^n\varphi)\\ \dots & \dots & \dots\\ \delta^{2n}(x^{n-1}\varphi) & \delta^{2n}(x^n\varphi) & \dots\delta^{2n}(x^{2n-2}\varphi)\end{vmatrix} \quad (18)$$

Au moyen de (16 bis) on trouve de même pour les différences réciproques d'ordre impair

$$\varrho^{2n+1}[\varphi(x)] = (-1)^n x_{n+2} x_{n+3} \dots x_{2n+1} \begin{vmatrix} \delta^{n+2}(\varphi) & \delta^{n+2}(x\varphi) & \dots \delta^{n+2}(x^{n-1}\varphi) \\ \delta^{n+2}(x\varphi) & \delta^{n+3}(x^2\varphi) & \dots \delta^{n+3}(x^n\varphi) \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta^{2n+1}(x^{n-1}\varphi) & \delta^{2n+1}(x^n\varphi) & \dots \delta^{2n+1}(x^{2n}\varphi) \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} \delta^{n+1}(\varphi) & \delta^{n+1}(x\varphi) & \dots \delta^{n+1}(x^n\varphi) \\ \delta^{n+2}(x\varphi) & \delta^{n+2}(x^2\varphi) & \dots \delta^{n+2}(x^{n+1}\varphi) \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta^{2n+1}(x^n\varphi) & \delta^{2n+1}(x^{n+1}\varphi) & \dots \delta^{2n+1}(x^{2n}\varphi) \end{vmatrix} \quad (18 \text{ bis})$$

En appliquant encore l'identité (17) nous pouvons transformer (18) et (18 bis) de manière que les déterminants ainsi obtenus seront orthosymétriques. Pour obtenir ce résultat nous retranchons, par exemple, dans le déterminant numérateur de (18) de chaque ligne celle qui suit, en commençant d'en haut. Nous aurons ainsi un déterminant où les 1ière, 2ième, 3ième ... lignes contiennent les facteurs x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3} ... respectivement. Nous divisons par ceux-ci et appliquons la même opération au déterminant ainsi obtenu, en nous arrêtant cette fois par l'avant-dernière ligne; nous continuons ainsi jusqu'à ce que nous arrivons à un déterminant où tous les éléments sont des différences divisées du même ordre. En appliquant les mêmes opérations au déterminant dénominateur nous aurons

$$\varrho^{2n}[\varphi(x)] = \begin{vmatrix} \delta^{2n}(\varphi) & \delta^{2n}(x\varphi) & \dots \delta^{2n}(x^n\varphi) \\ \delta^{2n}(x\varphi) & \delta^{2n}(x^2\varphi) & \dots \delta^{2n}(x^{n+1}\varphi) \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta^{2n}(x^n\varphi) & \delta^{2n}(x^{n+1}\varphi) & \dots \delta^{2n}(x^{2n}\varphi) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \delta^{2n}(\varphi) & \delta^{2n}(x\varphi) & \dots \delta^{2n}(x^{n-1}\varphi) \\ \delta^{2n}(x\varphi) & \delta^{2n}(x^2\varphi) & \dots \delta^{2n}(x^n\varphi) \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta^{2n}(x^{n-1}\varphi) & \delta^{2n}(x^n\varphi) & \dots \delta^{2n}(x^{2n-2}\varphi) \end{vmatrix} \quad (19$$

par (18 bis) on trouve de même

$$\varrho^{2n+1}[\varphi(x)] = \begin{vmatrix} \delta^{2n+1}(\varphi) & \delta^{2n+1}(x\varphi) & \dots \delta^{2n+1}(x^{n-1}\varphi) \\ \delta^{2n+1}(x\varphi) & \delta^{2n+1}(x^2\varphi) & \dots \delta^{2n+1}(x^n\varphi) \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta^{2n+1}(x^{n-1}\varphi) & \delta^{2n+1}(x^n\varphi) & \dots \delta^{2n+1}(x^{2n-2}\varphi) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \delta^{2n+1}(x) & \delta^{2n+1}(x\varphi) & \dots \delta^{2n+1}(x^n\varphi \\ \delta^{2n+1}(x\varphi) & \delta^{2n+1}(x^2\varphi) & \dots \delta^{2n+1}(x^{n+1}\varphi) \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta^{2n+1}(x^n\varphi) & \delta^{2n+1}(x^{n+1}\varphi) & \dots \delta^{2n+1}(x^{2n}\varphi \end{vmatrix} \quad (19 \text{ bis}$$

A l'aide de (19) et de (19 bis) nous pouvons maintenant représenter les différences réciproques comme le rapport entre deux sommes de produits de valeurs de fonction multipliées par certaines fonctions des différences des arguments.

Le déterminant numérateur dans (19), par exemple, s'écrit selon un théorème connu relatif aux déterminants[1]

$$I = \sum \frac{\varphi_0\,\varphi_1 \dots \varphi_n}{{}^1\Psi_{2n}(x_0)\;{}^1\Psi_{2n}(x_1)\dots{}^1\Psi_{2n}(x_n)}\;\Delta(x_0\,x_1\dots x_n)^2.$$

$\Delta(x_0\,x_1\dots x_n)$ indique ici le produit de toutes les différences possibles entre les arguments $x_0\,x_1\dots x_n$, tandis que ${}^1\Psi_{2n}(x)$, comme plus haut, est égal à $(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{2n})$. La sommation est supposée étendue à tous les $\binom{2n+1}{n+1}$ termes qui se forment du terme sous le signe de sommation en substituant à $0, 1, \dots n\;\; n+1$ indices arbitraires choisis entre $0, 1, 2, \dots 2n+1$. On en aura de plus

$$I = \sum \frac{\varphi_0\,\varphi_1\dots\varphi_n(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(x_0-x_{n+1})(x_0-x_{n+2})\dots(x_0-x_{2n})(x_1-x_{n+1})\dots(x_1-x_{2n})\dots(x_n-x_{n+1})\dots(x_n-x_{2n})} \tag{20}$$

Pour le déterminant dénominateur de (19) on trouve une expression semblable de sorte qu'on a ici

$$\varrho^{2n}[\varphi(x)] = \frac{\sum \frac{\varphi_0\,\varphi_1\dots\varphi_n}{(x_0-x_{n+1})\dots(x_0-x_{2n})(x_1-x_{n+1})\dots(x_1-x_{2n})\dots(x_n-x_{n+1})\dots(x_n-x_{2n})}}{\sum \frac{\varphi_0\,\varphi_1\dots\varphi_n(-1)^n}{(x_0-x_n)\dots(x_0-x_{2n})(x_1-x_n)\dots(x_1-x_{2n})\dots(x_{n-1}-x_n)\dots(x_{n-1}-x_{2n})}} \tag{21}$$

A l'aide du théorème à la fin de § 28, nous en dérivons la formule d'interpolation de Cauchy[2] des fonctions fractionnaires. On trouvera facilement

$$F(x) = \frac{\sum \frac{\varphi_0\,\varphi_1\dots\varphi_n(x-x_{n+1})(x-x_{n+2})\dots(x-x_{2n})}{(x_0-x_{n+1})\dots(x_0-x_{2n})(x_1-x_{n+1})\dots(x_1-x_{2n})\dots(x_n-x_{n+1})\dots(x_n-x_{2n})}}{\sum \frac{\varphi_0\,\varphi_1\dots\varphi_{n-1}(x_0-x)(x_1-x)\dots(x_{n-1}-x)}{(x_0-x_n)\dots(x_0-x_{2n})(x_1-x_n)\dots(x_1-x_{2n})\dots(x_{n-1}-x_n)\dots(x_{n-1}-x_{2n})}} \tag{22}$$

Pour les différences réciproques nous pouvons dériver de (16) et de (16 bis) encore une forme nouvelle de déterminant qui se distingue surtout par ce qu'il ne contient que des différences divisées de la fonction $\varphi(x)$ elle-même. Dans ces déterminants nous retranchons en effet, de chaque colonne la précédente multipliée par x_0 en commençant par la dernière. Dans le déterminant ainsi obtenu nous retranchons de chaque colonne la précédente multipliée par x_1 en nous

[1] Baltzer: Determinanten 1870, pag. 80.
[2] Cauchy: Analyse algébrique. Note 5

arrêtant, cependant, cette fois par la 3ième colonne; nous continuons ainsi jusqu'à ce que tous les éléments des déterminants soient des différences divisées de f, et nous aurons

$$\varrho^{2n}[f(x)] = (-1)^n \begin{vmatrix} \delta^n(x_0 x_1 \dots x_n) & \delta^{n-1}(x_1 x_2 \dots x_n) & \dots & \delta^0(x_n) \\ \delta^{n+1}(x_0 x_1 \dots x_{n+1}) & \delta^n(x_1 x_2 \dots x_{n+1}) & \dots & \delta(x_n x_{n+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta^{2n}(x_0 x_1 \dots x_{2n}) & \delta^{2n-1}(x_1 x_2 \dots x_{2n}) & \dots & \delta^n(x_n x_{n+1} \dots x_{2n}) \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} \delta^{n+1}(x_0 x_1 \dots x_{n+1}) & \dots & \delta^2(x_{n-1} x_n x_{n+1}) \\ \delta^{n+2}(x_0 x_1 \dots x_{n+2}) & \dots & \delta^3(x_{n-1} \dots x_{n+2}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta^{2n}(x_0 x_1 \dots x_{2n}) & \dots & \delta^{n+1}(x_{n-1} \dots x_{2n}) \end{vmatrix}$$

En changeant l'ordre des colonnes ces déterminants s'écrivent

$$\varrho^{2n}[f(x)] = \begin{vmatrix} \delta^0(x_n) & \delta(x_{n-1} x_n) & \dots & \delta^n(x_0 x_1 \dots x_n) \\ \delta(x_n x_{n+1}) & \delta^2(x_{n-1} \dots x_{n+1}) & \dots & \delta^{n+1}(x_0 x_1 \dots x_{n+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta^n(x_n \dots x_{2n}) & \delta^{n+1}(x_{n-1} \dots x_{2n}) & \dots & \delta^{2n}(x_0 x_1 \dots x_{2n}) \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} \delta^2(x_{n-1} \dots x_{n+1}) & \delta^3(x_{n-2} \dots x_{n+1}) & \dots & \delta^{n+1}(x_0 \dots x_{n+1}) \\ \delta^3(x_{n-1} \dots x_{n+2}) & \delta^4(x_{n-2} \dots x_{n+2}) & \dots & \delta^{n+2}(x_0 \dots x_{n+2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta^{n+1}(x_{n-1} \dots x_{2n}) & \delta^{n+2}(x_{n-2} \dots x_{2n}) & \dots & \delta^{2n}(x_0 \dots x_{2n}) \end{vmatrix} \quad (23)$$

On trouve de même pour ϱ^{2n+1}

$$\varrho^{2n+1}[f(x)] \quad \begin{vmatrix} \delta^3(x_{n-1} \dots x_{n+2}) & \delta^4(x_{n-2} \dots x_{n+2}) & \dots & \delta^{n+2}(x_0 \dots x_{n+2}) \\ \delta^4(x_{n-1} \dots x_{n+3}) & \delta^5(x_{n-2} \dots x_{n+3}) & \dots & \delta^{n+3}(x_0 \dots x_{n+3}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta^{n+2}(x_{n-1} \dots x_{2n+1}) & \delta^{n+3}(x_{n-2} \dots x_{2n+1}) & \dots & \delta^{2n+1}(x_0 \dots x_{2n+1}) \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} \delta(x_n x_{n+1}) & \delta^2(x_{n-1} \dots x_{n+1}) & \dots & \delta^{n+1}(x_0 \dots x_{n+1}) \\ \delta^2(x_n \dots x_{n+2}) & \delta^3(x_{n-1} \dots x_{n+2}) & \dots & \delta^{n+2}(x_0 \dots x_{n+2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta^{n+1}(x_n \dots x_{2n+1}) & \delta^{n+2}(x_{n-1} \dots x_{2n+1}) & \dots & \delta^{2n+1}(x_0 \dots x_{2n+1}) \end{vmatrix} \quad (23\text{ bis})$$

§ **30.** Toutes ces formules s'appliquent à des différences réciproques d'arguments arbitraires y compris les cas où deux ou plusieurs arguments coïncident. Nous allons maintenant étudier spécialement le cas où *tous* les arguments tendent vers la même valeur. Nous désignons par »coefficient différentiel réciproque» la limite de laquelle s'approchent, en ce cas, les différences réciproques. Or, on sait que

$$\lim_{x_0=x_1=\cdots=x_n} \delta^n(x_0\, x_1 \ldots x_n) = \frac{1}{n!}\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}.$$

On trouve donc par (23) et (23 bis)

$$r_x^{2n}\varphi(x) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots a_n \\ a_1 & a_2 & \ldots a_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n+1} & \ldots a_{2n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & \ldots a_{n+1} \\ a_3 & a_4 & \ldots a_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \ldots a_{2n} \end{vmatrix} \tag{24}$$

$$r_x^{2n+1}\varphi(x) = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & \ldots a_{n+2} \\ a_4 & a_5 & \ldots a_{n+3} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n+2} & a_{n+3} & \ldots a_{2n+1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots a_{n+1} \\ a_2 & a_3 & \ldots a_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \ldots a_{2n+1} \end{vmatrix} \tag{24 bis}$$

où nous avons posé

$$a_r = \frac{1}{r!}\frac{d^r\varphi(x)}{dx^r}.$$

Ces déterminants sont orthosymétriques, et nous verrons tout à l'heure que, pour cette raison, ils possèdent des propriétés qui les rendent spécialement propres à servir d'intermédiaires au calcul des coefficients différentiels réciproques.

Les autres déterminants nous permettent de dériver des formules semblables pour $r^n[\varphi(x)]$. Considérons surtout (18) et (18 bis); par (18) on trouve

$$r^{2n}[\varphi(x)] = \frac{(-1)^n}{x^n} \begin{vmatrix} \frac{1}{n!}D^n\varphi(x) & \frac{1}{n!}D^n[x\varphi(x)] & \ldots & \frac{1}{n!}D^n[x^n\varphi(x)] \\ \frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}[x\varphi(x)] & \frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}[x^2\varphi(x)] & \ldots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \frac{1}{(2n)!}D^{2n}[x^n\varphi(x)] & \ldots & & \frac{1}{(2n)!}D^{2n}[x^{2n}\varphi(x)] \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1}\varphi(x) & \cdots & \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1}[x^{n-1}\varphi(x)] \\ \frac{1}{(n+2)!} D^{n+2}[x\varphi(x)] & \cdots & \frac{1}{(n+2)!} D^{n+2}[x^{n}\varphi(x)] \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(2n)!} D^{2n}[x^{n-1}\varphi(x)] & \cdots & \frac{1}{(2n)!} D^{2n}[x^{2n-2}\varphi(x)] \end{vmatrix} \quad (25)$$

Ces déterminants peuvent se transformer en retranchant de chaque colonne la suivante divisée par x. Dans les déterminants transformés ainsi $\frac{1}{x}$ sera facteur dans toutes les colonnes; nous divisons par celui-ci et appliquons ensuite la même opération aux déterminants obtenus ainsi en nous arrêtant, cependant, cette fois à l'avant-dernière colonne. En continuant de cette manière aussi longtemps que possible, on finit par trouver

$$r^{2n}[\varphi(x)] = x^{-2n} \begin{vmatrix} \varphi(x) & \frac{1}{1!} D[x\varphi(x)] & \cdots & \frac{1}{n!} D^{n}[x^{n}\varphi(x)] \\ \frac{1}{1!} D[x\varphi(x)] & \frac{1}{2!} D^{2}[x^{2}\varphi(x)] & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n!} D^{n}[x^{n}\varphi(x)] & \cdots & \cdots & \frac{1}{(2n)!} D^{2n}[x^{2n}\varphi(x)] \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} D^{2}\varphi(x) & \frac{1}{3!} D^{3}[x\varphi(x)] & \cdots & \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1}[x^{n-1}\varphi(x)] \\ \frac{1}{3!} D^{3}[x\varphi(x)] & \frac{1}{4!} D^{4}[x^{2}\varphi(x)] & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1}[x^{n-1}\varphi(x)] & \cdots & \cdots & \frac{1}{(2n)!} D^{2n}[x^{2n-2}\varphi(x)] \end{vmatrix} \quad (26)$$

On trouve de même pour les différences réciproques d'ordre impair

$$r^{2n+1}[\varphi(x)] = x^{2n} \begin{vmatrix} \frac{1}{3!} D^{3}\varphi(x) & \frac{1}{4!} D^{4}[x\varphi(x)] & \cdots & \frac{1}{(n+2)!} D^{n+2}[x^{n-1}\varphi(x)] \\ \frac{1}{4!} D^{4}[x\varphi(x)] & \frac{1}{5!} D^{5}[x^{2}\varphi(x)] & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(n+2)!} D^{n+2}[x^{n-1}\varphi(x)] & \cdots & \cdots & \frac{1}{(2n+1)!} D^{2n+1}[x^{2n-2}\varphi(x)] \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1!} D\varphi(x) & \frac{1}{2!} D^2[x\varphi(x)] & \dots & \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1}[x^n\varphi(x)] \\ \frac{1}{2!} D^2[x\varphi(x)] & \frac{1}{3!} D^3[x^2\varphi(x)] & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1}[x^n\varphi(x)] & \dots & \dots & \frac{1}{(2n+1)!} D^{2n+1}[x^{2n}\varphi(x)] \end{vmatrix} \quad (26\text{ bis})$$

Ces déterminants sont orthosymétriques, et on notera que par leur aspects ils rappellent (24) et (24 bis) ce qui nous sera utile dans la suite.

Calcul des coefficients différentiels réciproques.

§ 31. Ce calcul peut se faire par l'application de la relation de récurrence

$$r^{n+1}(\varphi) = r^{n-1}(\varphi) + (n+1)\, r[r^n(\varphi)] \quad (2)$$

Mais si la loi n'est pas extrêmement simple, il sera plus avantageux de calculer séparément les déterminants numérateurs et dénominateurs en les déterminant selon une des relations de récurrence citées ci-après.

Posons

$$p_{r,n+1}[\varphi(x)] = \begin{vmatrix} a_r & a_{r+1} & \dots & a_{r+n} \\ a_{r+1} & a_{r+2} & \dots & a_{r+n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r+n} & \dots & \dots & a_{r+2n} \end{vmatrix} \quad (27)$$

où, comme plus haut

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n}.$$

Nous démontrerons d'abord le théorème remarquable que voici: *l'on différentie ce déterminant en augmentant par une unité tous les indices de la dernière ligne et en multipliant le déterminant par le nombre qui égale l'index le plus élevé obtenu ainsi* $(r + 2n + 1)$.

Pour démontrer ceci, nous notons que nous avons trouvé, plus haut, l'identité

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{n!} D^n q(x) & \frac{1}{n!} D^n [x q(x)] & \cdots & \frac{1}{n!} D^n [x^r q(x)] \\ \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1} q(x) & \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1} [x q(x)] & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{1}{(n+r)!} D^{n+r} [q(x)] & \frac{1}{(n+r)!} D^{n+r} [x q(x)] & \cdots & \frac{1}{(n+r)!} D^{n+r} [x^r q(x)] \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{n-r} & a_{n-r+1} \cdots a_n \\ a_{n-r+1} & a_{n-r+2} \cdots a_{n+1} \\ \cdots & \cdots \\ a_n & a_{n+1} \cdots a_{n+r} \end{vmatrix} \tag{28}$$

En différentiant le déterminant du premier membre par rapport à x, on obtient une somme de $r+1$ déterminants où chacun des termes a été formé du déterminant primitif, en différentiant, par rapport à x, une seule des lignes. Tous ces déterminants sont o excepté un; on différentie donc le déterminant du premier membre en ne différentiant que la dernière ligne. En transformant ensuite le déterminant obtenu ainsi de la même manière que plus haut, on verra qu'il égale

$$(-1)^{\frac{r(r+1)}{2}} (r+n+1) \begin{vmatrix} a_{n-r} \cdots a_n \\ \cdots \\ a_{n-1} \cdots a_{n+r+1} \\ a_{n+1} \cdots a_{n+r+1} \end{vmatrix}.$$

On a donc

$$\frac{d p_{r,n+1}}{dx} = (r+2n+1) \begin{vmatrix} a_r & a_{r+1} \cdots a_{r+n} \\ a_{r+1} & a_{r+2} \cdots a_{r+n+1} \\ \cdots & \cdots \\ a_{r+n-1} & a_{r+n} \cdots a_{r+2n-1} \\ a_{r+n+1} & a_{r+n} \cdots a_{r+2n+1} \end{vmatrix} \tag{29}$$

c. q. f. d.

Pour déterminer des relations de récurrence commodes au calcul de $p_{r,n}$ nous nous servirons du théorème suivant bien connu dû à Sylvester.

$$I \cdot \frac{\partial^2 I}{\partial a_{ij} \partial a_{kl}} - \frac{\partial I}{\partial a_{ij}} \cdot \frac{\partial I}{\partial a_{kl}} - \frac{\partial I}{\partial a_{il}} \cdot \frac{\partial I}{\partial a_{kj}} \tag{30}$$

où

$$f = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots \\ \dots & \dots \\ a_{n1} \dots \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

On trouve par cela surtout

$$p_{r,n+1}\, p_{r+2,n-1} = p_{r+2,n}\, p_{r,n} - p''_{r+1,n} \tag{31}$$

$$p_{r+1,n-1}\, p_{r,n+1} - \frac{1}{r+2n}\, p_{r,n}\, p'_{r+1,n} - \frac{1}{r+2n-1}\, p_{r+1,n}\, p'_{r,n} \tag{32}$$

$$\frac{r+2n-1}{r+2n} \cdot p_{r+1,n}\, p'_{r+1,n} = p_{r+2,n}\, p'_{r,n} - p_{r,n+1}\, p'_{r+2,n-1} \tag{33}$$

$$\frac{r+2n+1}{r+2n} \cdot p_{r+1,n}\, p'_{r+1,n} = p'_{r+2,n}\, p_{r,n} - p'_{r,n+1}\, p_{r+2,n-1} \tag{34}$$

où $p'_{r,n}$ désigne la dérivée de $p_{r,n}$ par rapport à x.

Par la combinaison de celles-ci on dérive encore une relation importante; en éliminant entre (31) et (32) $p_{r,n}$ on trouve

$$\frac{1}{r+2n}\, p_{r,n+1} \cdot p_{r+2,n-1} \cdot p'_{r+1,n} - p_{r+1,n-1} \cdot p_{r,n+1} \cdot p_{r+2,n} =$$

$$= \frac{1}{r+2n-1}\, p_{r+1,n} \cdot p'_{r,n} \cdot p_{r+2,n} - \frac{1}{r+2n}\, p''_{r+1,n}\, p'_{r+1,n}$$

d'après (33) le second membre égale ici

$$\frac{1}{2n-1} \cdot p_{r+1,n} \cdot p_{r,n+1} \cdot p'_{r+2,n-1}.$$

Divisons par $p_{r,n+1}$, nous aurons alors, en substituant $r-1$ à r et $n+1$ à n,

$$p_{r,n}\, p_{r+1,n+1} = \frac{1}{2n+r+1}\, p_{r+1,n}\, p'_{r,n+1} - \frac{1}{2n+r}\, p_{r,n+1}\, p'_{r+1,n}. \tag{35}$$

M. Thiele a relevé en particulier la première de ces relations (31) qui présente l'avantage de ne pas contenir des coefficients différentiels.

En général, cependant, (32) et (35) seront préférables.

§ **32.** De même que de la formule d'interpolation de Newton on dérive la formule de Taylor, on dérivera de la fraction continue d'interpolation générale (3) le développement suivant

$$\varphi(x+z) = \varphi(x) + \cfrac{z}{r(\varphi(x)) + \cfrac{z}{z\,r(r(\varphi(x))) + \cfrac{z}{3\,r(r^2(\varphi(x))) + \cfrac{z}{4\,r(r^3(\varphi(x))) + \cdots}}}} \tag{36}$$

correspondant à la formule de Taylor

$$\varphi(x+z) = \varphi(x) + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

Je désigne, dans la suite, cette fraction continue comme la fraction continue de M. Thiele. Selon (24), (24 bis) et (27) on trouve maintenant

$$r^{2n}(\varphi(x)) = \frac{p_{0,n+1}}{p_{2,n}} \tag{37}$$

$$r^{2n+1}(\varphi(x)) = \frac{p_{3,n}}{p_{1,n+1}} \tag{37 bis}$$

d'où on trouve encore au moyen de (31)

$$(2n+1)\,r(r^{2n}(\varphi(x))) = \frac{p_{2,n}^2}{p_{1,n}\,p_{1,n+1}} \tag{38}$$

$$(2n+2)\,r(r^{2n+1}(\varphi(x))) = -\frac{p_{1,n+1}^2}{p_{2,n}\,p_{2,n+1}}. \tag{38 bis}$$

Je pose maintenant

$$p_0 = 1,\ p_1 = a_1,\ p_2 = a_2 \text{ et généralement } p_{2n} = p_{2,n},\ p_{2n+1} = p_{1,n+1}.$$

Les coefficients de (36) s'exprimeront alors par des fonctions p à un seul indice. Au moyen de (38) on aura

$$(n+1)\,r(r^n(\varphi(x))) = (-1)^n \frac{p_n^2}{p_{n-1}\,p_{n+1}}. \tag{39}$$

On pourra alors écrire (36)

$$\varphi(x+z) = \varphi(x) + \cfrac{z}{p_0^2 - \cfrac{z}{p_1 - \cfrac{p_1^2 z}{p_0 p_2 - p_1^2 - \cfrac{p_2^2 z}{p_1 p_3 - p_2^2 - \cfrac{p_2 p_3 z}{p_2 p_4 - p_3^2 - \cfrac{p_3^2 z}{1 - \cdots}}}}}} \tag{40}$$

En posant maintenant en (32) et en (35) $r = 1$, celles-ci s'écrivent

$$p_{2n-2}\, p_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}\, p_{2n-1}\, p'_{2n} - \frac{1}{2n}\, p_{2n}\, p'_{2n-1}$$

$$p_{2n-1}\, p_{2n+2} = \frac{1}{2n+2}\, p_{2n}\, p'_{2n+1} - \frac{1}{2n+1}\, p_{2n+1}\, p'_{2n}.$$

Pour le calcul des fonctions p on a donc les équations suivantes

$$\begin{aligned}
&p_0 = 1 \quad p_1 = a_1 \quad p_2 = a_2 \\
&p_0\, p_3 = \frac{1}{3}\, p_1\, p'_2 - \frac{1}{2}\, p_2\, p'_1 \\
&p_1\, p_4 = \frac{1}{4}\, p_2\, p'_3 - \frac{1}{3}\, p_3\, p'_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&p_{n-2}\, p_{n+1} = \frac{1}{n+1}\, p_{n-1}\, p'_n - \frac{1}{n}\, p_n\, p'_{n-1}.
\end{aligned} \tag{41}$$

Voici, au contraire, les formules de calcul en utilisant (31)

$$\begin{array}{l|l|l}
p_{1.1} = a_1 & p_{1.2} = p_{1.1}\, p_{3.1} - p_{2.1}^2 & p_{3.1}\, p_{1.3} = p_{1.2}\, p_{3.2} - p_{2.2}^2 \\
p_{2.1} = a_2 & p_{2.2} = p_{2.1}\, p_{4.1} - p_{3.1}^2 & p_{4.1}\, p_{2.3} = p_{2.2}\, p_{4.2} - p_{3.2}^2 \\
p_{3.1} = a_3 & p_{3.2} = p_{3.1}\, p_{5.1} - p_{4.1}^2 & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
p_{4.1} = a_4 & p_{4.2} = p_{4.1}\, p_{6.1} - p_{5.1}^2 & \\
p_{5.1} = a_5 & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\
p_{6.1} = a_6 & & \\
\cdots\cdots & &
\end{array} \tag{42}$$

Le schéma (41) a l'avantage de ne contenir que les fonctions p apparaissant dans les coefficients des fractions continues, mais, en récompense, il faut en déterminer les coefficients différentiels; dans le schéma (42), au contraire, il a fallu introduire une série de nombres auxiliaires qui ne se trouvent pas directement dans la fraction continue de Thiele (40). Si une fonction p disparaît identiquement, l'une et l'autre méthodes seront illusoires les fonctions p suivantes prenant une forme indéterminée $\binom{0}{0}$. Cependant, il est facile d'indiquer la condition pour que cela arrive, car, en considérant l'équation (28), on voit que le premier membre égalé à zéro indique la condition nécessaire pour qu'il y existe une relation de la forme

$$c_0 D_x^n \varphi(x) + c_1 D_x^n (x \varphi(x)) + \cdots c_r D_x^n (x^r \varphi(x)) = 0$$

où $c_0, c_1, \ldots c_r$ sont des constantes arbitraires. Il faut donc que $\varphi(x)$ soit une fonction rationnelle fractionnée de x, car en intégrant n fois cette équation et en désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ les constantes d'intégration on trouve

$$\varphi(x) = \frac{\alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \cdots \alpha_n}{c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + \cdots c_0}. \tag{43}$$

Si la fonction à développer en fraction continue se présente sous la forme fractionnaire comme le rapport entre deux séries de puissances infinies:

$$\varphi(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots}$$

on déterminera les coefficients différentiels réciproques d'après les formules

$$\frac{r\varphi(x)}{rx} = -\begin{vmatrix} 0 & b_0 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_0 & a_0 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix} \qquad \frac{r^3\varphi(x)}{rx^3} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_0 & a_0 \\ 0 & b_0 & b_1 & a_1 \\ b_0 & b_1 & b_2 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_0 & a_0 \\ b_0 & a_0 & b_1 & a_1 \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 \\ b_2 & a_2 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\frac{r^5\varphi(x)}{rx^5} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & a_0 \\ 0 & 0 & b_0 & a_0 & b_1 & a_1 \\ 0 & b_0 & b_1 & a_1 & b_2 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & a_3 & b_4 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 & a_4 & b_5 & a_5 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & a_0 \\ 0 & 0 & b_0 & a_0 & b_1 & a_1 \\ b_0 & a_0 & b_1 & a_1 & b_2 & a_2 \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 \\ b_2 & a_2 & b_3 & a_3 & b_4 & a_4 \\ b_3 & a_2 & b_4 & a_4 & b_5 & a_5 \end{vmatrix} \tag{44}$$

. . . . . .

$$\frac{r^2\varphi(x)}{rx^2} = \begin{vmatrix} 0 & b_0 & a_0 \\ a_0 & b_1 & a_1 \\ a_1 & b_2 & a_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & b_0 & a_0 \\ b_0 & b_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 \end{vmatrix} \qquad \frac{r^4\varphi(x)}{rx^4} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b_0 & a_0 \\ 0 & b_0 & a_0 & b_1 & a_1 \\ a_0 & b_1 & a_1 & b_2 & a_2 \\ a_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 \\ a_2 & b_3 & a_3 & b_4 & a_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b_0 & a_0 \\ 0 & b_0 & a_0 & b_1 & a_1 \\ b_0 & b_1 & a_1 & b_2 & a_2 \\ b_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 \\ b_2 & b_3 & a_3 & b_4 & a_4 \end{vmatrix}. \tag{45}$$

On démontre ces équations en substituant $\frac{\varphi_i}{\psi_i}$ à φ_i dans les formules générales (10) et (11) des différences réciproques; on aura alors

$$\varrho^{2n}\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right) = \frac{\begin{vmatrix} \psi_i, & \varphi_i, & x_i\psi_i, & x_i\varphi_i, & \ldots & x_i^{n-1}\psi_i, & x_i^{n-1}\varphi_i, & x_i^n\varphi_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \psi_i, & \varphi_i, & x_i\psi_i, & x_i\varphi_i, & \ldots & x_i^{n-1}\psi_i, & x_i^{n-1}\varphi_i, & x_i^n\psi_i \end{vmatrix}} \tag{46}$$

$$\varrho^{2n+1}\left(\begin{matrix}\psi(x)\\ \varphi(x)\end{matrix}\right)=\frac{\left|\psi, \varphi_i, x_i\psi_i, x_i\varphi_i, \ldots x_i^n\psi_i, x_i^{n+1}\psi_i\right|}{\left|\psi_i, \varphi_i, x_i\psi_i, x_i\varphi_i, \ldots x_i^n\psi_i, x_i^n\varphi_i\right|}. \qquad (46\text{ bis})$$

En faisant tendre ici $x_0, x_1, x_2, \ldots$ vers o on trouve, par un passage à la limite les formules ci-dessus.

Transformations linéaires.

§ **33.** Dans cette section nous allons faire voir comment se comportent les différences réciproques en effectuant des transformations linéaires de la variable indépendante ou de la fonction φ. Si, dans (46) et (46 bis) on pose $\varphi_i = 1$ et écrit φ_i au lieu de ψ_i, on aura

$$\varrho^{2n}\left(\begin{matrix}1\\ \varphi(x)\end{matrix}\right)=\frac{\left|1, \varphi_i, x_i, x_i\varphi_i, \ldots x_i^{n-1}, x_i^{n-1}\varphi_i, x_i^n\right|}{\left|1, \varphi_i, x_i, x_i\varphi_i, \ldots x_i^{n-1}, x_i^{n-1}\varphi_i, x_i^n\varphi_i\right|} \qquad (47)$$

$$\varrho^{2n+1}\left(\begin{matrix}1\\ \varphi(x)\end{matrix}\right)=-\frac{\left|1, \varphi_i, x_i, x_i\varphi_i, \ldots x_i^{n-1}\varphi_i, x_i^n\varphi_i, x_i^{n+1}\varphi_i\right|}{\left|1, \varphi_i, x_i, x_i\varphi_i, \ldots x_i^{n-1}\varphi_i, x_i^n, x_i^n\varphi_i\right|} \qquad (47\text{ bis})$$

En comparant à (10) on verra que

$$\varrho^{2n}\left(\begin{matrix}1\\ \varphi(x)\end{matrix}\right)=\frac{1}{\varrho^{2n}(\varphi(x))}. \qquad (48)$$

Donc, la différence réciproque d'ordre pair de la valeur réciproque d'une fonction est la valeur réciproque de la différence réciproque de la fonction.

(11) montre, au contraire, que le déterminant dénominateur de $\varrho^{2n+1}(\varphi(x))$ est le même que celui de $\varrho^{2n+1}\left(\begin{matrix}1\\ \varphi(x)\end{matrix}\right)$.

En substituant à φ_i dans (10) et (11) $\varphi_i + a$ où a est une constante, on trouve facilement que

$$\varrho^{2n}(\varphi(x)+a)=\varrho^{2n}(\varphi(x))+a \qquad (49)$$

$$\varrho^{2n+1}(\varphi(x)+a)=\varrho^{2n+1}(\varphi(x)) \qquad (49\text{ bis})$$

car en retranchant, dans ces déterminants, de chaque colonne contenant les valeurs de fonction la colonne qui ne contient que les arguments de la même puissance, a disparaît complètement de ϱ^{2n+1}, tandis que le déterminant numérateur de ϱ^{2n} se laisse décomposer en deux dont l'un est le déterminant dénominateur multiplié par a. En substituant, au contraire, à φ_i $a\varphi_i$, on trouve

$$\varrho^{2n}(a\,\varphi(x)) = a\,\varrho^{2n}(\varphi(x)). \tag{50}$$

$$\varrho^{2n+1}(a\,\varphi(x) = \frac{1}{a}\,\varrho^{2n+1}(\varphi(x)). \tag{50 bis}$$

On en dérive un théorème remarquable. En combinant (48), (49) et (50) on trouve, en effet, si a_i et b_i désignent des constantes,

$$\varrho^{2n}\left\{\cfrac{b_r}{a_r + \cfrac{b_{r-1}}{a_{r-1} + \cdots \cfrac{b_1}{a_1 + \varphi(x)}}}\right\} = \cfrac{b_r}{a_r + \cfrac{b_{r-1}}{a_{r-1} + \cdots \cfrac{b_1}{a_1 + \varrho^{2n}\varphi(x)}}}$$

ou bien ce qui revient au même

$$\varrho^{2n}\left(\frac{\alpha + \beta\,\varphi(x)}{\gamma + \delta\,\varphi(x)}\right) = \frac{\alpha + \beta\,\varrho^{2n}\varphi(x)}{\gamma + \delta\,\varrho^{2n}\varphi(x)}. \tag{51}$$

La différence réciproque d'ordre pair d'une fonction linéaire fractionée de $\varphi(x)$ est donc la même fonction linéaire de la différence réciproque de $\varphi(x)$.

On peut donc développer $\dfrac{\alpha + \beta\,\varphi(x)}{\gamma + \delta\,\varphi(x)}$ en fraction continue d'interpolation de la forme (3) en connaissant seulement les différences réciproques de $\varphi(x)$. Considérons spécialement le développement en fraction continue de $\dfrac{1}{\varphi(x)}$. A l'aide de (48) et de la relation de récurrence (1) on trouve

$$\varrho^{2n+1}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right) - \varrho^{2n-1}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right) = -\varrho^{2n}(\varphi(x))\cdot\varrho^{2n}(\varphi(x))\cdot\{\varrho^{2n+1}(\varphi(x)) - \varrho^{2n-1}(\varphi(x))\}. \tag{52}$$

Le premier facteur du second membre est ici égal à $\varrho^{2n}(x_0\,x_1\ldots x_{2n-1}\,x_{2n+1})$, tandis que partout ailleurs $\varrho^n(\varphi(x))$ est une fonction des arguments $x_0\,x_1\ldots x_n$. Cela nous permet de développer $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ en une fraction continue dont les coefficients sont des différences réciproques de $\varphi(x)$. On trouve facilement

$$\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{\varphi(x_0)}\Bigg|\,1 + \cfrac{x - x_0}{\varphi(x_1)\varrho(x_0x_1) + \cfrac{(x - x_1)\varrho^2(x_0x_1x_2)}{\varrho^2(x_0x_1x_2) - \varphi(x_2) + \cfrac{(x - x_2)\varphi(x_0)}{\varrho^2(x_0x_1x_2)\{\varrho^2(x_0 \ldots x_1) - \varrho^2(x_0 \ldots x_2)\}}}}$$

$$+ \cfrac{(x - x_3)\varrho^4(x_0x_1 \ldots x_4)}{\varrho^4(x_0 \ldots x_4) - \varrho^2(x_0 \ldots x_3) + \cfrac{(x - x_4)\varrho^2(x_0x_1x_2)}{\varrho^4(x_0x_1x_2x_3x_4)\{\varrho^2(x_0 \ldots x_4) - \varrho^2(x_0 \ldots x_3)\}}} \tag{53}$$

La plupart des fractions continues étudiées jusqu'ici rentrent à ce type. (Ex: les fractions continues de Gauss, de Stieltjes, etc.) Les développements d'après la formule (3), au contraire, présenteront généralement une irrégularité au commencement. En faisant tendre tous les arguments vers a et en introduisant les fonctions p, ou trouvera la fraction continue suivante indiquée par M. Thiele:

$$\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{\varphi(a)} + \cfrac{x-a}{p^{3}_{0.1}} + \cfrac{x-a}{p_{1.0}\,p_{1.1}} + \cfrac{x-a}{\dfrac{p^{2}_{1.1}}{p_{0.2}\,p_{0.1}} + \cfrac{x-a}{\dfrac{p^{2}_{0.2}}{p_{1.1}\,p_{1.2}} + \cfrac{x-a}{\dfrac{p^{2}_{1.2}}{p_{0.2}\,p_{0.3}}}}}} \tag{54}$$

En posant $p_{0.n+1} = p_{2n}$, $p_{1.n+1} = p_{2n+1}$ (54) prendra la forme

$$\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{\varphi(a)} + \cfrac{x-a}{p^{2}_{0}} + \cfrac{x-a}{\dfrac{p^{2}_{1}}{p_{0}\,p_{2}} + \cfrac{x-a}{\dfrac{p^{2}_{2}}{p_{1}\,p_{3}} + \cfrac{x-a}{\dfrac{p^{2}_{3}}{p_{2}\,p_{4}}}}}} \tag{55}$$

(32) et (35) montrent maintenant que p_n satisfait à l'équation aux différences mêlées

$$p_{n-2}\,p_{n+1} = \frac{1}{n+1}\,p_{n-1}\,p'_n - \frac{1}{n}\,p_n\,p'_{n-1}. \tag{56}$$

Ici encore nous pourrons donc nous servir du schéma de calcul (41) en posant seulement $p_0 = a_0$, $p_1 = a_1$, $p_2 = a_2$.

Les théorèmes (48) ... (52) restent naturellement valables dans le cas limite où tous les arguments tendent vers la même valeur x. Notons particulièrement

$$r^{2n}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right) = \frac{1}{r^{2n}(\varphi(x))}. \tag{57}$$

Au moyen de la relation de récurrence (2) on en trouve

$$r\left(r^{2n+1}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)\right) = -\frac{r(r^{2n+1}\varphi(x))}{r^{2n}(\varphi(x))\,.\,r^{2n+2}(\varphi(x))} \tag{58}$$

de (44) et (45) on dérive en posant $a_0 = 1$, $a_i = 0$, $i > 0$

$$r^{2n}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right) = \frac{p_{2.n}}{p_{0.n+1}} \tag{59}$$

$$r^{2n+1}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right) = \frac{p_{-1,n+2}}{p_{1,n+1}} \qquad (59\text{ bis})$$

où a_{-1} est égal à 0 dans $p_{-1,n+2}$. En différentiant ces équations on trouve encore

$$(2n+1)\, r\left(r^{2n}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)\right) = -\frac{p^2_{0,n+1}}{p_{1,n}\, p_{1,n+1}} \qquad (60)$$

$$(2n+2)\, r\left(r^{2n+1}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)\right) = \frac{p^2_{1,n+1}}{p_{0,n+1}\, p_{0,n+2}}. \qquad (60\text{ bis})$$

§ 34. Nous avons vu l'influence qu'exercent sur les différences réciproques le changement du zéro et de l'unité des valeurs de fonction. Nous allons maintenant étudier l'effet des changements correspondantes des arguments.

ϱ^n ne change pas si on déplace le zéro, car il n'y entre que des différences entre les arguments. Si, au contraire, l'on substitue, dans (10) αx_i à x_i on aura

$$\varrho^{2n}_z \varphi(x) = \varrho^{2n}_x \varphi(x) \qquad z = \alpha x. \qquad (61)$$

On trouve de même par (11)

$$\varrho^{2n+1}_z \varphi(x) = \alpha\, \varrho^{2n+1}_x \varphi(x). \qquad (61\text{ bis})$$

Reste encore à étudier l'effet produit par la transformation $z_i = \frac{1}{x_i}$, mais nous nous bornerons ici au cas où tous les arguments coïncident.

Nous avons désigné par $p_{r,n}(\varphi(x))$ les déterminants des coefficients différentiels réciproques de $\varphi(x)$ par rapport à x; nous désignons par $\alpha_{r,n}(\varphi(x))$ les déterminants correspondants des coefficients différentiels réciproques par rapport à $\frac{1}{x}$, et nous allons chercher une relation entre $p_{r,n}$ et $\alpha_{r,n}$.

En appliquant la formule de Schlömilch

$$\frac{d^n y}{d\left(\frac{1}{x}\right)^n} = (-1)^n x^{n+1} \frac{d^n x^{n-1} y}{d x^n} \qquad (62)$$

et en posant

$$b_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n \varphi(x)}{d\left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

on aura

$$\rho_{r,\,n+1}(\varphi(x)) = \begin{vmatrix} b_r & b_{r+1} \dots & b_{r+n} \\ b_{r+1} & b_{r+2} & \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{r+n} & \dots & b_{r+2n} \end{vmatrix}$$

$$(-1)^{(n+1)(r+n)} \cdot x^{(n+1)(r+n+1)} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{r!} D^r(x^{r-1}\varphi(x)) & \dots\dots & \frac{1}{(r+n)!} D^{r+n}(x^{r+n-1}\varphi(x)) \\ \frac{1}{(r+1)!} D^{r+1}(x^r\varphi(x)) & \dots\dots & \frac{1}{(r+n+1)!} D^{r+n+1}(x^{r+n}\varphi(x)) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(r+n)!} D^{r+n}(x^{r+n-1}\varphi(x)) & \dots & \frac{1}{(r+2n)!} D^{r+2n}(x^{r+2n-1}\varphi(x)) \end{vmatrix}$$

Or, nous avons démontré, plus haut, la relation

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{r!} D^r\varphi(x) & \dots\dots & \frac{1}{(r+n)!} D^{r+n}(x^n\varphi(x)) \\ \frac{1}{(r+1)!} D^{r+1}(x\varphi(x)) & \dots & \frac{1}{(r+n+1)!} D^{r+n+1}(x^{n+1}\varphi(x)) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(r+n)!} D^{r+n}(x^n\varphi(x)) & \dots & \frac{1}{(r+2n)!} D^{r+2n}(x^{2n}\varphi(x)) \end{vmatrix} =$$

$$x^{n(n+1)} \begin{vmatrix} a_r & a_{r+1} \dots & a_{r+n} \\ a_{r+1} & a_{r+2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r+n} & \dots & a_{r+2n} \end{vmatrix} = x^{n(n+1)}\, p_{r,n+1}(\varphi(x)) \qquad (63)$$

où

$$a_r = \frac{1}{r!}\frac{d^r\varphi(x)}{dx^r}.$$

On a donc la relation bien simple

$$\rho_{r,n}(\varphi(x)) = (-1)^{r\cdot n}\, x^{n(r+2n-1)}\, p_{r,n}(x^{r-1}\varphi(x)). \qquad (64)$$

On en trouve, pour les coefficients différentiels réciproques

$$r^{2n}\binom{1}{x}(q(x)) = \frac{\varDelta_{0,n+1}(q(x))}{\varDelta_{2,n}(q(x))} \cdots x^{2n+1}\,\frac{p_{0,n+1}(q(x).x^{-1})}{p_{2,n}(q(x).x)} \tag{65}$$

$$r^{2n+1}\binom{1}{x}(q(x)) = -\frac{\varDelta_{3,n}(q(x))}{\varDelta_{1,n+1}(q(x))} = -x^{-2n-2}\cdot\frac{p_{3,n}(x^2\,q(x))}{p_{1,n+1}(q(x))}. \tag{66}$$

Quelques invariants différentiels.

§ 35. Au § 9 nous avons indiqué la formule

$$\varrho^{2n}\left\{\frac{\alpha+\beta\,q(x)}{\gamma+\delta\,q(x)}\right\} = \frac{\alpha+\beta\,\varrho^{2n}q(x)}{\gamma+\delta\,\varrho^{2n}q(x)}, \tag{5 I}$$

pour les différences réciproques d'ordre impair il n'existe aucune relation simple correspondante. Les déterminants dénominateurs de celles-ci, au contraire, ont une propriété remarquable que nous allons mettre en évidence. En posant dans le déterminant

$$|1,\ q_i,\ x_i,\ x_i q_i,\ \ldots\ x_i^n,\ x_i^n q_i| \tag{67}$$

$q_i = \frac{1}{\psi_i}$ on trouve que celui-ci égale

$$\frac{(-1)^{n+1}}{\psi_0\,\psi_1\,\psi_2\ldots\psi_{2n+1}}\cdot|1,\ \psi_i,\ x_i,\ x_i\psi_i,\ \ldots\ x_i^n,\ x_i^n\psi_i|. \tag{68}$$

Si l'on remplace q_i par $q_i + a$ le déterminant reste invariable; mais si l'on remplace q_i par αq_i celui-ci est multiplié par α^{n+1}. Que $\delta(x_0 x_1)$ soit la différence divisée de Newton

$$\frac{q_0 - q_1}{x_0 - x_1}$$

on verra, que la quantité

$$\mathfrak{I}_1 = \frac{|1,\ q_i,\ x_i,\ x_i q_i,\ \ldots\ x_i^n,\ x_i^n q_i|}{\delta(x_0 x_1)\,\delta(x_2 x_3)\,\delta(x_4 x_5)\ldots\delta(x_{2n}\,x_{2n+1})} \tag{69}$$

admet une transformation projective

$$q_i = \frac{\alpha+\beta\,\psi_i}{\gamma+\delta\,\psi_i}$$

c'est donc un invariant. Cette propriété se conserve quand même nous divisons $\mathfrak{I}_1$ par $\varDelta(x_0 x_1 \ldots x_{2n+1})$, la fonction alternante de $x_0 x_1 \ldots x_{2n+1}$. Si, particulièrement, nous faisons tendre tous les arguments vers la même valeur x, le dénominateur sera la $(n+1)^{\text{ième}}$ puissance du coefficient différentiel de q, tandis que le

numérateur égale le déterminant dénominateur de (24 bis). On a alors la série suivante d'invariants différentiels

$$a_1 : a_1;\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} : a_1^2;\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix} : a_1^3;\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{vmatrix} : a_1^4; \ldots \tag{70}$$

où

$$a_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n \varphi(x)}{dx^n}.$$

La première en est 1, la seconde est, à une constante près, *la dérivée de Schwartz*. Ces quantités admettent une transformation projective de la fonction φ, mais nous pouvons dériver encore une autre série de déterminants admettant la même transformation de la variable indépendante. En substituant dans le déterminant (67) αx_i à x_i, celui-ci se multiple par $\alpha^{n(n+1)}$; il reste invariable, au contraire, par le changement du zéro de l'argument. Enfin, en faisant $x_i = \frac{1}{z_i}$ on trouve facilement

$$\left|1, \varphi_i, x_i, x_i\varphi_i, \ldots x_i^n, x_i^n\varphi_i\right| = \frac{\left|1, \varphi_i, z_i, z_i\varphi_i, \ldots z_i^n, z_i^n\varphi_i\right|}{z_0^n z_1^n z_2^n \ldots z_{2n+1}^n}. \tag{71}$$

On voit alors que la quantité suivante

$$\Im_2 = \frac{\left|1, \varphi_i, x_i, x_i\varphi_i, \ldots x_i^n, x_i^n\varphi_i\right|}{\left\{\delta(x_0x_1)\delta(x_2x_3)\ldots\delta(x_{2n}x_{2n+1})\right\}^{n+1}\Delta(x_0x_1\ldots x_{2n+1})} \tag{72}$$

reste invariable en effectuant la transformation

$$x_i = \frac{\alpha z_i + \beta}{\gamma z_i + \delta}.$$

Si l'on fait tendre tous les arguments vers x, on aura la série infinie suivante d'invariants différentiels

$$a_1 : a_1;\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} : a_1^4;\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix} : a_1^9; \ldots \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n+1} & \ldots & a_{2n-1} \end{vmatrix} : a_1^{n^2} \ldots \tag{73}$$

qui admettent tous une transformation projective de la variable *indépendante*.

Différences réciproques de $\varphi(x) + \alpha x$ et de $x^i\varphi(x)$.

§ 36. En général on n'a pas de moyen d'ajouter ensemble deux fractions continues, bien plus, la simple addition d'une fonction linéaire de la variable indépendante à une fraction continue cause — Stieltjes[1] l'a montré — des changements de celle-ci assez radicaux. Il est, cependant, facile de traiter ce problème à l'aide des différences réciproques. Remplaçons dans le déterminant (11) φ_i par $\alpha x_i + \varphi_i$ est retranchons de chaque colonne contenant des valeurs de fonction la suivante, multipliée par α. Le déterminant numérateur restera invariable, tandis que le déterminant dénominateur peut se décomposer en une somme de deux déterminants dont l'un égale le déterminant dénominateur primitif, tandis que l'autre est égal au déterminant numérateur multiplié par α. On trouve donc

$$\varrho^{2n+1}\left(\frac{1}{\varphi(x)+\alpha x}\right) = \varrho^{2n+1}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right) + \alpha \tag{74}$$

et spécialement

$$r^{2n+1}\left(\frac{1}{\varphi(x)+\alpha x}\right) = r^{2n+1}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right) + \alpha. \tag{75}$$

En combinant la relation de récurrence (2) et (75) on trouve

$$r\{r^{2n}[\varphi(x)+\alpha x]\} = \frac{r[r^{2n}\varphi(x)]}{\{1+\alpha r^{2n+1}[\varphi(x)]\}\cdot\{1+\alpha r^{2n-1}[\varphi(x)]\}} \tag{77}$$

$$r^{2n+2}[\varphi(x)+\alpha x] - r^{2n}[\varphi(x)+\alpha x] = \{r^{2n+2}[\varphi(x)] - r^{2n}[\varphi(x)]\}\cdot\{1+\alpha\cdot r^{2n+1}[\varphi(x)]\}^2. \tag{78}$$

§ 37. Si l'on connaît les fonctions p de $\varphi(x)$, on peut en dériver les coefficients différentiels réciproques de $x^i\varphi(x)$, pourvu que i soit un entier. En effet, si dans le déterminant $p_{r,n+1}[\varphi(x)]$ on substitue partout $x\varphi(x)$ à $\varphi(x)$, on trouve

$$p_{r,n+1}[x\varphi(x)] = \begin{vmatrix} xa_r + a_{r-1} & xa_{r+1} + a_r & \cdots & xa_{r+n} + a_{r+n-1} \\ xa_{r+1} + a_r & xa_{r+2} + a_{r+1} & & \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ xa_{r+n} + a_{r+n-1} & \cdots & \cdots & xa_{r+2n} + a_{r+2n-1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x^{n+1} & -x^n & x^{n-1} & \cdots & (-1)^{n+1} \\ a_{r-1} & a_r & a_{r+1} & \cdots & a_{r+n} \\ a_r & a_{r+1} & a_{r+2} & \cdots & a_{r+n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{r+n-1} & a_{r+n} & a_{r+n+1} & \cdots & a_{r+2n} \end{vmatrix} \tag{79}$$

[1] Correspondance d'Hermite et de Stieltjes II, p. 360. 1905

On trouve plus généralement, si i est un nombre entier positif

$$p_{r,n+1}[x^i q(x)] =$$

$$\frac{1}{(i-1)!\,(i-2)!\ldots 2!\,1!}\begin{vmatrix} x^{n+i} & -x^{n+i-1} & \ldots & (-1)^{n+i} \\ (n+i)x^{n+i-1} & -(n+i-1)x^{n+i-2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n+i)(n+i-1)\ldots(n+2)x^{n+1} & -(n+i-1)\ldots(n+1)x^{n} & \ldots & 0 \\ a_{r-i} & a_{r-i+1} & \ldots & a_{r+n} \\ a_{r-i+1} & a_{r-i+2} & \ldots & a_{r+n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r+n-i} & a_{r+n-i+1} & \ldots & a_{r+2n} \end{vmatrix} \qquad (80)$$

Cela se démontre facilement par induction; car en remplaçant partout dans ce déterminant $q(x)$ par $xq(x)$ et en effectuant la différentiation, on aura

$$p_{r,n+1}[x^{i+1}q(x)] = \frac{1}{(i-1)!\ldots 2!\,1!}\begin{vmatrix} x^{n+i} & \ldots & (-1)^{n+i} \\ (n+i)x^{n+i-1} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ (n+i)\ldots(n+2)x^{n+1} & \ldots & 0 \\ a_{r-i-1}+xa_{r-i} & \ldots & a_{r+n-1}+xa_{r+n} \\ a_{r-i}+xa_{r-i+1} & \ldots & a_{r+n}+xa_{r+n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r+n-i-1}+xa_{r+n-i} & \ldots & a_{r+2n-1}+xa_{r+2n} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{i!\,(i-1)!\ldots 1!}\begin{vmatrix} x^{n+i+1} & \ldots & (-1)^{n+i+1} \\ (n+i+1)x^{n+i} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ (n+i+1)\ldots(n+2)x^{n+1} & \ldots & 0 \\ a_{r-i-1} & \ldots & a_{r+n} \\ a_{r-i} & \ldots & a_{r+n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r+n-i-1} & \ldots & a_{r+2n} \end{vmatrix}$$

c. q. f. d.

En faisant dans (80) $x=0$, tous les éléments des i premières lignes du déterminant seront nuls sauf un; on peut donc abaisser le degré du déterminant par i unités d'où on trouve la formule élégante

$$\{p_{r,n}[x^i q(x)]\}_{x=0} = \{p_{r-i,n}[q(x)]\}_{x=0} \qquad (81)$$

où l'on doit poser $x=0$ après la différentiation.

En considérant les formules (37), (38) et (59), (60) (où les coefficients différentiels réciproques s'expriment par les fonctions p), on voit facilement par (81), qu'on a les deux relations suivantes

$$r^n[x\varphi(x)]_{x=0} = r^{n-1}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)_{x=0} \tag{82}$$

$$(n+1)r\{r^n[x\varphi(x)]\}_{x=0} = nr\left[r^{n-1}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)\right]_{x=0}. \tag{83}$$

Afin de pouvoir aussi diviser une fraction continue par une puissance de la variable indépendante nous substituons partout dans le déterminant $p_{r,n+1}[\varphi(x)]$ $x^{-1}\varphi(x)$ à $\varphi(x)$ en faisant observer que

$$\frac{1}{r!}D^r\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right) = \frac{a_r}{x} - \frac{a_{r-1}}{x^2} + \frac{a_{r-2}}{x^3} - \cdots - \frac{a_0}{(-x)^{r+1}}.$$

En ajoutant, dans le déterminant ainsi obtenu, à chaque ligne la ligne précédente divisée par x, on aura

$$p_{r,n+1}[x^{-1}\varphi(x)] = x^{-n-1}\begin{vmatrix} \mu_{0,1} & \mu_{1,1} & \cdots & \mu_{n,1} \\ a_{r+1} & a_{r+2} & \cdots & a_{r+n+1} \\ a_{r+2} & a_{r+3} & \cdots & a_{r+n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r+n} & a_{r+n+1} & \cdots & a_{r+2n} \end{vmatrix} \tag{84}$$

où

$$\mu_{i,1} = a_{r+i} - \frac{a_{r+i-1}}{x} + \frac{a_{r+i-2}}{x^2} - \cdots + \frac{a_0}{(-x)^{r+i}}. \tag{85}$$

On pourra de nouveau traiter de la même manière (84) en substituant $x^{-1}\varphi(x)$ à $\varphi(x)$; on trouvera alors

$$p_{r,n+1}[x^{-2}\varphi(x)] = x^{-2n-2}\begin{vmatrix} \mu_{0,2} & \mu_{1,2} & \mu_{2,2} & \cdots & \mu_{n,2} \\ \mu_{1,1} & \mu_{2,1} & \mu_{3,1} & \cdots & \mu_{n+1,1} \\ a_{r+2} & a_{r+3} & a_{r+4} & \cdots & a_{r+n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r+n} & a_{r+n+1} & a_{r+n+2} & \cdots & a_{r+2n} \end{vmatrix} \tag{86}$$

où

$$\mu_{i,2} = a_{r+i} - \frac{2}{x}a_{r+i-1} + \frac{3}{x^2}a_{r+i-2} - \cdots + \frac{r+i+1}{(-x)^{r+i}}a_0 \tag{87}$$

et ainsi de suite. Nous faisons remarquer surtout qu'en faisant tendre x vers ∞ en (84), on aura

$$\lim_{x=\varrho}\{x^n p_{r,n}[x^{-1}\varphi(x)]\} = \lim_{x=\varrho}\{p_{r,n}[\varphi(x)]\} \tag{88}$$

et généralement

$$\lim_{x=\varrho}\{x^{in} p_{r,n}[x^{-i}\varphi(x)]\} = \lim_{x=\varrho}\{p_{r,n}[\varphi(x)]\}. \tag{89}$$

Les formules (79) et (84) peuvent servir à la dérivation d'expressions de déterminants pour les dénominateurs et les numérateurs des réduites de la fraction continue (36). Nous désignons ceux-ci par $\mathfrak{N}_n(z)$ et $\mathfrak{T}_n(z)$ et trouvons suivant le théorème de la fin du § 28

$$\mathfrak{N}_{2n}(z) = \begin{vmatrix} z^{n-1} & z^{n-2} & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+1} \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n-1} \end{vmatrix} : p_{1,n} \tag{90}$$

$$\mathfrak{N}_{2n+1}(z) = \begin{vmatrix} z^n & z^{n-1} & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+1} \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix} : p_{2,n} \tag{90 bis}$$

$$\mathfrak{T}_{2n}(z) = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_{n-1} \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n-1} \end{vmatrix} : p_{1,n} \tag{91}$$

$$\mathfrak{T}_{2n+1}(z) = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+1} \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix} : p_{2,n} \tag{91 bis}$$

où

$$\lambda_0 = a_1 z^n + a_0 z^{n-1} \qquad \mu_0 = a_0 z^n$$
$$\lambda_1 = a_2 z^n + a_1 z^{n-1} + a_0 z^{n-2} \qquad \mu_1 = a_1 z^n + a_0 z^{n-1}$$
$$\cdots \qquad \cdots$$
$$\lambda_{n-1} = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 \qquad \mu_n = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$$

Sur une transformation de la fraction continue.

§ **38.** En traitant des fractions continues on a souvent besoin de diverses transformations. Les plus simples consistent en réductions ou en intercalations et supprimations de réduites en nombre fini ou infini. De telles transformations

ont été traitées par plusieurs auteurs, la première fois, sans doute, par LAGRANGE.[1] Nous traiterons ici une transformation de la fraction continue d'une tout autre nature, intéressante surtout par l'analogie qu'elle présente à la transformation d'Euler d'une série de puissances.

On dit parfois que (36) est un développement de fraction continue suivant des puissances de z, parce qu'elle correspond entièrement à une série de puissance en z. Nous allons voir qu'il est possible de transformer une fraction continue suivant des puissances de x en une fraction continue suivant des puissances de $z = \frac{x}{1-x}$. En effet dans son »Institutiones calculi differentialis» (1755) p. 281 EULER a démontré que si

$$z = \frac{x}{1-x}, \quad \Delta a_n = a_{n+1} - a_n, \qquad \Delta^{i+1} a_n = \Delta^i a_{n+1} - \Delta^i a_n$$

on a la relation

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = a_0 + a_1 z + \Delta_1 z^2 + \Delta_1^2 z^3 + \Delta_1^3 z^4 + \cdots \qquad (92)$$

Pour développer le premier membre en une fraction continue de la forme (40) on n'a qu'à déterminer $p_{2.n} = p_{2n}$, $p_{1.n} = p_{2n-1}$. Nous désignons par $q_{2.n}$ et $q_{1.n}$ les fonctions correspondantes formées par les coefficients du second membre, et nous allons chercher une relation entre les p et les q. Nous transformons $p_{1.n}$ en retranchant de chaque colonne celle qui précède en laissant invariable la première colonne. Dans le déterminant ainsi obtenu nous retranchons encore de chaque colonne la précédente en laissant invariables, cette fois, les deux premières colonnes, et nous continuons ainsi le plus longtemps possible. Nous transformons encore le déterminant ainsi obtenu en appliquant à ses lignes le même procédé. On trouvera alors

$$p_{1.n} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & \Delta_1 & \Delta_1^2 & \dots & \Delta_1^{n-1} \\ a_2 & \Delta_2 & \Delta_2^2 & \dots & \Delta_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & \Delta_n & \Delta_n^2 & \dots & \Delta_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & \Delta_1 & \Delta_1^2 & \dots & \Delta_1^{n-1} \\ \Delta_1 & \Delta_1^2 & \Delta_1^3 & \dots & \Delta_1^n \\ \Delta_1^2 & \Delta_1^3 & \Delta_1^4 & \dots & \Delta_1^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_1^{n-1} & \Delta_1^n & \dots & & \Delta_1^{2n-2} \end{vmatrix} \qquad (93)$$

mais le dernier déterminant et justement $q_{1.n}$; on aura donc

$$p_{1.n} = q_{1.n}. \qquad (94)$$

Considérons ensuite $q_{2.n}$:

[1] LAGRANGE: Mémoires de l'Acad. de Berlin 1776. Voir aussi: T. N. THIELE: Tidsskrift for Mathematik 1870, pag. 158. Köbenhavn.

$$q_{2.n} = \begin{vmatrix} J_1 & J_1^2 & \dots & J_1^n \\ J_1^2 & J_1^3 & \dots & J_1^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ J_1^n & J_1^{n+1} & \dots & J_1^{2n} \end{vmatrix}; \tag{95}$$

en répétant maintenant les opérations indiquées plus haut, mais en sens inverse, nous transformerons celui-ci en

$$q_{2.n} = \begin{vmatrix} J_1 & J_2 & J_3 & \dots & J_n \\ J_2 & J_3 & J_4 & \dots & J_{n+1} \\ J_3 & J_4 & J_5 & \dots & J_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ J_n & \dots & \dots & \dots & J_{2n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{2n} \end{vmatrix} \tag{96}$$

mais par la comparaison de (90 bis) on voit que ce dernier déterminant est justement le déterminant numérateur de $\mathfrak{R}_{2n+1}(1)$; on aura donc

$$q_{2.n} = p_{2.n} \cdot \mathfrak{R}_{2n+1}(1). \tag{97}$$

Nous avons donc démontré le théorème suivant: Un développement en fraction continue suivant des puissances de x aux coefficients $p_{1.n}$ et $p_{2.n}$ et aux dénominateurs de réduite $\mathfrak{R}_n(x)$ peut être transformé en un développement en fraction continue suivant des puissances de $z = \frac{x}{1-x}$ aux coefficients $q_{1.n} = p_{1.n}$ et $q_{2.n} = p_{2.n} \cdot \mathfrak{R}_{2n+1}(1)$.

Représentation des différences réciproques par des intégrales.

§ 39. Soit $f(t)$ une fonction analytique régulière à l'intérieur d'un domaine K; soit Γ un contour tel que toute la région du plan non extérieure à Γ soit dans l'intérieur de K, on aura, suivant le théorème de Cauchy, pour tout point x de cette région

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-x}\, dt \tag{98}$$

d'où

$$D_x^n f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t-x)^{n+1}}\, dt. \tag{99}$$

Pour le coefficient différentiel réciproque du $n^{\text{ième}}$ ordre on peut indiquer une

expression qui présente une analogie intéressante avec cette dernière formule. Soit $\mathfrak{N}_n(t)$ le $n^{\text{ième}}$ dénominateur de réduite de (36), on aura alors

$$r_x^n f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_J \frac{\mathfrak{N}_{n+1}^n(t)\, f(t)}{(t-x)^{n+1}}\, dt. \tag{100}$$

On trouve même une formule correspondante pour la différence réciproque du $n^{\text{ième}}$ ordre à arguments arbitraires. Pour trouver celle-ci, je suppose donnée une série d'arguments $x_0 x_1 \ldots x_n \ldots$ tout arbitraires correspondantes aux valeurs de fonction $f(x_0) f(x_1) \ldots f(x_n) \ldots$ Désignons par $N_n(x)$ et $T_n(x)$ les $n^{\text{ièmes}}$ dénominateurs et numérateurs de réduite de (3), on aura alors (v. (6) et (6 bis)) les équations

$$\frac{1}{2\pi i}\int_J \frac{N_{2n}(x_i)\, f(t)}{t-x_i}\, dt = T_{2n}(x_i) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots 2n-1) \tag{101}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_J \frac{N_{2n+1}(x_i)\, f(t)}{t-x_i}\, dt = T_{2n+1}(x_i) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots 2n). \tag{102}$$

Posons

$$\begin{aligned} \psi'_{i,n}(x) &= (x-x_i)\,(x-x_{i+1}) \ldots (x-x_n) \\ \psi'_{0,n}(x) &= \psi_n(x). \end{aligned} \tag{103}$$

En divisant dans le système d'équations (101) la $(i+1)^{\text{ème}}$, la $(i+2)^{\text{ième}}$, .. la $(i+n+1)^{\text{ième}}$ équation par $\psi'_{i,n+i}(x_i)$, $\psi'_{i,n+i}(x_{i+1})$, $\ldots \psi'_{i,n+i}(x_{i+n})$ respectivement et en les ajoutant ensemble on trouvera

$$\frac{1}{2\pi i}\int_J f(t)\, \frac{N_{2n}(t)}{\psi_{i,n+i}(t)}\, dt = 1 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots n-1) \tag{104}$$

le coefficient de la puissance la plus élevée de x en $T_{2n}(x)$ étant 1 (voir (5)). Du système d'équations (102) on dérive de même

$$\frac{1}{2\pi i}\int_J f(t)\, \frac{N_{2n+1}(t)}{\psi_{i,n+i}(t)}\, dt = \varrho^{2n}(x_0 x_1 \ldots x_{2n}) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots n) \tag{105}$$

le coefficient de x^n en $T_{2n+1}(x)$ étant ϱ^{2n}. En multipliant chacune des équations du système (104) par une quantité arbitraire A_i et en les ajoutant ensemble, on aura la formule importante

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(t)\,\frac{N_{2n}(t)\,\varphi_{n-1}(t)}{\psi_{2n-1}(t)}\,dt = A_0 + A_1 + \cdots + A_{n-1} \tag{106}$$

où $\varphi_{n-1}(t)$ est un polynôme du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré à coefficients arbitraires; le coefficient de t^{n-1} est $A_0 + A_1 + \cdots + A_{n-1}$. Par le système (105) on obtiendra de même

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(t)\,\frac{N_{2n+1}(t)\,\varphi_n(t)}{\psi_{2n}(t)}\,dt = (A_0 + A_1 + \cdots + A_n)\,\varrho^{2n}(x_0 x_1 \ldots x_{2n}) \tag{107}$$

où $\varphi_n(t)$ est un polynôme arbitraire du $n^{\text{ième}}$ degré, dans lequel le coefficient de la puissance la plus élevée de t est $A_0 + A_1 + \cdots + A_n$. Plusieurs formules remarquables se laissent dériver de (106) et de (107). En posant $\varphi_{n-1}(t) = N_{2n}(t)$ et $\varphi_n(t) = N_{2n+1}(t)$ on aura

$$\varrho^{2n-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} N_{2n}^2(t)\,\frac{f(t)}{\psi_{2n-1}(t)}\,dt \tag{108}$$

$$\varrho^{2n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} N_{2n+1}^2(t)\,\frac{f(t)}{\psi_{2n}(t)}\,dt \tag{108 bis}$$

donc en général

$$\varrho^n(x_0 x_1 \ldots x_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(t)\,\frac{N_{n+1}^2(t)}{\psi_n(t)}\,dt \tag{109}$$

comme analogie de la formule

$$\delta^n(x_0 x_1 \ldots x_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(t)}{\psi_n(t)}\,dt.$$

En faisant dans (106) $\varphi_{n-1}(t) = N_i(t)$ on trouve

$$\int_{\Gamma} N_{2n}(t)\,N_i(t)\,\frac{f(t)}{\psi_{2n-1}(t)}\,dt = 0 \qquad i < 2n-1 \tag{110}$$

$$\int_{\Gamma} N_{2n}(t)\,N_{2n-1}(t)\,\frac{f(t)}{\psi_{2n-1}(t)}\,dt = 2\pi i. \tag{111}$$

On trouve de même par (107) en posant $\varphi_n(t) = N_i(t)$

$$\int_{\Gamma} N_{2n+1}(t)\,N_i(t)\,\frac{f(t)}{\psi_{2n}(t)}\,dt = 0 \qquad i < 2n+1 \tag{112}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} N_{2n+1}(t)\, N_{2n+2}(t)\, \frac{f(t)}{\psi'_{2n}(t)}\, dt = \varrho^{2n}(x_0 x_1 \ldots x_{2n}).\, \varrho^{2n+1}(x_0 x_1 \ldots x_{2n+1}). \quad (113)$$

On peut encore dériver une formule analogue à (113). Les dénominateurs de réduite satisfont, en effet, à la relation de récurrence

$$N_{2n+2}(t) = (\varrho^{2n+1} - \varrho^{2n-1})\, N_{2n+1}(t) + (t - x_{2n})\, N_{2n}(t).$$

En multipliant par $\frac{1}{2\pi i} f(t) \frac{N_{2n+1}(t)}{\psi_{2n}(t)}\, dt$ les deux membres de cette équation et en intégrant, on aura d'après (113) et (108 bis)

$$\varrho^{2n}.\varrho^{2n-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(t)\, \frac{N_{2n}(t)}{\psi'_{2n-1}(t)}\, \frac{N_{2n+1}(t)}{\psi'_{2n-1}(t)}\, dt. \quad (113\text{ bis})$$

On a donc en général

$$\varrho^{n-1}(x_0 x_1 \ldots x_{n-1}).\, \varrho^{n}(x_0 x_1 \ldots x_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(t)\, \frac{N_{n+1}(t)\, N_n(t)}{\psi'_{n-1}(t)}\, dt. \quad (114)$$

Toutes ces formules restent valables quand même quelques uns des arguments coïncident. Considérons particulièrement le cas où tous les arguments $x_0 x_1 \ldots x_n$ tendent vers x.

On obtient par (109)

$$r_x^n f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(t)\, \frac{\mathfrak{N}_{n+1}^2(t)}{(t-x)^{n+1}}\, dt \quad (100)$$

où $\mathfrak{N}_n(t)$ indique le $n^{\text{ième}}$ dénominateur de réduite de (36). Maintenant les coefficients de (36) ne sont pas les coefficients différentiels réciproques eux-mêmes, mais leur premier coefficient différentiel ordinaire. Nous allons chercher encore une représentation par intégrales pour ces coefficients différentiels.

En substituant dans la formule

$$r_x^{2n+1} f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(t)\, \frac{\mathfrak{N}_{2n+2}^2(t)}{(t-x)^{2n+2}}\, dt$$

$(2n+1)\, r_x r_x^{2n} f(x).\, \mathfrak{N}_{2n+1}(t) + (t-x)\, \mathfrak{N}_{2n}(t)$ à $\mathfrak{N}_{2n+2}(t)$, on aura

$$r_x^{2n+1} f(x) = \frac{(2n+1)^2}{2\pi i}\{r_x r_x^{2n} f(x)\}^2 \cdot \int_{\Gamma} f(t)\, \frac{\mathfrak{N}_{2n+1}^2(t)}{(t-x)^{2n+2}}\, dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(t)\, \frac{\mathfrak{N}_{2n}^2(t)}{(t-x)^{2n}}\, dt$$

en retranchant la relation de récurrence

$$r_x^{2n+1} f(x) = (2n+1)\, r_x\, r_x^{2n} f(x) + r_x^{2n-1} f(x)$$

on trouvera

$$D_x(r_x^{2n} f(x)) = \frac{2n}{2\pi i} \int_l f(t)\, \frac{\mathfrak{R}_{2n+1}^x(t)}{(t-x)^{2n+2}}\, dt. \tag{115}$$

On trouvera de même en exprimant en

$$r_x^{2n} f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_l f(t)\, \frac{\mathfrak{R}_{2n+1}^x(t)}{(t-x)^{2n+1}}\, dt$$

$\mathfrak{R}_{2n+1}(t)$ par $\mathfrak{R}_{2n}(t)$ et $\mathfrak{R}_{2n-1}(t)$

$$r_x^{2n} f(x) = \frac{4n^2}{2\pi i} \{r_x\, r_x^{2n-1} f(x)\}^2 \cdot \int_l f(t)\, \frac{\mathfrak{R}_{2n}(t)}{(t-x)^{2n+1}}\, dt + r_x^{2n-2} f(x) + 4n\, r_x\, r_x^{2n-1} f(x)$$

d'où

$$D_x(r_x^{2n-1} f(x)) = -\frac{2n}{2\pi i} \int_l f(t)\, \frac{\mathfrak{R}_{2n}^x(t)}{(t-x)^{2n+1}}\, dt. \tag{116}$$

Nous avons donc démontré le théorème singulier *qu'on peut différentier* (100) *relativement à* x *en différentiant sous le signe d'intégration comme si* $\mathfrak{R}_{n+1}(t)$ *était indépendant de* x, *pourvu qu'on multiplie le résultat par* $(-1)^n$.

En réduisant la fraction continue de Thiele (36) de sorte que tous les dénominateurs partiels soient 1, les coefficients des numérateurs auront la forme

$$\frac{1}{n(n+1)}\, D_x(r_x^{n-1} f(x)) \cdot D_x(r_x^n f(x)).$$

Pour ces quantités aussi on trouve une expression d'intégrale simple. Au moyen de (110) et de (112) on voit que l'intégrale

$$\int_l \mathfrak{R}_{n+2}(t)\, \mathfrak{R}_n(t)\, \frac{f(t)}{(t-x)^{n+2}}\, dt$$

égale 0, que n soit un nombre pair ou impair. En posant maintenant

$$\mathfrak{R}_{n+2}(t) = (n+1)\, r_x\, r_x^n f(x) \cdot \mathfrak{R}_{n+1}(t) + (t-x)\, \mathfrak{R}_n(t) \tag{117}$$

on trouve

$$(n+1)\,r_x r_x^n f(x) \cdot \int_l^{\cdot} \mathfrak{R}_{n+1}(t) \cdot \mathfrak{R}_n(t) \cdot \frac{f(t)}{(t-x)^{n+2}} dt + (-1)^{n-1} \frac{2\pi i}{n} D_x[r_x^{n-1} f(x)] = 0$$

d'où la formule

$$\frac{(-1)^n}{n(n+1)} D_x[r^{n-1} f(x)] . D_x[r^n f(x)] = \frac{1}{2\pi i} \int_l^{\cdot} \mathfrak{R}_n(t)\, \mathfrak{R}_{n+1}(t) \frac{f(t)}{(t-x)^{n+2}} dt. \qquad (118)$$

CHAPITRE V.

§ 40. Nous allons maintenant développer quelques fonctions particulières en fraction continue par la méthode des différences réciproques. Nous serons ainsi conduits à un grand nombre de développements dont la plupart semblent être nouvelles. L'étude de la convergence de ceux-ci se fait aisément par les théorèmes exposés au chapitre II.

En posant $\beta = 0$ dans la fraction continue de GAUSS celle-ci devient égale à $F(\alpha, 1, \gamma, x)$. Il est maintenant facile de déterminer les coefficients différentiels réciproques de cette fonction. Car en posant dans (27) Chap. IV, $\varphi(x) = F(\alpha, 1, \gamma, x)$ et après la différentiation $x = 0$, on trouve

$$p_{r+1,n+1} = \left\{\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+r)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+r)}\right\}^{n+1} \frac{(\alpha+r+1)^n}{(\gamma+r+1)^n} \frac{(\alpha+r+2)^{n-1}}{(\gamma+r+2)^{n-1}} \cdots \frac{\alpha+r+n}{\gamma+r+n}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{\alpha+r+1}{\gamma+r+1} & \frac{(\alpha+r+1)(\alpha+r+2)}{(\gamma+r+1)(\gamma+r+2)} & \cdots & \frac{(\alpha+r+1)\dots(\alpha+r+n)}{(\gamma+r+1)\dots(\gamma+r+n)} \\ 1 & \frac{\alpha+r+2}{\gamma+r+2} & \frac{(\alpha+r+2)(\alpha+r+3)}{(\gamma+r+2)(\gamma+r+3)} & \cdots & \frac{(\alpha+r+2)\dots(\alpha+r+n+1)}{(\gamma+r+2)\dots(\gamma+r+n+1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \frac{\alpha+r+n+1}{\gamma+r+n+1} & \cdots & \cdots & \frac{(\alpha+r+n+1)\dots(\alpha+r+2n)}{(\gamma+r+n+1)\dots(\gamma+r+2n)} \end{vmatrix}$$

Désignons le déterminant par $\Delta(n, \alpha, \gamma)$; quand de chaque ligne on soustrait la précédente et réduit le degré du déterminant par une unité, on trouve

$$\Delta(n, \alpha, \gamma) = \frac{(\alpha-\gamma)^n n!}{(\gamma+r+1)(\gamma+r+2)^2 \dots (\gamma+r+n)^2 (\gamma+r+n+1)} \Delta(n-1, \alpha+1, \gamma+2).$$

On détermine par cela facilement la valeur du déterminant et on trouve

$$p_{r+1,n+1}=\left\{\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+r)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+r+n)}\right\}^{n+1}\left\{\frac{(\alpha+r+1)(\alpha-\gamma)}{\gamma+r+n+1}\right\}^{n}\left\{\frac{(\alpha+r+2)(\alpha-\gamma-1)}{\gamma+r+n+2}\right\}^{n-1}\dots$$

$$\dots\frac{(\alpha+r+n)(\alpha-\gamma-n+1)}{\gamma+r+2n}\,n!\,(n-1)!\dots 2!\,1!$$

En substituant cette valeur dans (40). Chap. IV, on trouve

$$F(\alpha,1,\gamma,x)=1+\cfrac{\alpha x}{\gamma-\cfrac{\gamma(\alpha+1)x}{\gamma+1-\cfrac{1\cdot(\gamma-\alpha)x}{\gamma+2-\cfrac{(\gamma+1)(\alpha+2)x}{\gamma+3-\cfrac{2\cdot(\gamma-\alpha+1)x}{\gamma+4-\ddots}}}}} \tag{1}$$

En appliquant, au contraire, la formule de la fonction réciproque [v. (54), Chap. IV], on trouve

$$F(\alpha,1,\gamma,x)=\cfrac{\gamma-1}{\gamma-1-\cfrac{\alpha(\gamma-1)x}{\gamma-1-\cfrac{1\cdot(\gamma-\alpha)x}{\gamma+1-\cfrac{(\alpha+1)\gamma x}{\gamma+2-\cfrac{2\cdot(\gamma-\alpha+1)x}{\gamma+3-\ddots}}}}} \tag{2}$$

ce qui est un cas particulier de la fraction continue de Gauss; d'ailleurs (1) n'est pas essentiellement différent de (2), à l'exception du commencement irrégulier. Les deux fractions continues sont convergentes dans tout le plan excepté sur l'axe des nombres réels de $+1$ à $+\infty$, et elles tendent vers les premiers membres.

Au contraire, en déterminant la valeur des coefficients différentiels réciproques de $F(\alpha,1,\gamma,x)$ dans le point $+1$ et en développant en fraction continue, on trouve

$$\cfrac{1}{\alpha-1-\gamma-\cfrac{\alpha(\alpha+1-\gamma)(1-x)}{\alpha+2-\gamma-\cfrac{1\cdot(2-\gamma)(1-x)}{\alpha+3-\gamma-\cfrac{(\alpha+1)(\alpha+2-\gamma)(1-x)}{\alpha+4-\gamma-\cfrac{2\cdot(3-\gamma)(1-x)}{\ddots}}}}} \tag{3}$$

Après la formule (54), Chap. IV, on devait s'attendre à ce que cette fraction continue tendrait vers $F(\alpha, 1, \gamma, x)$; mais en comparant avec (2) on voit qu'elle est, en effet, ègale à

$$\frac{\gamma-1}{\gamma-\alpha-1} F(\alpha, 1, \alpha-\gamma+2, 1-x).$$

En essayant de développer une fonction en fraction continue par la méthode des différences réciproques, il arrive donc quelque fois, qu'on trouve une fraction continue qui est certainement convergente, mais qui tend vers une autre fonction que celle qu'on s'était proposée de développer. Il est connu que la même chose peut arriver relativement à la formule de Taylor[1] ou à la formule générale d'interpolation de Newton. La question, s'il n'y a pourtant pas un certain rapport entre la valeur de la fraction continue et la fonction qu'on essayait de développer en fraction continue se présente immédiatement. Pour étudier cela nous allons considérer les réduites de la fraction continue de Gauss. On voit facilement que celles-ci sont:

$$\frac{V_1(0)\,V_2(n) - V_2(0)\,V_1(n)}{U_1(0)\,V_2(n) - U_2(0)\,V_1(n)} \quad \text{et} \quad \frac{V_1(0)\,U_2(n) - V_2(0)\,U_1(n)}{U_1(0)\,U_2(n) - U_2(0)\,U_1(n)} \tag{4}$$

où

$$U_1(n) = F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+2n, x) \qquad V_1(n) = F(\alpha+n, \beta+n+1, \gamma+2n+1, x)$$

$$U_2(n) = \frac{\Gamma(\gamma+2n)}{\Gamma(\gamma-\alpha+n)\,\Gamma(\gamma-\beta+n)} F(\alpha+n, \beta+n, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x)$$

$$V_2(n) = \frac{\Gamma(\gamma+2n+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+n+1)\,\Gamma(\gamma-\beta+n)} F(\alpha+n, \beta+n+1, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x).$$

En posant maintenant $\beta = 0$ on voit que $\frac{V_1(0)}{U_1(0)}$ est la fonction que nous avons ici essayée de développer en fraction continue, tandis que la valeur de la fraction continue est $\frac{V_2(0)}{U_2(0)}$.

§ **41.** Par la méthode des différences réciproques on peut encore développer la fonction hypergéométrique en une fraction continue de tout autre nature. Il est connu que la série hypergéométrique peut s'exprimer par des fonctions Γ, si $x = 1$. On a

[1] v. Jordan: Cours d'Analyse I, p. 269. 2ième édition.

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) \quad \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}.$$

Formons un tableau équi-distant de la fonction $[x]^m = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-m+1)}$ et complétons celui-ci par les différences réciproques. On trouve

		ϱ	ϱ^2	ϱ^3	ϱ^4
$x-2$	$[x-2]^m$		$\frac{1+m}{1-m}[x-2]^m$		$\frac{1+m}{1-m}\,\frac{2+m}{2-m}[x-2]^m$
		$m[x-2]^{m-1}$		$\frac{2(2-m)}{m(1+m)}[x-2]^{m-1}$	
$x-1$	$[x-1]^m$		$\frac{1+m}{1-m}[x-1]^m$		$\frac{1+m}{1-m}\,\frac{2+m}{2-m}[x-1]^m$
		$m[x-1]^{m-1}$		$\frac{2(2-m)}{m(1+m)}[x-1]^{m-1}$	
x	$[x]^m$		$\frac{1+m}{1-m}[x]^m$		$\frac{1+m}{1-m}\,\frac{2+m}{2-m}[x]^m$
		$m[x]^{m-1}$		$\frac{2(2-m)}{m(1+m)}[x]^{m-1}$	
$x+1$	$[x+1]^m$		$\frac{1+m}{1-m}[x+1]^m$		$\frac{1+m}{1-m}\,\frac{2+m}{2-m}[x+1]^m$
		$m[x+1]^{m-1}$		$\frac{2(2-m)}{m(1+m)}[x+1]^{m-1}$	
$x+2$	$[x+2]^m$		$\frac{1+m}{1-m}[x+2]^m$		$\frac{1+m}{1-m}\,\frac{2+m}{2-m}[x+2]^m$

généralement on trouve

$$\varrho^{2n}(x-n,\, x-n+1,\, \ldots\, x+n) = \frac{(1+m)(2+m)\ldots(n+m)}{(1-m)(2-m)\ldots(n-m)}[x]^m \tag{5}$$

$$\varrho^{2n+1}(x-n,\, x-n+1,\, \ldots\, x+n+1) = \frac{(2-m)(3-m)\ldots(n+1-m)}{m(1+m)\ldots(n+m)}\,\frac{n+1}{[x]^{m-1}} \tag{5 bis}$$

ce qui se démontre facilement par l'induction, car en substituant (5) et (5 bis) dans la formule de récurrence:

$$\varrho^{2n+2}(x-n-1,\, \ldots\, x+n+1) = \varrho^{2n}(x-n,\, \ldots\, x+n) + \frac{2n+2}{1}\,\frac{\varrho^{2n+1}(x-n,\, \ldots\, x+n+1)}{\varrho^{2n+1}(x-n-1,\, \ldots\, x+n)}$$

on trouve

$$\varrho^{2n+2}(x-n-1,\, \ldots\, x+n+1) = \frac{(1+m)\ldots(n+m)}{(1-m)\ldots(n-m)}[x]^m + \frac{2\cdot m\cdot(1+m)\ldots(n+m)}{(1-m)(2-m)\ldots(n+1-m)}[x]^m = \frac{(1+m)(2+m)\ldots(n+1+m)}{(1-m)(2-m)\ldots(n+1-m)}[x]^m \text{ etc.}$$

Si m est un nombre entier positif, $\begin{cases}\varrho^{2m-1}\\ \varrho^{2m}\end{cases}$ et toutes les différences réciproques plus élevées d'ordre $\begin{cases}\text{inégal}\\ \text{égal}\end{cases}$ deviennent $\begin{cases}0\\ \infty\end{cases}$. La fonction $[x]^m$ se réduit en ce cas à $x(x-1)\dots(x-m+1)$.

Au contraire, si m est un nombre entier négatif $[x]^m$ devient égal à $\frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x-m)}$, tandis que $\begin{cases}\varrho^{-2m}\\ \varrho^{1-2m}\end{cases}$ et toutes les différences réciproques plus élevées d'ordre $\begin{cases}\text{égal}\\ \text{inégal}\end{cases}$ deviennent $\begin{cases}0\\ \infty\end{cases}$.

Nous allons interpoler dans ce tableau, en utilisant les différences situées sur une ligne oblique tombante partant de l'argument x, et nous trouverons la fraction continue

$$[x+z]^m=[x]^m\left\{1+\cfrac{mz}{1.x+1.(1-m)+\cfrac{(1-m)(x-m+1)(z-1)}{3+2x-m+\cfrac{(1+m)(x+1)(z-2)}{3.(x+1)+2.(2-m)+\cfrac{(2-m)(x-m+2)(z-3)}{6+2x-m+\cfrac{(2+m)(x+2)(z-4)}{5(x+2)+3(3-m)+\cdots}}}}\right.$$

Au contraire, en utilisant les différences situées sur un zigzag horizontal partant de l'argument x, on trouve:

$$\frac{[x+z]^m}{[x]^m}=\frac{\Gamma(x+z+1)}{\Gamma(x+1)}\cdot\frac{\Gamma(x-m+1)}{\Gamma(x+z-m+1)}=1+\cfrac{z.m}{x+1-m+\cfrac{(z-1)(1-m)}{2+\cfrac{(z+1)(1+m)}{3(x+1-m)+\cfrac{(z-2)(2-m)}{2+\cfrac{(z+2)(2+m)}{5(x+1-m)+\cdots}}}}} \tag{6}$$

En changeant les notations cette fraction continue s'écrit

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1)=1+\cfrac{\alpha\beta}{\gamma-\cfrac{(1+\alpha)(1+\beta)}{2+\cfrac{(1-\alpha)(1-\beta)}{3\gamma-\cfrac{(2+\alpha)(2+\beta)}{2+\cfrac{(2-\alpha)(2-\beta)}{5\gamma-\cdots}}}}} \tag{7}$$

En interpolant la fonction réciproque on trouve de la même manière la fraction continue

$$F(\alpha, \beta, \gamma+\beta, 1) = \cfrac{1}{1+\cfrac{(-\alpha)\beta}{\gamma-\cfrac{(1+\alpha)(1-\beta)}{2+\cfrac{(1-\alpha)(1+\beta)}{3\gamma-\cfrac{(2+\alpha)(2-\beta)}{2+\cfrac{(2-\alpha)(2+\beta)}{5\gamma-\ddots}}}}}} \tag{8}$$

Pour étudier la convergence de (7) nous allons considérer les équations aux différences:

$$N_{2n+2} + (2n+1)\gamma N_{2n+1} + (n-\alpha)(n-\beta) N_{2n} = 0$$
$$N_{2n+1} - 2N_{2n} - (n+\alpha)(n+\beta) N_{2n-1} = 0.$$

En posant $N_{2n} = U(n)$, $N_{2n-1} = V(n)$ on déduit de ces équations par élimination les équations aux différences suivantes de 2ième ordre

$$V(n+2) + \delta.(2n+1)\, V(n+1) - (n^2-\alpha^2)(n^2-\beta^2)\, V(n) = 0$$

$$(2n+1)\, U(n+2) + \{4\delta.(n+1) + 2n(n+2) - 2(\gamma+\alpha\beta-1)\}\, U(n+1)$$
$$-(2n+3)(n+1+\alpha)(n+1+\beta)(n-\alpha)(n-\beta)\, U(n) = 0$$

où $$\delta = 2\gamma - \alpha - \beta - 1.$$

Par un calcul facile on voit qu'on peut déterminer les intégrales particulières $V_1(n)$, $V_2(n)$, $U_1(n)$, $U_2(n)$ de manière que

$$\frac{V_1(n)}{V_2(n)} \sim c_1 (-1)^n n^{-2\delta} \qquad \frac{U_1(n)}{U_2(n)} \sim c_2 (-1)^n n^{-2\delta-2}.$$

La fraction continue (7) tend donc vers $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$, si $\Re(\delta) > 0$, mais vers une autre fonction F_1, si $\Re(\delta) < -1$; au contraire, si $0 > \Re(\delta) > -1$, (7) oscillera, mais de manière que les réduites d'ordre pair tendent vers $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ et celles d'ordre impair vers F_1. Si $\Re(\delta) = 0$ ou si $\Re(\delta) = -1$, la fraction continue divergera.

En supprimant dans (7) toutes les deux réduites, on trouve la fraction continue remarquable

$$\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta) - \Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta) + \Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} =$$

$$\cfrac{\alpha\beta}{1.\delta + \cfrac{(\alpha^2-1)(\beta^2-1)}{3\delta + \cfrac{(\alpha^2-2^2)(\beta^2-2^2)}{5\delta + \cfrac{(\alpha^2-3^2)(\beta^2-3^2)}{7\delta + \ddots}}}} \qquad \delta = 2\gamma - \alpha - \beta - 1 \tag{9}$$

qui est convergente pour toutes les valeurs de α, β et γ sauf pour celles qui satisfont à la condition $\Re(\delta) = 0$; mais ce n'est que si $\Re(\delta) > 0$ qu'elle tend vers le premier membre; en substituant $-\delta$ à δ la fraction continue ne fait que changer de signe.

§ 42. Nous allons maintenant considérer quelques-unes des transcendentes élémentaires et nous commencons par la fonction exponentielle. Soit a un nombre arbitraire; on peut former le tableau suivant de différences réciproques:

		ϱ	ϱ^2	ϱ^3	ϱ^4	ϱ^5
$x-2$	a^{x-2}		$-a^{x-2}$		a^{x-2}	
		a^{2-x}		$-\dfrac{2a^{2-x}}{a-1}$		$3a^{2-x}$
		$a-1$				$a-1$
$x-1$	a^{x-1}		$-a^{x-1}$		a^{x-1}	
		a^{1-x}		$2a^{1-x}$		$3a^{1-x}$
		$a-1$		$a-1$		$a-1$
x	a^x		$-a^x$		a^x	
		a^{-x}		$-\dfrac{2a^{-x}}{a-1}$		$3a^{-x}$
		$a-1$				$a-1$
$x+1$	a^{x+1}		$-a^{x+1}$		a^{x+1}	
		a^{-x-1}		$2a^{-x-1}$		$3a^{-x-1}$
		$a-1$		$a-1$		$a-1$
$x+2$	a^{x+2}		$-a^{x+2}$		a^{x+2}	

généralement on a

$$\varrho^{2n}(x-n, x-n+1, \ldots x+n) = (-1)^n a^x$$

$$\varrho^{2n+1}(x-n, x-n+1, \ldots x+n+1) = (-1)^n \frac{a+1}{(a-1)a^x}.$$

En utilisant pour l'interpolation les différences sur une ligne oblique tombante on trouve la fraction continue suivante

$$a^z = 1 + \cfrac{z(a-1)}{1 - \cfrac{(z-1)(a-1)}{a+1 + \cfrac{(z-2)a(a-1)}{1(a+1) - \cfrac{(z-3)(a-1)}{2(a+1) + \cfrac{(z-4)a(a-1)}{3(a+1) - \cfrac{(z-5)(a-1)}{a+1+\ddots}}}}}}$$

Au contraire, en faisant usage des différences réciproques sur une ligne horizontale partant de l'argument x on trouve

$$a^z = 1 + \cfrac{z(a-1)}{1 + \cfrac{(z+1)(a-1)}{2 + \cfrac{(z-2)(a-1)}{3 + \cfrac{(z+2)(a-1)}{2 + \cfrac{(z-3)(a-1)}{5 + \cfrac{}{2 + \ddots}}}}}} \tag{10}$$

Pour étudier la convergence de cette fraction continue nous allons considérer le système d'équations aux différences:

$$\begin{aligned} N_{2n+2} &= (2n+1)N_{2n+1} + (z+n)(a-1)N_{2n} \\ N_{2n+1} &= \quad 2N_{2n} \quad -(z-n)(a-1)N_{2n-1}. \end{aligned}$$

En posant ici $N_{2n} = u(n)$, $N_{2n-1} = v(n)$ on dérive facilement par élimination

$$(2n-1)u(n+1) + \{2 + 2z(a-1) - 4n^2(a-1)\}u(n) - (a-1)^2(2n+1)(z-n)(z+n-1)u(n-1) = 0 \tag{11}$$

$$v(n+2) - (2n+1)(a+1)v(n+1) + (n^2-z^2)(a-1)^2 v(n) = 0 \tag{12}$$

Ces deux équations ont la même équation caractéristique, à savoir

$$t^2 - 2(a+1)t + (a-1)^2 = 0$$

dont les racines sont $t = a + 1 \pm 2\sqrt{a}$, en désignant par $\sqrt{a}$ la valeur de la racine carrée dont la partie réelle est positive. Le rapport entre ces racines est

$$\left(\frac{1-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)^2.$$

Si a est 0 ou négatif et réel, le module de cette quantité est égal à 1, mais pour toutes les autres valeurs de a plus petit que 1. Pour étudier aussi comment se comporte la fraction continue pour des valeurs réelles négatives de a, il faut former la transformée de Laplace de (11) et de (12) et en déterminer les racines ϱ_1 et ϱ_2 des équations déterminantes relativement aux deux points singuliers $(1+\sqrt{a})^2$ et $(1-\sqrt{a})^2$; on trouve alors que $\varrho_1 - \varrho_2$ est 0. (10) *et donc divergente si a est négatif réel, mais convergente pour toute autre valeur de a et pour toutes les valeurs de z.* Mais il reste encore à démontrer que la fraction continue tend réellement vers la fonction exponentielle. Posons dans (7) $\alpha = n$, $\beta = -z$ et $\gamma = \frac{n}{1-a}$ et faisons tendre n vers l'infini, $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ devient égale à

$$1 \quad \frac{z}{1}(1-a)^{\cdot} \quad \frac{z(z-1)}{1\cdot 2}(1-a)^{\cdot} \qquad a$$

tandis que les deux fractions continues coïncident.

En supprimant dant (10) toutes les deux réduites, on trouve:

$$\frac{a^z-1}{a^z+1} \qquad \cfrac{kz}{1+\cfrac{k^2(z^2-1^2)}{3+\cfrac{k^2(z^2-3^2)}{5+\cfrac{k^2(z^2-5^2)}{7+\cfrac{k^2(z^2-7^2)}{9+\cdot}}}}} \qquad \text{où} \quad k \quad \frac{a-1}{a+1} \tag{13}$$

La $n^{\text{ième}}$ réduite de cette fraction continue est

$$\frac{T_n}{N_n}=\frac{\dfrac{\Gamma(n+z)}{\Gamma(1+z)}F\left(n+z,\ n,\ 1+z,\ \dfrac{1}{a}\right)-\dfrac{\Gamma(n-z)}{\Gamma(1-z)}F\left(n-z,\ n,\ 1-z,\ \dfrac{1}{a}\right)}{\dfrac{\Gamma(n+z)}{\Gamma(1+z)}F\left(n+z,\ n,\ 1+z,\ \dfrac{1}{a}\right)+\dfrac{\Gamma(n-z)}{\Gamma(1-z)}F\left(n-z,\ n,\ 1-z,\ \dfrac{1}{a}\right)}.$$

On en déduit de plus

$$\frac{N_n+T_n}{N_n-T_n}=\frac{\Gamma(1-z)\,\Gamma(n+z)}{\Gamma(1+z)\,\Gamma(n-z)}\,\frac{F\left(n+z,\ n,\ 1+z,\ \dfrac{1}{a}\right)}{F\left(n-z,\ n,\ 1-z,\ \dfrac{1}{a}\right)}.$$

Déterminons maintenant les coefficients différentiels réciproques de la fonction exponentielle e^x. Ici deux formes différentes se présentent suivant que l'ordre est pair ou impair. On trouve

$$r_x^{2n}e^x=(-1)^n e^x \qquad r_x^{2n-1}e^x=(-1)^{n-1}n\,e^{-x}.$$

La fraction continue de Thiele donne alors

$$e^x \quad 1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{3-\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{5+\cfrac{x}{2+\cdot}}}}}} \tag{14}$$

Cette fraction continue se déduit aussi en posant dans (41), Chap. III, $\beta = 0$, $\gamma = 1$; car $e^x = 1 + xF\left(1, k, 2, \frac{x}{k}\right)$; (14) est convergent pour *toutes* les valeurs de x.

Mais on peut aussi déterminer les coefficients différentiels réciproques par rapport à $\frac{1}{x}$; par la formule (64), Chap. IV, on trouve facilement

$$r_x r_x^{2n} e^{\frac{1}{x}} = (-1)^{n+1} x^2 e^{-\frac{1}{x}} q_n^2 \qquad r_x r_x^{2n-1} e^{\frac{1}{x}} = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{n \cdot q_{n-1} q_n}$$

où

$$q_n = F(-n, 1+n, k, -kx)$$

et par cela la fraction continue

$$e^{\frac{1}{x+z}} = e^{\frac{1}{x}} \left\{ 1 - \cfrac{z}{1 \cdot x^2 q_1 + \cfrac{q_1 z}{2 - \cfrac{q_1 z}{3 \cdot x^2 q_1 + \cfrac{q_2 z}{2 - \cfrac{q_1 z}{5 \cdot x^2 q_2 + \cfrac{q_3 z}{2 - \ddots}}}}}} \right.$$

Les coefficients de la fraction continue s'expriment donc par des fonctions besseliennes, mais non pas d'une manière très simple. Au contraire, en suppriment toutes les deux réduites, on trouve

$$\frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+z}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x+z}}} = \cfrac{z}{2x(x+z) + \cfrac{z^2}{6x(x+z) + \cfrac{z^2}{10x(x+z) + \cfrac{z^2}{14x(x+z) + \ddots}}}} \tag{15}$$

On peut encore développer la fonction exponentielle dans une autre fraction continue remarquable. Car en posant dans (25), Chap. III, $\alpha = k$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $x = \frac{x}{k}$, on trouve

$$e^x = 1 + \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{1 + \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 + \cfrac{2}{1 - \cfrac{x}{1 + \cfrac{3}{1 - x}}}}}}} \tag{16}$$

En supprimant toutes les deux réduites on trouve

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - x + \cfrac{1 \cdot x}{2 - x + \cfrac{2 \cdot x}{3 - x + \cfrac{3 \cdot x}{4 - x + \cfrac{4 \cdot x}{5 - x + \cdots}}}} \tag{17}$$

Les nominateurs et les dénominateurs des réduites de cette fraction continue sont

$$x N_n(x) = \Gamma(n+1) - e^{-x} Q(-x, n+1)$$

$$T_n(x) = e^{-x} Q(-x, n+1)$$

en désignant par $Q(x, n)$ la fonction Q de M. Prym :

$$Q(x, n) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt .$$

Comme maintenant, pour des valeurs entières positives de n, on a

$$Q(x, n) = (n-1)!\, e^{-x} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{x^s}{s!}$$

on trouve facilement

$$N_n(x) = n! \left\{ 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} - \frac{x^3}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n!} \right\}$$

$$T_n(x) = n! \left\{ 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-x)^n}{n!} \right\} .$$

On voit que

$$\lim_{n=\infty} \frac{T_n(x)}{N_n(x)} = \frac{1}{x(1 - e^{-x})} = \frac{e^x}{e^x - 1} ;$$

(17) est donc convergent dans tout le plan.

§ 43. Nous allons maintenant considérer la fonction $\operatorname{tg} x$ en formant d'abord le schéma suivant de différences reciproques:

		ρ	ρ^2
$x-2a$	$\operatorname{tg}(x-2a)$		
		$\frac{a}{2\sin a}\{\cos a+\cos(2x-3a)\}$	
$x-a$	$\operatorname{tg}(x-a)$		$-\cot(x-a)$
		$\frac{a}{2\sin a}\{\cos a+\cos(2x-a)\}$	
x	$\operatorname{tg}(x)$		$-\cot x$
		$\frac{a}{2\sin a}\{\cos a+\cos(2x+a)\}$	
$x+a$	$\operatorname{tg}(x+a)$		$-\cot(x+a)$
		$\frac{a}{2\sin a}\{\cos a+\cos(2x+3a)\}$	
$x+2a$	$\operatorname{tg}(x+2a)$		

ρ^2	ρ^3	ρ^4	ρ^5
	$\frac{a}{2\sin a}\{2^2\cos a-2\cos(2x-3a)\}$		$\frac{a}{2\sin a}\{3^2\cos a-3\cos(2x-3a)\}$
$-\cot(x-a)$		$\operatorname{tg}(x-a)$	
	$\frac{a}{2\sin a}\{2^2\cos a-2\cos(2x-a)\}$		$\frac{a}{2\sin a}\{3^2\cos a-3\cos(2x-a)\}$
$-\cot x$		$\operatorname{tg} x$	
	$\frac{a}{2\sin a}\{2^2\cos a-2\cos(2x+a)\}$		$\frac{a}{2\sin a}\{3^2\cos a-3\cos(2x+a)\}$
$-\cot(x+a)$		$\operatorname{tg}(x+a)$	
	$\frac{a}{2\sin a}\{2^2\cos a-2\cos(2x+3a)\}$		$\frac{a}{2\sin a}\{3^2\cos a-3\cos(2x+3a)\}$

Si l'on interpole dans ce tableau, en faisant usage des différences qui se trouvent à un zigzag horizontal partant de l'argument x, on trouve la fraction continue d'interpolation:

$$\operatorname{tg}(x+az)=\operatorname{tg}x\left\{1+\cfrac{z\sin a\operatorname{cosec}x}{\cos(x+a)-\cfrac{(z-1)\sin a\sin x}{1-\cfrac{(z+1)\sin a\cos x}{3\sin(x+a)+\cfrac{(z-2)\sin a\cos x}{1+\cfrac{(z+2)\sin a\sin x}{5\cos(x+a)-\cfrac{(z-3)\sin a\sin x}{1-\cdots}}}}}\right.$$

En supprimant toutes les deux réduites, celle-ci se simplifie essentiellement; on trouve

$$\operatorname{tg} a z = \cfrac{z \operatorname{tg} a}{1 - \cfrac{(z^2 - 1^2)\operatorname{tg}^2 a}{3 - \cfrac{(z^2 - 2^2)\operatorname{tg}^2 a}{5 - \cfrac{(z^2 - 3^2)\operatorname{tg}^2 a}{7 - \cfrac{(z^2 - 4^2)\operatorname{tg}^2 a}{9 - \ddots}}}}} \tag{18}$$

Cette fraction continue peut aussi se déduire de (13) en substituant e^{2ia} à a. On voit donc que (18) converge pour toutes les valeurs de z et a, pourvu que a ne soit de la forme $\frac{\pi}{2} + p\pi$ où p est un nombre entier.

On peut aussi déduire la fraction continue de Lambert par cette méthode. En effet, on trouve pour les coefficients différentiels réciproques les valeurs suivantes

$$r_x r_x^{2n} \operatorname{tg} x = \cos^2\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad r_x r_x^{2n+1} \operatorname{tg} x = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\sin 2x}.$$

Et par-là la fraction continue:

$$\operatorname{tg}(x+z) = \operatorname{tg}(x)\left\{1 + \cfrac{z \operatorname{cosec}^2 x}{\cot x - \cfrac{z}{1 - \cfrac{z}{3\operatorname{tg} x - \cfrac{z}{1 - \cfrac{z}{5\cot x - \cfrac{z}{1 - \ddots}}}}}}\right\}$$

En supprimant ici toutes les deux réduites on trouve

$$\operatorname{tg} z = \cfrac{z}{1 - \cfrac{z^2}{3 - \cfrac{z^2}{5 - \cfrac{z^2}{7 - \ddots}}}} \tag{19}$$

qui est convergente dans tout le plan.

§ 44. Les coefficients différentiels réciproques de $\operatorname{arctg} x$ sont un peu moins simples. En désignant par $P^{(n)}(x)$ les polynômes de Legendre je dis qu'on a

$$r_x r_x^{2n} \operatorname{arctg}(x) = (1+x^2)\left\{P^{(n)}(ix)\right\}^2 \tag{20}$$

$$r_x r_x^{2n+1} \operatorname{arctg}(x) = \frac{i}{2(n+1)^2 P^{(n)}(ix) P^{(n+1)}(ix)} \tag{21}$$

Pour vérifier ces formules, il faut déterminer la dérivée de $P^{(n)}(x)$ comme fonction de $P^{(n)}(x)$ et $P^{(n-1)}(x)$. Je dit qu'on a la relation:

$$(x^2-1) D_x P^{(n)}(x) - n[x P^{(n)}(x) - P^{(n-1)}(x)] = (n+1)[P^{(n+1)}(x) - x P^{(n)}(x)]. \tag{22}$$

En effet, en différentiant la formule de récurrence de la fonction sphérique

$$(n+1) P^{(n+1)}(x) - (2n+1) x P^{(n)}(x) + n P^{(n-1)}(x) = 0$$

on trouve

$$(n+1) D_x P^{n+1}(x) - (2n+1) P^n(x) - (2n+1) x D_x P^{(n)}(x) + n D_x P^{(n-1)}(x) = 0$$

en éliminant $D_x P^{(n)}(x)$ et $D_x P^{(n-1)}(x)$ par la formule (22), on trouve

$$(x^2-1) D_x P^{(n+1)}(x) = (n+1)[x P^{(n+1)}(x) - P^{(n)}(x)]$$

d'où on peut conclure que (22) est valable pour toutes valeurs de n. Considérons enfin la quantité

$$D_x[P^{(n)}(x) . P^{(n+1)}(x)].$$

En effectuant la différentiation et en éliminant les coefficients différentiels par (22) on trouve la relation

$$\frac{x^2-1}{n+1} D_x\{P^{(n)}(x) . P^{(n+1)}(x)\} = \{P^{(n+1)}(x)\}^2 - \{P^{(n)}(x)\}^2 \tag{23}$$

Les expressions (20) et (21) se démontrent facilement par voie d'induction, car en substituant celles-ci dans la formule

$$D_x r_x^{2n+2} q(x) = D_x r_x^{2n} q(x) + (2n+2) D_x r_x r_x^{2n+1} q(x) \tag{24}$$

on trouve

$$D_x r_x^{2n+2} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{(1+x^2)\{P^{(n)}(ix)\}^2} - \frac{1}{1+x^2} \frac{\{P^{(n+1)}(ix)\}^2 - \{P^{(n)}(ix)\}^2}{\{P^{(n)}(ix)\}^2 . \{P^{(n+1)}(ix)\}^2}$$

d'où

$$r_x r_x^{2n+2} \operatorname{arctg} x = (1+x^2)\{P^{(n+1)}(ix)\}^2. \tag{25}$$

Afin de démontrer aussi (21) nous écrivons $n+\frac{1}{2}$ au lieu de n dans (24) et nous substituons les expressions (25) et (21) dans celle-ci; on trouve

$$D_x x^{2n+3} \operatorname{arctg} x = -2i(n+1)^2 P^{(n)}(ix) \cdot P^{(n+1)}(ix) + (2n+3)\, 2x \{P^{(n+1)}(ix)\}^2 +$$
$$+ 2(2n+3)(1+x^2) P^{(n+1)}(ix) D_x P^{(n+1)}(ix)$$
$$= 2i(n+1)(n+2) P^{(n)}(ix) P^{(n+1)}(ix) + 2x(2n+3)(n+2) \{P^{(n+1)}(ix)\}^2$$
$$= -2i(n+2)^2 P^{(n+1)}(ix) P^{(n+2)}(ix) \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Des expressions (20) et (21) nous pouvons maintenant déduire la fraction continue suivante

$$\operatorname{arctg}(x+z) = \operatorname{arctg} x + \cfrac{z}{1+x^2+\cfrac{1 \cdot z \cdot P^{(1)}(ix)}{i+\cfrac{1 \cdot z \cdot P^{(0)}(ix)}{3(1+x^2) P^{(1)}(ix) + \cfrac{2 \cdot z \cdot P^{(2)}(ix)}{i + \cfrac{2 \cdot z \cdot P^{(1)}(ix)}{5(1+x^2) P^{(2)}(ix) + \cfrac{3 \cdot z \cdot P^{(3)}(ix)}{i + \cdots}}}}}} \tag{20}$$

On peut simplifier cette fraction continue essentiellement en supprimant toutes les deux réduites: les fonctions sphériques disparaissent entièrement: on trouve:

$$\operatorname{arctg}(x+z) = \operatorname{arctg} x + \cfrac{z}{1 \cdot q + \cfrac{z^2 \cdot 1^2}{3 \cdot q + \cfrac{z^2 \cdot 2^2}{5 \cdot q + \cfrac{z^2 \cdot 3^2}{7 \cdot q + \cfrac{z^2 \cdot 4^2}{9 \cdot q + \cdots}}}}} \tag{22}$$

où

$$q = 1 + x^2 + xz .$$

En posant ici $x = 0$ on trouve la fraction continue qui a servi de base à Gauss dans ses recherches sur les quadratures:

$$\operatorname{arctg} z = \cfrac{z}{1 + \cfrac{z^2}{3 + \cfrac{2^2 z^2}{5 + \cfrac{3^2 z^2}{7 + \cdots}}}}$$

qui est convergente dans tout le plan excepté sur l'axe des nombres imaginaires de $+i$ à $+i\infty$ et de $-i$ à $-i\infty$.

§ 45. La fonction ψ de Gauss donne un des plus beaux exemples d'un développement en fraction continue par la méthode des différences réciproques. Celle-ci se définit par l'équation:

$$\psi(x) = D_x \log \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} ;$$

de l'équation aux différences de la fonction Γ on déduit:

$$\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}$$

nous pouvons donc former le schéma suivant de différences réciproques:

$x-2$	$\psi(x-2)$		$\psi(x-2)+2$		$\psi(x-2)+2(1+\frac{1}{2})$			
		$x-2$		$2^2(x-2)$		$3^2(x-2)$		
$x-1$	$\psi(x-1)$		$\psi(x-1)+2$		$\psi(x-1)+2(1+\frac{1}{2})$			
		$x-1$		$2^2(x-1)$		$3^2(x-1)$		
x	$\psi(x)$		$\psi(x)+2$		$\psi(x)+2(1+\frac{1}{2})$			
		x		$2^2 x$		$3^2 x$		
$x+1$	$\psi(x+1)$		$\psi(x+1)+2$		$\psi(x+1)+2(1+\frac{1}{2})$			
		$x+1$		$2^2(x+1)$		$3^2(x+1)$		
$x+2$	$\psi(x+2)$		$\psi(x+2)+2$		$\psi(x+2)+2(1+\frac{1}{2})$			

Par voie d'induction on démontre facilement qu'on a généralement

$$\varphi^{2n-1}(x-n-1, x-n+2, \ldots x+n) = n^n x$$

$$\varphi^{2n}(x-n, x-n+1, \ldots x+n) = \psi(x) + 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n}\right).$$

En appliquant pour l'interpolation dans ce tableau les différences réciproques situées sur un zigzag horizontal, on trouve

$$\psi(z+x) = \psi(x) + \frac{z}{x + \frac{z-1}{2 \quad z-1}} \qquad (28)$$

$$\frac{1}{\quad\quad} \; \frac{z \quad 2}{\quad\quad} \; \frac{\quad\quad}{z+2}$$

$$\frac{2}{\quad\quad} \; \frac{z \quad 3}{\quad\quad}$$

$$5x + \frac{2}{\quad\quad}$$

$$3$$

On aurait aussi pu déduire cette fraction continue d'une autre manière, car de (7) on obtient

$$\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\alpha\,\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)} - \frac{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}{\alpha\,\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)} = \cfrac{\alpha\beta}{\gamma - \cfrac{(1+\alpha)(1+\beta)}{2+\cfrac{(1-\alpha)(1-\beta)}{3\gamma}}}$$

en faisant tendre ici α vers 0, on trouve

$$\Psi(\gamma)-\Psi(\gamma-\beta)=\cfrac{\beta}{\gamma-\cfrac{\beta+1}{\cfrac{2}{1}-\cfrac{\beta-1}{3\gamma-\cfrac{\beta+2}{\cfrac{2}{2}\cdots}}}}} \tag{29}$$

En posant maintenant $\gamma = x$, $\beta = -z$ on trouve précisément la fraction continue (28). Celle-ci est valable, si $\Re(2x+z-1)>0$. En supprimant dans (28) toutes les deux réduites, on trouve

$$\Psi(x+z)=\Psi(x)+\cfrac{2\cdot z}{1\cdot\delta-\cfrac{1^2(z^2-1^2)}{3\cdot\delta-\cfrac{2^2(z^2-2^2)}{5\cdot\delta-\cfrac{3^2(z^2-3^2)}{7\cdot\delta-\cdots}}}} \qquad \Re(\delta)>0 \tag{30}$$

où $\delta = 2x+z-1$.

En substituant $-\delta$ à δ la fraction continue change de signe, elle tende donc vers $\Psi(1-x-z)-\Psi(1-x)$ si $\Re(\delta)<0$; en se rappelant l'identité

$$\Psi(1-x)-\Psi(x)=\pi\cot\pi x$$

cette expression s'écrit

$$\Psi(x+z)+\pi\cot\pi(x+z)-[\Psi(x)+\pi\cot\pi(x)]$$

mais on voit que le tableau est satisfait par $\Psi(x)+\pi\cot\pi x$ aussi bien que par $\Psi(x)$.

Comme

$$\lim_{z=0}\frac{\Psi(z+x)-\Psi(x)}{z} = D_x\Psi(x)$$

on déduit de (28)

$$D_x \psi(x) = \cfrac{1}{x + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{1^2}{3x + \cfrac{2^2}{2 + \cfrac{2^2}{5x + \cfrac{3^2}{2 + \cdots}}}}}} \qquad \Re(x) > \frac{1}{2}.$$

Pourtant il y a bien des objections à faire contre cette démonstration. Mais on vérifie facilement l'exactitude du formule, car en transformant la fraction continue en série de puissances on trouve la série asymptotique bien connue

$$D_x \psi(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{B_1}{x^3} - \frac{B_2}{x^5} + \frac{B_3}{x^7} - \frac{B_4}{x^9} + \cdots$$

où $B_1, B_2, B_3, \cdots$ sont les nombres de BERNOULLI.

En supprimant toutes les deux réduites on trouve

$$D_x \psi\left(\frac{1+x}{2}\right) = \cfrac{1}{1 \cdot x + \cfrac{1^4}{3 \cdot x + \cfrac{2^4}{5 \cdot x + \cfrac{3^4}{7 \cdot x + \cfrac{4^4}{9 \cdot x + \cdots}}}}} \tag{31}$$

Mais la fraction continue tend seulement vers le premier membre quand la partie réelle de x est positive.

§ 46. On peut aussi appliquer la formule (28) pour développer

$$2\beta(x) = \psi\left(\frac{1+x}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) = 2\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt \qquad \Re(x) > 0$$

en fraction continue.

En posant dans (28) $z = \frac{1}{2}$ et en écrivant $\frac{x}{2}$ au lieu de x, on trouve

$$2\beta(x) = \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{x + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{x}}}}}}} \tag{32}$$

En posant, au contraire, $z=-\frac{1}{2}$ et en écrivant $\frac{x+1}{2}$ au lieu de x, on trouve

$$2\beta(x)=\cfrac{1}{x+1+\cfrac{3}{\frac{2}{1}+\cfrac{1}{3(x+1)-\cfrac{5}{\frac{2}{3}+\cfrac{3}{5(x+1)-\cfrac{7}{\frac{2}{5}+\cfrac{5}{7(x+1)}}}}}}} \tag{33}$$

Ces deux fractions continues sont valables si $\Re(x)>\frac{1}{2}$; en supprimant dans (32) les réduites paires et en écrivant $\frac{1+x}{2}$ au lieu de x, on trouve

$$\beta\left(\frac{1+x}{2}\right)=\cfrac{1}{x+\cfrac{1^2}{x+\cfrac{2^2}{x+\cfrac{3^2}{x+\cfrac{4^2}{x+\cdots}}}}} \qquad \Re(x)>0 \tag{34}$$

en supprimant, au contraire, les réduites impaires et en écrivant $\frac{x}{2}$ au lieu de x, on trouve

$$x\beta\left(\frac{x}{2}\right)=\cfrac{1}{x+\cfrac{1\cdot 2}{x+\cfrac{2\cdot 3}{x+\cfrac{3\cdot 4}{x+\cfrac{4\cdot 5}{x+\cdots}}}}} \qquad \Re(x)>0 \tag{35}$$

En transformant (32) à une série de puissances [1] on trouve

$$\beta(x)=\frac{1}{2x}+\frac{2^2-1}{2}B_1\frac{1}{x^2}-\frac{2^4-1}{4}B_2\frac{1}{x^4}+\frac{2^6-1}{6}B_3\frac{1}{x^6}-\frac{2^8-1}{8}B_4\frac{1}{x^8}+\cdots \tag{36}$$

où $B_1, B_2, B_3, \cdots$ sont les nombres de Bernoulli.

[1] Dans les Ann. de la Fac. de Toulouse t. III. Stieltjes a indiqué une méthode assez simple d'après laquelle on peut exécuter une telle transformation.

Il est à remarquer, que tandis que (35) ne tend vers $x\beta\binom{x}{2}$ que si $\Re(x) > 0$, cette fraction continue correspond dans tout le plan à la série asymptotique (36), ce qu'on voit facilement en substituant $-x$ à x.

Copenhague 1907, septembre.

Note.

Dans un traité sur l'interpolation que M. T. N. Thiele vient de publier (Interpolationsrechnung. Leipzig 1909) on trouvera une exposition fort claire des fondements de la théorie des différences réciproques. M. Thiele y indique aussi formellement plusieurs des développements en fractions continues dont nous avons étudié la convergence dans le dernier chapitre.

Comme travaux se rapportant à des questions connexes à celles qui sont étudiées dans le présent mémoire et qui ont paru pendant l'impression de celui-ci je signale encore:

M. Galbrun: Sur la représentation des solutions d'une équation linéaire aux différences finies pour les grandes valeurs de la variable, C. R. Ac. Sc. 5 avril 1909.

R. de Montessus: Les fractions continues algébriques. Acta mathematica t. 32, p. 257.

Émile Padé: Recherches sur la convergence des développements en fractions continues d'une certaine catégorie de fonctions. Annales de l'école normale (3) 24 (1907) p. 341.

Nous avons le devoir douloureux d'annoncer à nos lecteurs la mort de notre collaborateur

PETER CHRISTIAN JULIUS PETERSEN

qui a appartenu à notre rédaction dès le commencement.

Julius Petersen naquit à Sorö en Danémark le 16 Juin 1839. Il était attaché comme professeur (docent) à l'école polytechnique (Polyteknisk Laereanstalt) de Copenhague 1871—1886 et comme professeur à l'université de Copenhague 1886—1909.

Il a publié un grand nombre de livres d'enseignement, en partie traduits en plusieures langues, parmi lesquels se trouvent les travaux remarquables:

Methoder og Theorier til Konstruktionsopgavers Lösning. Kjöbenhavn 1878. (traduit en allemand, français, anglais, italien, russe, hollandais, hongrois).

Plan Trigonometri og sphaeriske Grundformler. Kjöbenhavn 1878.

Forelaesninger over Funktionsteori. Kjöbenhavn 1895 (traduit en allemand).

Parmi ses autres travaux mathématiques les plus importants sont:

Om Integralregningens Transcendenter (Tidsskr. for Math. 1876).

Beweis eines Lehrsatzes betreffend die Integration algebraischer Differentialausdrücke beziehungsweise algebraischer Differentialgleichungen unter geschlossener Form. (Gött. Nachr. 1878).

Om binaere Formers Kovarianter (Tidskr. for Math. 1880—81).

Die Steinersche Lösung der Malfattischen Aufgabe. (Crelle's Journ. 89, 1880).

Theorie der regulären Graphs. (Acta math. 15, 1891).

Julius Petersen était un homme d'une rare aptitude pour les mathématiques. Il vouait son beau talent plutôt au service de l'enseignement qu'au développement de la science proprement dite et si le Danémark est un des pays où l'enseignement secondaire est à la hauteur des exigences de notre époque cela est du en premier lieu à l'oeuvre didactique de Julius Petersen.

BIBLIOGRAPHIE.

Félix Alcan.

Paris 1910.

PAINLEVÉ, P., & BOREL, E., L'aviation. Avec 52 gravures dans le texte. — VIII+266 pp. 8. Fr. 3,50.

Historique de l'aviation. Le vol des oiseaux. Les orthoptères et les hélicoptères. Les aéroplanes sans moteur: cerfs-volants et planeurs. L'aéroplane. La manoeuvre de l'aéroplane. Le rôle de l'angle d'attaque. L'avenir de l'aéroplane. Théorie de l'aéroplane. Quelques principes élémentaires de mécanique.

J. A. Barth.

Leipzig 1909.

SODDY, F., Die Natur des Radiums. Nach sechs an der Universität zu Glasgow im Jahre 1908 gehaltenen freien populären Experimentalvorlesungen bearbeitet. Übers. von G. Siebert. Mit 39 Illustrationen. — XVI+272 pp. 8. M. 5— (geh.), M. 6— (geb.).

A. Cabreira.

Lisbonne 1910.

CABREIRA, A., Les mathématiques en Portugal. Deuxième défense des travaux de A—C—. — XXXIX+118 pp. 8.

Cambridge University Press.

1909—10.

DARWIN, G. H., Scientific papers. Vol. 3. — XV+527 pp. 8. Sh. 15—.

Figures of equilibrium of rotating liquid and geophysical investigations.

FRANKLAND, W. B., Theories of parallelism. An historical critique. — XVIII+70 pp. 8. Sh. 3—.

KELVIN, LORD, Mathematical and physical papers. Vol. 4. Arranged and revised with brief annotations by Sir Joseph Larmor. — XV+563 pp. 8.

Hydrodynamics and general dynamics.

Royal Society of London. Catalogue of scientific papers 1800—1900. Subject index. Vol. 2: Mechanics. LXXIII+355 pp. 8. Sh. 15—.

List of serial publications . . . Schedule of classification . . .: Measurement of dynamical quantities. Geometry and kinematics of particles and solid bodies. Principles of rational mechanics. Statics of particles, rigid bodies etc. Kinetics of particles, rigid bodies etc. General analytical mechanics. Statics and dynamics of fluids. Hydraulics and fluid resistance. Elasticity. Strength of materials, hardness, friction, viscosity, lubrication.

Sylvester, J. J., The collected mathematical papers. Vol. 3 (1870—1883). — XV+688 pp. 8. Sh. 18—.

Young, W. H., The fundamental theorems of the differential calculus. (Cambridge tracts in mathematics and mathem. physics. No. 11.) — 72 pp. 8. Sh. 2. 6 d.

Carnegie Institution of Washington.

1909.

Lehmer, Derrick N., Factor table for the first ten millions, containing the smallest factor of every number not divisible by 2, 3, 5 or 7 between the limits 0 and 10017000. — XIV+476 pp. Fol. Bound in leather and buckram $ 20.00; unbound $ 18.00.

Gustav Fischer.

Jena 1910.

Couturat, L., Internaciona matematikal lexiko en Ido, Germana, Angla, Franca e Italiana. Internationales mathematisches Lexikon in Ido, Deutsch, Englisch, Französich und Italienisch. — 36 pp. 4. M. 1,50 (geh.).

Gauthier-Villars.

Paris 1909—10.

Combebiac, G., Les actions à distance. (Scientia. Sér. physico-math. No. 30.) 89 pp. 8. Fr. 2— (cartonné).

Notations et formules générales. Expression de l'action exercée sur un corps immergé. Sphériques harmoniques. Sphères pulsantes et oscillantes. Sphères faiblement compressibles. Anneaux infiniment déliés. Analogies hydroélectriques. Propos sur l'électricité. Les explications mécaniques en physique. Note sur le calcul des quaternions.

Ocagne, M. d', Notions élémentaires sur la probabilité des erreurs. — 27 pp. 8. Fr. 2—.

Rappel de notions de calcul des probabilités. Théorie de la probabilité des erreurs. Principes de la méthode des moindres carrés.

Perrin, J., Traité de chimie physique. Les principes. — XXVI+299 pp. 8.

La notion des forces. Les facteurs d'action. Le principe d'équivalence et la notion d'énergie. Rôle des facteurs d'action dans la production des changements. Le principe

d'évolution. Les caractères de l'équilibre stable. Corps purs et lois des combinaisons. Le potentiel chimique. La règle des phases.

Poincaré, H., Leçons de mécanique céleste, professées à la Sorbonne. T. 3: Théorie des marées. Réd. par E. Fichot. — 469 pp. 8.

Théorie générale des marées. Méthodes pratiques de prédiction des marées. Synthèse des observations. Comparaison avec la théorie. Marées fluviales. Étude de l'influence des marées sur les corps célestes.

Serret, J. A., Cours d'algèbre supérieure. 6:e éd. T. 1—2. — XIII+647, XII+694 pp. 8. Fr. 25 —.

1: *Les propriétés générales et la résolution numérique des équations.* Théorie des fractions continues. Des fractions continues périodiques. Propriétés générales des éq. algébr. Des éq. simultanées et de l'élimination. Propriétés des racines de l'unité. De la séparation des racines des éq. numériques. Du calcul des racines des équations numériques. *Les fonctions symétriques.* Théorie des fonctions symétriques. Formules générales relatives à la théorie des fonctions symétriques. Digression sur la décomposition des fractions rationnelles et sur les séries récurrentes. Des fonctions alternées et des déterminants. Application à la théorie des équations. Développements relatifs à la théorie de l'élimination.

2: *Les propriétés des nombres entiers.* Des congruences. Des résidus des puissances et des congruences binomes. Propriétés des fonctions entières d'une variable, relativement à un module premier. Détermination des fonctions entières irréductibles, suivant un module premier, dans le cas où le degré est une puissance du module. Sur la totalité des nombres premiers compris entre des limites données. *Les substitutions.* Propriétés générales des substitutions. Propriétés des systèmes de substitutions conjuguées. Des indices des systèmes conjugués. Sur quelques cas particuliers de la théorie des substitutions. Applications de la théorie des substitutions. *La résolution algébrique des équations.* Des éq. du 3. ou du 4. degré. Considérations générales sur la résolution algébrique des équations. De l'impossibilité de la résolution algébrique des éq. générales au delà du 4. degré. Des éq. abéliennes. Sur une classe d'équations du 9. degré résolubles algébriquement.

Sturm, Ch., Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique. Revu et corrigé par E. Prouhet, et augm. de la Théorie élémentaire des fonctions elliptiques, par H. Laurent. 14:e éd., rev. et mise au courant du nouveau programme de la licence, par A. de Saint-Germain. T. 1—2. — XXXII+563, X+657 pp. 8. Fr. 15—.

Tannery, J., Correspondance entre Lejeune Dirichlet et Liouville. — 42 pp. 8. Fr. 2—.

G. J. Göschen.

Leipzig 1909—10.

Beutel, E. Algebraische Kurven. T. 1. Mit 57 Figuren im Text. (Sammlung Göschen 435). — 147 pp. 8. M. 0,80 (geb.).

Kurvendiskussion.

Boehm, K., Elliptische Funktionen. T. 2: Theorie der elliptischen Integrale. Umkehrproblem. (Sammlung Göschen 61). — VII+180 pp. 8. M. 5— (geb.).

Allgemeines. Die elliptischen Integrale als besondere Klasse der hyperelliptischen Integrale. Nähere Untersuchung des ellipt. Integrals 1. Gattung. Umkehrung des Integrals 1. Gattung. Das Integral 1. Gattung und seine Umkehrung bei reellen Verzweigungspunkten. Normalformen der ellipt. Integrale. Das Abelsche Theorem.

Bohnert, F., Elementare Stereometrie. 2:te, durchgesehene Aufl. mit 119 Figuren. (Sammlung Schubert 4.). — VII+183 pp. 8. M. 2,40 (geb.).

Stereometrie der Lage. Körperliche Ecken. Vom Rauminhalt einfacher Körper. Die Kugel. Die regelmässigen Körper. Der Heinzesche Zentralkörper. Körperberechnung auf Grund räumlicher Anschauung. Die Simpsonsche Regel. Körperberechnung auf Grund algebraischer Betrachtung. Berechnung von Rotationsgebilder mit Hilfe der Guldinschen Regeln. Schwerpunktsbestimmungen. Die Kegelschnitte.

Horn, J., Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen. (Sammlung Schubert 60). — VII+363 pp. 8. M. 10— (geb.).

Lineare partielle Diff.-gl. 1. Ordn. mit n unabhängigen Veränderlichen. Partielle Diff.-gl. 1. Ordn. mit zwei unabhängigen Veränderlichen. Partielle Diff.-gl. 2. Ordn. mit zwei unabhängigen Veränderlichen. Lineare partielle Diff.-gl. 2. Ordn., insbesondere hyperbolische Differentialgleichungen. Die Fredholmsche Integralgleichung. Reihenentwicklungen nach den Eigenfunktionen eines symmetrischen Kerns. Randwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Diff.-gl. 2. Ordn. Randwertaufgaben bei elliptischen Diff.-gl. der Partielle Diff.-gl. der Physik.

Schubert, H., Elementare Arithmetik und Algebra. 2:te Aufl. (Sammlung Schubert 1.). — VI+230 pp. 8. M. 2,80 (geb.).

Die arithm. Kurzschrift. Rechnungsarten 1. und. 2. Stufe. Anwendungen der Rechnungsarten 1. und 2. Stufe. Quadratwurzeln und quadrat. Gleichungen. Rechnungsarten 3. Stufe. Anhang.

Schubert, H., Mathematische Mussestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Bd 1 (2:e Aufl.), 2—3 (3:e Aufl.). — VIII+199, IV+247, 265 pp. 8. geb. M. 4— pro Band.

1: Zahlprobleme. 2: Anordnungs- und Wahrscheinlichkeits-Probleme. 3: Reise-Probleme und geometrische Probleme.

A. Hermann & Fils.

Paris 1908—09.

Ball, W. W. Rouse, Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes. 2:e éd. française . . . enrichie de nombreuses additions par J. Fitz-Patrick. T. 3: avec additions de MM. Margossian, Reinhart, Fitz-Patrick et Aubry. — 363 pp. 8. Fr. 5—.

De l'ordonnance des nombres dans les carrés magiques. Astrologie. Hyperespace. Du temps et de sa mesure. Arithmétique et algèbre. La géométrie par le pliage et découpage du papier.

MARGOSSIAN, A., De l'ordonnance des nombres dans les carrés magiques impairs. (Procédés généraux pour leur construction immédiate.) — 131 pp. 8.

Ulrico Hoepli.

Milano 1910.

PASCAL, E., Lezioni di calcolo infinitesimale. T. 1: Calcolo differenziale. 3:a ed. riveduta. (Manuali Hoepli 178—79.) — XII+310 pp. 8. L. 3—.

Funzioni reali di variabili reali. Derivate di una funzione. Sviluppabilità in serie delle funzioni. Studio dei diversi modi di variare di una funzioni nelle vicinanze di un punto. Alcune applicazioni analitiche. Applicazioni geometriche. Principii di geometria differenziale.

Jos. Kösel'sche Buchhandlung.

Kempten & München 1909.

SCHUSTER, A., Einführung in die elementare Mathematik. In zwölf Vorträgen. — IV+169 pp. 8. geb. M. 1—.

Mayer & Müller.

Berlin 1909.

KRIENELKE, K., J. H. Lamberts Philosophie der Mathematik. Halle 1909. — 101 pp. 8. M. 2,40.

Methuen & Co.

London 1906.

HUGGINS, SIR WILLIAM, The Royal Society or science in the state and in the schools. With 25 illustrations. — XV+131 pp. 8.

Early history of the Royal Society. Address, 1902 — Supreme importance of science to the industries of the country, which can be secured only through making science an essential part of all education; 1903 — The relation of the Royal Society to the specialised scientific societies; 1904 — The advisory relation of the Royal Society to the State, and the responsable public duties which rest permanently upon the society; 1905 — The profound influence which science, represented by the Royal Society, has had upon the life and thought of the world; and the place of science in general education. Science in education. Letter addressed to the universities on science in education. Statement on scientific education by a committee of the Royal Society. List of presidents of the Royal Society. Medals awarded by the Royal Society. The library of the Royal Society. Historical instruments and relics.

The Open Court Publishing Company.

Chicago 1906.

Portraits, eight, of eminent mathematicians. High school edition. A selection from the two larger portfolios of mathematicians ed. by D. E. Smith. 1906.

Thales, Pythagoras, Archimedes, Euclid, Descartes, Newton, Napier and Pascal.

Verlag Art. Institut Orell Füssli.

Zürich 1910.

Reininghaus, Fr., Kalender-Reform-Vorschlag. — 47 pp. 8. M. 0,50.

L. W. Seidel & Sohn.

Wien 1910.

Muica, I., Beweis des Fermatschen Satzes. — 13 pp. 8.

Julius Springer.

Berlin 1907—10.

Christmann, A., & Baer, H., Grundzüge der Kinematik. Mit 161 Textfiguren — VIII + 131 pp. 8. geh. M. 4,80; geb. M. 5,80.

Die Weg- und Geschwindigkeitsverhältnisse bewegter ebener Systeme. Das Bewegungssystem 1. Ordn. Das Beweg.-syst. höherer Ordn. Die Krümmungsverhältnisse der Punktbahnen. Behandlung einzelner Probleme. *Die Beschleunigungsverhältnisse bewegter ebener Systeme.* Der Beschleunigungszustand des ebenen Systems. Behandlung einiger Getriebe. *Die Massenkräfte bewegter ebener Systeme.*

Kohlrausch, F. L., Einführung in die Differential- und Integralrechnung nebst Differentialgleichungen. Mit 100 Textfiguren und 200 Aufgaben. — VII + 191 pp. 8. M. 6 — (geh.), M. 6,80 (geb.)

Poske, Fr., Die Zentrifugalkraft. Ein Beitrag zur Revision der Newtonschen Bewegungsgesetze. (Abhandl. zur Didaktik u. Philosophie der Naturwissenschaft. Hrsg. von F. Poske, A. Höfler und E. Grimsehl. Bd. 2, H. 3.) — 80 pp. 4. M. 3 — (geh.).

B. G. Teubner

Leipzig 1906—10.

Bachmann, P., Niedere Zahlentheorie. T. 2: Additive Zahlentheorie. (B. G. Taubners Sammlung von Lehrbüchern . . . der math. Wiss. . . . Bd 10: 2.) — X + 480 pp. 8. geh. M. 16 —, geb. M. 17 —.

Bildung von Zahlen auf additivem Wege. Rekurrente Zahlenreihen. Zerfällung einer Zahl in Summanden. Gleichzeitige Zerfällung mehrerer Zahlen. Relative Zerfällungen (mod. m). Rekursionsformeln. Zerfällungen in gleichnamige Potenzen. Untersuchungen von Liouville. Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$.

Bauer, G., Vorlesungen über Algebra. Hrsg. vom Mathematischen Verein München. Mit dem Bildnis Gustav Bauers als Titelbild. 2:e Aufl. — V + 366 pp. 8. geh. M. 11 —, geb. M. 12 —.

Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Gleichungen. Algebraische Auflösung der Gleichungen. Numerische Auflösung der Gleichungen. Theorie und Anwendung der Determinanten.

Bôcher, M., Einführung in die höhere Algebra. Deutsch von Hans Beck. Mit einem Geleitwort von E. Study. — XII + 348 pp. 8. M. 7 — (geb).

Polynome. Determinanten. Lineare Abhängigkeit. Lineare Gleichungen. Der Rang einer Matrix. Lineare Transformationen. Kombination der Matrices. Invarianten. Grundbegriffe und Beispiele. Bilineare Formen. Quadratische Formen. Reelle quadr. Formen. System einer quadratischen und mehrerer linearer Formen. Paare quadr. Formen. Einige allgemeine Eigenschaften der Polynome. Gemeinsame Teiler von Polynomen in einer Veränderlichen und von binären Formen. Teiler von Polynomen in zwei oder mehreren Veränderlichen. Ganze rationale Invarianten. Allgemeine Sätze. Symmetrische Polynome. Polynome, die in Paaren von Veränderlichen symmetrisch sind. Elementarteiler. Äquivalenz und Klassifikation von Paaren bilinearer Formen und von Kollineationen. Äquivalenz u. Klassifikation von Paaren quadratischer Formen.

Brill, A., Vorlesungen zur Einführung in die Mechanik raumfüllender Massen. — X + 236 pp. 8. geh. M. 7 —, geb. M. 8 —.

Materielle Punkte und starre Massen. Raumfüllende Massen und insbesondere flüssige Massen. Elastisch-feste und quasi-elastische Massen. Die elektromagnetische Lichttheorie.

Dette, W., Analytische Geometrie der Kegelschnitte. — VI + 232 pp. 8. geb. M. 4 —.

Der Punkt. Die Gerade. Die Ellipse. Die Parabel. Die Hyperbel. Bestimmung eines Kegelschnittes durch Punkte und Gerade.

Dziobek, O., Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. — X + 648 pp. 8. geb. M. 16 —.

Differenzenrechnung. Einführung in die Funktionenlehre. Entwicklung des Stetigkeitsbegriffes. Grundbegriffe der Differentialrechnung. Hauptanwendungen der Differentialrechnung. Analytische Entwicklung von Funktionen. Grundformeln der Integralrechnung. Metodische Integration gegebener Funktionen. Differentialgleichungen. Lösungen der Aufgaben.

Eckhardt, E., Zurückführung der sphärischen Trigonometrie auf die Geometrie des ebenen Kreisvierecks. Neue Grundlegung für die Formeln der sphärischen Trigonometrie. — VI + 155 pp. 8. geh. M. 4,40, geb. M. 5 —.

Die Beziehungen zwischen sphärischem Dreieck und ebenem Kreisviereck. Die Formeln von Delambre, Neper und l'Huilier u. ihre Beziehungen zum Kreisviereck.

Die konstruktive Lösung der Aufgaben über das Kugeldreieck. Neue Grundlegung für die Formeln der sphärischen Trigonometrie. Orthogonale Substitutionen.

Enriques, F., Probleme der Wissenschaft. Übers. von K. Grelling. T. 1—2. (Wissenschaft und Hypothese. 11: 1—2). — (X + VI) 599 + 16 pp. 8. M. 4 — (geb.).

1. Wirklichkeit und Logik.
2. Die Grundbegriffe der Wissenschaft.

Föppl, A., Vorlesungen über technische Mechanik. Bd 6: Die wichtigsten Lehren der höheren Dynamik. — XII + 490 pp. 8. geb. M. 12 —.

Die relative Bewegung. Die Bewegungsgleichungen für mehrläufige Verbände. Der Kreisel. Verschiedene Anwendungen. Hydrodynamik. Zusammenstellung der wichtigsten Formeln. Sachverzeichnis.

Ganter, H., & Rudio, F., Die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbstudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. T. 1—2. — VIII + 190, X + 194 pp. 8. geb. M. 3 — (jeder Teil).

1. (7:e, verb. Aufl.): Die analytische Geometrie der Ebene.
2. (4:e, verb. Aufl.): Die analytische Geometrie des Raumes.

Hermann Grassmann, von Friedrich Engel. Mit Portrait (Sonderabdruck aus dem 18. Bande des Jahresberichts der deutschen Mathematiker-Vereinigung.) — 15 pp. 8. geh. M. 0,80.

Haerpfer, A., Die Probleme von Hansen und Snellius. (Abhandl. zur Geschichte d. math. Wissenschaften . . . H. 26: 1) — 20 pp. 8. geh. M. 1 —.

Ignatowsky, W. von, Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik. T. 1—2. (Math.-physikalische Schriften für Ingenieure . . . hrsg. von E. Jahnke. Bd. 6: 1—2.). VI + 112, IV + 123 pp. 8. geh. M. 2,60, geb. M. 3 — (jeder).

T. 1. Die Vektoranalysis. T. 2. Anwendung der Vektoranalysis in der theoretischen Physik.

Killing, W., und Hovestadt, H., Handbuch des mathematischen Unterrichts. Bd 1. — VIII + 456 pp. 8. geb. M. 10 —.

Die Axiome. Euklidische u. nichteukl. Geom. Die Grundbegriffe. Die Begriffe »rechts» u. »links» in der Ebene. Theorie der Polygone. Der Flächeninhalt ebener Flächen. Die Begriffe »rechts» u. »links» im Raume. Theorie der Polyeder. Rauminhalt der Körper, namentlich der Polyeder. Die uneigentlichen Gebilde der Ebene. Die ebenen Konstruktions-Aufgaben. Zur geometrischen Logik. Der sprachliche Ausdruck beim mathematischen Unterricht. Üb. den Unterricht in d. elem. Geom. Der erste Teil der Dreieckslehre. Behandlung der Parallelentheorie. Niedere Kreislehre. Die Lehre von der Flächengleichheit. Die geom. Proportionen. Theorie der Irrationalzahlen. Die Ähnlichkeitslehre. Kreismessung. Schnittverhältnisse u. Doppelverhältnisse.

Harmonische Punkte u. Strahlen. Pol u. Polare am Kreise. Kreispotenz. Kreisbüschel. Kreisbündel. Inversion in der Ebene. Das Taktionsproblem des Apollonius.

LANCHESTER, F. W., Aerodynamik. Ein Gesamtwerk über das Fliegen. Aus dem Englischen übers. von C. und A. Runge. Bd 1. Mit Anhängen über die Geschwindigkeit und den Impuls von Schallwellen, über die Theorie des Segelfluges u. s. w. — XIV + 360 pp. 8. geb. M. 12 —.

Wiederstand in einer Flüssigkeit und verwandte Erscheinungen. Zähigkeit und Oberflächenreibung. Die Hydrodynamik der analytischen Theorie. Flügelform und Bewegung in der Peripterie. Aeroplan. Senkrechte Fläche. Der geneigte Aeroplan. Die Ökonomie des Fluges. Das Aerophyll. Über die Triebkraft, den Schraubenpropeller und die beim Flúg verausgabte Energie. Experimentelle Aerodynamik.

LIETZMANN, W., Stoff und Methode im mathematischen Unterricht der norddeutschen höheren Schulen auf Grund der vorhandenen Lehrbücher. Mit einem Einführungswort von F. Klein. (Abhandl. üb. d. math. Unterricht in Deutschland ... hrsg. von F. Klein. Bd 1, H. 1.) — XII + 102 pp. 8. geh. M. 2 —.

LIND, B., Über das letzte Fermatsche Theorem. (Abhandl. zur Geschichte d. math. Wissenschaften ... H. 26: 2.) — 43 pp. 8. geh. M. 2 —.

LORIA, G., Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Autor., nach dem italienischen Manuskript bearb. deutsche Ausg. von Fritz Schütte. 2:te Aufl. Bd 1: Die algebraischen Kurven. (B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern ... der math. Wiss ... Bd 5: 1.) — XVIII + 448 pp. 8. geh. M. 16, 50, geb. M. 18 —.

Ebene u. körperliche Örter. Kurven dritter Ordnung. Kurven vierter Ordnung. Spezielle algebraische Kurven von einer bestimmten Ordnung höher als der vierten. Spezielle algebraische Kurven beliebiger Ordnung.

MINKOWSKI, H., Geometrie der Zahlen. 2 Lief. (1. Lief. erschien im Jahre 1896.) — VIII + 16 pp. 8. M. 1 —.

Inhalt des ganzen Bandes: Von den nirgends concaven Flächen. Vom Volumen der Körper. Körper, die infolge ihres Volumens mehr als einen Punkt mit ganzzahligen Coordinaten enthalten. Anwendungen der vorhergehenden Untersuchung. Eine weitere analytisch-arithmetische Ungleichung.

NATORP, P., Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften. (Wissenschaft und Hypothese 12.) — XX + 416 pp. 8. geb. M. 6,60.

Das Problem einer Logik der exakten Wissenschaften. Das System der logischen Grundfunktionen. Zahl und Rechnung. Unendlichkeit und Stetigkeit. Richtung und Dimension als Bestimmungen der reinen Zahl. Zeit und Raum als mathematische Gebilde. Die zeit-räumliche Ordnung der Erscheinungen und die mathematischen Prinzipien der Naturwissenschaft.

Netto, E., Die Determinanten. (Math.-physikal. Schriften für Ingenieure . . . hrsg. von E. Jahnke. Bd 9.) — VI + 128 pp. 8. M. 3,20 (geh.). M. 3,60 (geb.).

Definition und elementare Eigenschaften der Determinanten. Adjunkten. — Der Laplace'sche Zerlegungssatz. Berechnung der Determ. Produkt von Determ. Matrizen. Rang. Besondere Determ. Die linearen Gleichungen. Resultanten; Eliminanten; Diskriminanten. Lineare Substitutionen. Geom. Anwendungen. Differentiation von Determ. Die Funktionaldeterm.

Papers, mathematical, from the far East. Compiled and ed. by Yoshio Mikami. (Abhandl. zur Geschichte d. mathem. Wissenschaften . . . H. 28.) — VI + 229 pp. 8. M. 10 — (geh.), M. 11 — (geb.).

Pascal, E., Repertorium der höheren Mathematik. 2:e . . . Aufl. . . . hrsg. von P. Epstein und H. E. Timerding. Bd 1: Analysis. Bd 2: Geometrie. — XV + 527, XVI + 534 pp. 8. geb. M. 10 — (jeder Teil).

Bd 1, H. 1: *Algebra, Differential- und Integralrechnung.* Arithmetik, Mengenlehre, Grundbegriffe der Funktionenlehre. Kombinatorik, Determinanten und Matrices. Algebraische Gruppentheorie. Algebraische Gleichungen. Invariantentheorie. Reihen. Produkte, Kettenbrüche. Differentialrechnung. Integralrechnung. Differenzenrechnung.

Bd 2, H. 1: *Grundlagen und ebene Geometrie.* Grundlagen d. Elementargeom. Ebene Kreisgeom. Übergang zur neueren Geom. Grundlagen d. analyt. Geom. Grundlagen d. affinen Geom. Grundlagen d. projektiven Geom. Projektive Koordinaten. Geometr. Rechnungsarten. Topologie. Elementare Erzeugungsweisen und Eigenschaften der Kegelschnitte. Allgem. Theorie d. Kegelschnitte. Kegelschnittsysteme. Allgem. Theorie d. ebenen algebr. Kurven. Die Geom. auf einer ebenen algebr. Kurve. Die Punktkorrespondenzen zwischen algebr. Kurven. Algbr. Korrespondenzen zwischen zwei Ebenen Allgem. Theorie d. ebenen Kurven 3 u. 4 Ordn. Projektive Spezialisierungen von Kurven 4 u. 3 Ordn. Metrische Eigenschaften algebr. Kurven. Besondere Erzeugungsarten ebener Kurven. Metrisch spezialisierte ebene Kurven. Ebene Differentialgeom. Die nichteuklidische Geom.

Perry, J., Höhere Analysis für Ingenieure. Autor. deutsche Bearbeitung von R. Fricke u. Fritz Süchting. 2:te verb. u. erweit. Aufl. — X + 464 pp. 8. geb. M. 13 —.

Die Funktion x^n. Die Exponentialfunktion u. die trigonometrischen Funktionen. Schwierigere Aufgaben u. Lehrsätze. Tabelle der Formelzeichen.

Poincaré, H., Der Wert der Wissenschaft. Mit Genehmigung des Verfassers ins Deutsche übertragen von E. Weber. Mit Anmerkungen und Zusätzen von H. Weber und einem Bildnis des Verfassers. (Wissenschaft und Hypothese 2.) — V + 252 pp. 8. M. 3,60.

Die mathematischen Wissenschaften. Die physikalischen Wissenschaften. Der objektive Wert der Wissenschaft.

Schoy, C., Beiträge zur konstruktiven Lösung sphärisch-astronomischer Aufgaben. Mit 3 Figuren im Text und 8 Tafeln. — VI + 40 pp. 8. geh. M. 1.60.

Schröder, E., Abriss der Algebra der Logik. Bearb. im Auftrage d. deutsch. Mathem.-Verein. von E. Müller. T. 1—2. — XI + 159 pp. 8. geh. M. 4 (jeder).

1. Elementarlehre.
2. Aussagentheorie, Funktionen, Gleichungen und Ungleichungen.

Schur, Fr., Grundlagen der Geometrie. — X + 192 pp. 8. geb. M. 7

Die projektiven Postulate. Der Satz von Desargues u. die idealen Elemente. Zentrale Kollineation u. harmonische Punkte. Die Postulate der Bewegung u. der Satz von Pascal. Der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie u. das Rechnen mit projektiven Strecken. Die metrischen Grundformeln der nicht-euklidischen Geometrie. Das Parallelenaxiom. Begründung der allgem. Geometrie der Ebene in dieser selbst. Das Archimedische Postulat.

Schwan, Paul, Mathematische Theorie der astronomischen Finsternisse. (Math.-physikal. Schriften für Ingenieure ... hrsg. von E. Jahnke. Bd 8. — V + 128 pp. 8. M. 3,20 (geh.), M. 3,60 (geb.)

Theorie und Vorausberechnung der Mondfinsternisse. Theorie und Vorausberechnung der Planetenvorübergänge vor der Sonnenscheibe. Theorie und Vorausberechnung der Sonnenfinsternisse. Theorie und Vorausberechnung der Sternbedeckungen durch den Mond.

Schwarzschild, K., Über das System der Fixsterne. — 43 pp. 8. M. 1 —.

Staude, O., Analytische Geometrie des Punktepaares, des Kegelschnittes und der Fläche zweiter Ordnung. Bd 1—2. (B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern ... der math. Wiss. ... Bd 30: 1—2.) — X, IV + 1000 pp. 8. Bd 1: geb. M. 22; Bd 2: geb. M. 18 —.

1: Die Gebilde 2. Ordn. in der Ebene: Besondere Gleichungen der Kegelschnitte und ihre Bedeutung. Beziehungen von Punkten und Geraden zur Kurve 2. Ordn. oder Klasse. Einteilung der Kurven 2. Ordn. und Klasse. Kegelschnitte in Dreieckskoordinaten. Die Gebilde 2. Ordn. im Raume: Gestalt und Bestandteile der Flächen 2. Ordn. Beziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen zur Fläche 2. Ordn. oder Klasse. Einteilung der Flächen 2. Ordn. und Klasse.

2: Die ebenen Schnitte der Flächen 2. Ordn. Konfokale Flächen und Fokaleigenschaften. Flächen 2. Ordn. in Tetraederkoordinaten.

Sturm, R., Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. Bd 3—4. (B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern ... der math. Wiss ... Bd 27: 3—4.) VIII + 574, IX + 486 pp. 8. geb. M. 20 — (jeder).

Bd 3. Die eindeutigen linearen Verwandtschaften zwischen Gebilden dritter Stufe.

Bd 4. Die nichtlinearen und die mehrdeutigen Verwandtschaften zweiter und dritter Stufe.

Timerding, H. E., Theorie der Kräftepläne. Eine Einführung in die graphische Statik. (Math.-physikalische Schriften für Ingenieure ... hrsg. von E. Jahnke. Bd 7.) — VI + 99 pp. 8. geh. M. 2,60, geb. M. 3 —.

Verzeichnis der Schriften *Leonhard Eulers* bearb. von Gustaf Eneström. Lief. 1. (Jahresbericht d. deutsch. Math.-Verein. Ergänzungsband 4: 1.) — 208 pp. 8. M. 10 — (geh.).

Die Schriften Eulers chronologisch nach den Druckjahren geordnet. (*Die 2:te Lief. wird enthalten:* Anhang zur 1. Lief.; die Schriften L. Eulers nach der Abfassungszeit geordnet; nach dem Inhalt geordnet; ausführliches Register; Einleitung.)

Vogt, W., Synthetische Theorie der Cliffordschen Parallelen und der linearen Linienörter des elliptischen Raumes. — VII + 58 pp. 8. geh. M. 2,40.

Volkmann, P., Erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften und ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart. Allgemein wissenschaftliche Vorträge. 2:te vollst. umgearb. u. erweiterte Aufl. (Wissenschaft und Hypotese 9.) — XXIII+454 pp. 8. M. 6— (geb.).

Geschichtliche Rückblicke auf die Entwicklung naturwissenschaftlicher, insbesondere physikalischer Anschauungen u. Auffassungen. Subjektivität u. Objektivität der Erkenntnis. Induktion u. Deduktion. Newton's Axiome u. Postulate u. die an sie unter dem Gesichtspunkte der Induktion u. Deduktion zu knüpfenden Erörterungen. Isolation und Superposition. Einführung des Begriffs der Grössenordnung. Existenz, Eindeutigkeit und Vieldeutigkeit der Probleme. Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart, insbesondere zu Philosophie, Weltanschauung, Volkswirtschaft, Staatskunst, Entwicklungsgedanken, Bildungsfragen, Unterrichtsfragen. Weitere Beiträge zur erkenntnistheoretischen Würdigung des Systems der Newton'schen Mechanik.

Weber, H., und Wellstein, J., Encyclopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. Bd 1: Elementare Algebra und Analysis. 3:e Aufl. bearb. von Heinrich Weber. — XVIII+531 pp. 8. M. 10— (geb.).

Elementare Mengenlehre. Natürliche Zahlen. Die Rechenoperationen. Division u. Einführung der Brüche. Irrationalzahlen. Verhältnisse. Potenzen u. Logarithmen. Gleichungen 1. Grades. Quadrat. Gleichungen u. imaginäre Zahlen. Permutationen u. Kombinationen. Verschiedene Anwendungen. — Algebr. Gleichungen. Hauptsätze der Algebra. Unbestimmte Gleichungen 1. u. 2. Grades. Kettenbrüche. Algebr. Auflösung kubischer u. biquadrat. Gleichungen. Genäherte Berechnung der Wurzeln numerischer Gleichungen. Kreisteilung. Unmöglichkeitsbeweise. — Unendl. Reihen. Unendl. Reihen mit positiven u. negativen Gliedern. Unbegrenzt konvergente Reihen für die Exponentialfunktion u. die trigonometr. Funkt. Die Binomialreihe. Logarithmische Reihen. Unendl. Produkte. Transcendenz von e und π. Funktionen, Differentiale u. Integrale.

Widder, W., Untersuchungen über die allgemeinste lineare Substitution mit vorgegebener p^{ter} Potenz. — 55 pp. 4. geh. M. 3—.

Wien, W., Über Elektronen. Vortrag geh. auf d. 77. Versammlung deutscher Naturforscher u. Ärzte in Meran. 2:te, die Fortschritte d. Wissenschaft berücksichtigende, Aufl. — 39 pp. 8. geh. M. 1,40.

Vieweg & Sohn.

Braunschweig 1898—1909.

Fischer, O., Kinematik organischer Gelenke. Mit 77 eingedruckten Abbildungen. (Die Wissenschaft. Sammlung naturwissenschaftl. u. mathem. Monographien. H. 18.). — XII+261 pp. 8. geh. M. 8—; geb. M. 9—.

Über die Formen der Gelenkflächen und die aus denselben sich ergebenden möglichen Arten der Gelenkbewegungen. Über die Bewegungsfreiheit. Bewegung in speziellen Gelenken.

Thomson, J. J., Elektrizität und Materie. Autor. Übersetzung von G. Siebert. 2:e verb. Aufl. Mit 21 eingedruckten Abbildungen. (Die Wissenschaft. Sammlung naturwissenschaftl. u. mathem. Monographien. H. 3.). — VIII+116 pp. 8. geh. M. 3—; geb. M. 3,60.

Darstellung des elektrischen Feldes durch Kraftlinien. Elektrische und gebundene Masse. Wirkungen der Beschleunigung der Faradayschen Röhren. Die stomistische Struktur der Elektrizität. Konstitution des Atoms. Radioaktivität und radioaktive Substanzen. Materie und Äther.

Weber, H., Lehrbuch der Algebra. 2:e Aufl. Bd 1—3. — Bd 1: XV+703 pp. 8. geh. M. 10—; geb. M. 11,60. — Bd 2: XVI+855 pp. 8. geh. M. 12—, geb. M. 13,60. — Bd 3: XII+733 pp. 8. geh. M. 20—; geb. M. 22—.

1: *Die Grundlagen.* Rationale Functionen. Determinanten. Die Wurzeln algebr. Gleich. Symmetrische Functionen. Lineare Transformationen. Invarianten. Tschirnhausen-Transformation. *Die Wurzeln.* Realität der Wurzeln. Der Sturm'sche Lehrsatz. Abschätzung der Wurzeln. Genäherte Berechnung der Wurzeln. Kettenbrüche. Theorie der Einheitswurzeln. *Algebraische Grössen.* Die Galois'sche Theorie. Anwendung der Permutationsgruppen auf Gleichungen. Cyklische Gleichungen. Kreistheilung. Algebraische Auflösung von Gleichungen. Wurzeln metacyklischer Gleichungen.

2: *Gruppen.* Allgemeine Gruppentheorie. Abel'sche Gruppen. Die Gruppe der Kreistheilungskörper. Cubische und biquadratische Abel'sche Körper. Constitution der allgemeinen Gruppen. *Lineare Gruppen.* Gruppen linearer Substitutionen. Gruppeninvarianten. Gruppen binärer linearer Substitutionen. Die Polyëdergruppen. Congruenzgruppen. *Anwendungen der Gruppentheorie.* Allgemeine Theorie der metacyklischen Gleichungen. Die Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung. Doppeltangenten einer Curve 4. Ordnung. Allgem. Theorie d. Gleich. 5. Grades. Gruppen linearer ternärer Substitutionen. Das Formenproblem der Gruppe G_{168} und die Theorie d. Gleich. 7. Grades. *Algebraische Zahlen.* Zahlen und Functionale eines algebraischen Körpers. Theorie der algebraischen Körper. Beziehungen eines Körpers zu seinen Theilern. Das Punktgitter. Classenzahlen. Kreistheilungskörper. Abel'sche Körper und Kreistheilungskörper. Classenzahl der Kreistheilungskörper. Transcendente Zahlen.

3: *Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen. — Analytischer Teil.* Die elliptischen Integrale. Theta-Funktionen. Transformation der Theta-Funktionen. Die elliptischen Funktionen. Die Modulfunktionen. Multiplikation und Teilung der elliptischen Funktionen. Theorie der Transformationsgleichungen. Die Gruppe der Trans-

formationsgleich. und die Gleich. 5. Grades. *Quadratische Körper.* Diskriminante. Algebraische Zahlen und Formen. Ideale in quadrat. Körpern. Ordnungen im quadrat. Körper. Äquivalenz nach Zahlgruppen. Komposition der Formen und Ideale. Geschlechter der quadrat. Formen. Klassenzahl in quadrat. Körpern. *Komplexe Multiplikation.* Ellipt. Funktionen und quadrat. Formen. Galois'sche Gruppe der Klassengleich. Berechnung der Klasseninvarianten. Die Multiplikatorgleich. in der kompl. Multiplikation. Die Normen der Klasseninvarianten $f(\omega)$. Cayleys Entwickelung der Modulfunktionen. *Klassenkörper.* Der Teilungskörper. *Algebraische Funktionen.* Algebr. Funkt. einer Variablen. Funktionale. Zahlenwerte der algebraischen Funktionen. Algebr. und Abelsche Differentiale. *Tabellen.*

John Wiley & Sons.

New York 1910.

Hancock, H., Lectures on the theory of elliptic functions. Vol. 1: Analysis. — XXIII+498 pp. 8. $ 5.00.

Preliminary notions. Functions which have algebraic addition-theorems. The existence of periodic functions in general. Doubly periodic functions. Their existence. The periods. Construction of doubly periodic functions. The Riemann surface. The problem of inversion. Elliptic integrals in general. The moduli of periodicity for the moral forms of Legendre and of Weierstrass. The Jacobi theta-functions. The functions $\mathrm{sn}\, u$, $\mathrm{cn}\, u$, $\mathrm{dn}\, u$. Doubly periodic functions of the second sort. Elliptic integrals of the second kind. Introduction to Weierstrass's theory. The Weierstrassian functions $p u$, ζu, σu. The addition-theorems. The sigma-functions. The theta- and sigma-functions when special values are given to the argument. Elliptic integrals of the third kind. Methods of representing analytically doubly periodic functions of any order which have everywhere in the finite portion of the plane the character of integral or (fractional) rational functions. The determination of all analytic functions which have algebraic addition theorems.

ÜBER LINEARE DIFFERENZENGLEICHUNGEN.

VON

OSKAR PERRON

in MÜNCHEN.

§ 1. Eine lineare Differenzengleichung r^{ter} Ordnung hat die Form

$$D_{\nu+r} + a_1^{(\nu)} D_{\nu+r-1} + a_2^{(\nu)} D_{\nu+r-2} + \cdots + a_r^{(\nu)} D_\nu = 0. \tag{1}$$

Man kann dabei die Variable ν als stetig veränderlich denken; doch wollen wir sie in dieser Arbeit auf die ganzzahligen Werte $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ beschränken. Es brauchen also auch die Funktionen $a_1^{(\nu)}, \ldots a_r^{(\nu)}$ bloss für diese Argumentwerte von ν definiert zu sein, wobei jedoch die Funktionswerte selbst ganz beliebig, auch komplex, sein dürfen. Nur wollen wir ein für alle Mal gleich hier festsetzen, *dass die letzte dieser Funktionen, also $a_r^{(\nu)}$, für alle ν von Null verschieden sein soll.*

Eine für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ definierte Funktion D_ν, die der Differenzengleichung genügt, heisst ein Integral derselben. Jedes Integral ist durch seine r Anfangswerte $D_0, D_1, \ldots D_{r-1}$, die selbst keiner Beschränkung unterliegen, offenbar eindeutig bestimmt; aber auch irgend welche späteren r aufeinander folgenden Integralwerte $D_N, D_{N+1}, \ldots D_{N+r-1}$ sind ganz willkürlich und bestimmen eindeutig ein Integral. Die Willkür wäre beschränkt, wenn nicht alle $a_r^{(\nu)} \neq 0$ wären, weshalb wir diese Annahme ausdrücklich gemacht haben. Insbesondere ist ein Integral, das für r aufeinander folgende Werte von ν verschwindet, identisch Null, was aber ebenfalls nicht mehr richtig wäre, wenn wir zuliessen, dass $a_r^{(\nu)}$ für einzelne Werte von ν verschwindet.

Es gibt r linear unabhängige Integrale $D_\nu^{(1)}, D_\nu^{(2)}, \ldots D_\nu^{(r)}$, und das allgemeine Integral hat dann die Form

$$D_\nu = c_1 D_\nu^{(1)} + c_2 D_\nu^{(2)} + \cdots + c_r D_\nu^{(r)},$$

wo $c_1, \ldots c_r$ willkürliche Konstanten, d. h. von ν unabhängig sind.

Das Problem der Integration der Differenzengleichung (1) kann in gewissem Sinn von vorn herein schon als gelöst angesehen werden. Denn wenn die Anfangswerte $D_0, D_1, \ldots D_{r-1}$ irgend wie gegeben sind, so kann man mittels der Differenzengleichung ja die Funktion D_ν rekursorisch für jeden einzelnen Wert von ν berechnen, sodass D_ν für jedes endliche ν als bekannt gelten darf. Man kann sogar sehr leicht D_ν auch in independenter Form darstellen, etwa als Determinante.

Während also für jeden *endlichen* Argumentwert ν die Funktion D_ν bekannt ist, sodass hier eigentlich kein Problem mehr vorliegt, wissen wir dagegen gar nichts darüber, wie sich die Integrale bei unbegrenzt wachsendem ν verhalten. Bleiben sie endlich oder wachsen sie unbegrenzt, und wie stark? Gibt es Partikulärintegrale, die langsamer wachsen als das allgemeine? Nähern sie sich einem Grenzwert? Oder gibt es vielleicht Partikulärintegrale, deren Verhältnis einem Grenzwert zustrebt? Diese und ähnliche Fragen sind hier zu beantworten, und die Antwort wird natürlich von dem Verhalten der Koeffizienten $a_i^{(\nu)}$ abhängen. Man kann daher die allgemeinste in dieser Richtung liegende Aufgabe etwa so formulieren: *Es soll aus dem als bekannt angenommenen Verhalten der Koeffizienten $a_i^{(\nu)}$ für $\lim \nu = \infty$ das Verhalten der Integrale für $\lim \nu = \infty$ ermittelt werden.*

Diese Problemstellung umfasst in ihrer Allgemeinheit die ganze Theorie von der Konvergenz der Kettenbrüche, und auch deren Verallgemeinerung, der Jacobiketten.[1] Andere wichtige Sätze aus diesem Gebiet verdankt man namentlich den Herren Poincaré und Pincherle. Ich habe kürzlich in der genannten Arbeit in den Mathematischen Annalen ebenfalls einige Theoreme dieser Art bewiesen, welche im folgenden auf einfachere Weise gewonnen und zugleich erheblich erweitert werden sollen. Dabei sei bemerkt, dass es sich um solche Sätze handelt, die eine direkte Anwendung auf die Theorie der linearen Differentialgleichungen zulassen, wie in einer anschliessenden Arbeit dargetan werden soll.

Ein erster, sehr einfacher Satz, der im folgenden noch vielfach angewandt wird, lautet:

Satz 1. *Wenn die Koeffizienten $a_1^{(\nu)}, \ldots a_r^{(\nu)}$ unter einer von ν unabhängigen endlichen Schranke bleiben, so gibt es eine Zahl M der Art, dass für jedes Integral*

[1] Über diesen Begriff, der übrigens im folgenden nicht weiter benutzt wird, vergleiche man die Arbeit des Verfassers: *Über die Konvergenz der Jacobi-Kettenalgorithmen mit komplexen Elementen*, Sitzungsberichte der math. phys. Klasse der kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften, Bd. 37 (1907). Ferner auch: *Über lineare Differenzen- und Differentialgleichungen*, Mathemat. Annalen Bd. 66 (1909).

die Ungleichung $|D_\nu| < CM^\nu$ *gilt, wo* C *nur von den Anfangswerten* $D_0, D_1, \dots D_{r-1}$ *abhängt.*[1]

Beweis. Durch die Substitution

$$D_\nu = M^\nu \Delta_\nu$$

geht Gleichung (1) über in

$$\Delta_{\nu+r} + \frac{a_1^{(\nu)}}{M}\Delta_{\nu+r-1} + \frac{a_2^{(\nu)}}{M^2}\Delta_{\nu+r-2} + \cdots + \frac{a_r^{(\nu)}}{M^r}\Delta_\nu = 0.$$

Nun kann man, da die $a_i^{(\nu)}$ unter einer endlichen Schranke bleiben, die positive Zahl M so gross wählen, dass für alle ν

$$\frac{|a_1^{(\nu)}|}{M} + \frac{|a_2^{(\nu)}|}{M^2} + \cdots + \frac{|a_r^{(\nu)}|}{M^r} < 1$$

wird. Dann ergibt sich aber aus der vorigen Gleichung, dass $|\Delta_{\nu+r}|$ kleiner wird als die grösste der Zahlen $|\Delta_\nu|, |\Delta_{\nu+1}|, \dots |\Delta_{\nu+r-1}|$; folglich bleiben auch die $|\Delta_\nu|$ unter einer von ν unabhängigen (aber von den Anfangswerten $\Delta_0, \Delta_1, \dots \Delta_{r-1}$ natürlich abhängigen) Schranke C, und folglich $|D_\nu| < M^\nu C$. W. z. b. w.

§ 2. Um die von jetzt ab zu machende Annahme über die Koeffizienten $a_i^{(\nu)}$ bequemer formulieren zu können, führe ich folgendes Symbol ein. Es bedeute $\{\nu^k\}$ jede für $\nu = 0, 1, 2, \dots$ definierte (nicht notwendig reelle) Funktion, für welche

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{|\{\nu^k\}|}{\nu^k} = 1$$

ist. Dabei kann k irgend eine reelle Zahl sein, die mit der Funktion natürlich eindeutig gegeben ist. Entsprechend wird man unter $\{\nu^\infty\}$ eine Funktion verstehen, deren Absolutwert rascher wächst als jede noch so hohe Potenz von ν; unter $\{\nu^{-\infty}\}$ eine Funktion, deren Absolutwert rascher gegen Null konvergiert als jede Potenz von $\frac{1}{\nu}$. Insbesondere wird also jede Funktion, die von einem gewissen ν-Wert ab dauernd gleich Null ist, mit $\{\nu^{-\infty}\}$ zu bezeichnen sein.

Die Koeffizienten unserer Differenzengleichung (1) nehmen wir dann in der Form an:

[1] Wie sofort zu sehen, könnte man den Faktor C auch unterdrücken, indem man für M nötigenfalls eine etwas grössere Zahl wählt. Doch würde die Ungleichung dann nicht mehr für alle ν, sondern nur für $\nu > N$ gelten, wobei nun natürlich die Zahl N von $D_0, D_1, \dots D_{r-1}$ abhängt.

$$a_i^{(\nu)} = a_i \{\nu^{k_i}\} \quad (i = 1, 2, \ldots r), \tag{2}$$

wobei $a_i \neq 0$ angenommen werden darf. Denn sollten für einen bestimmten Index i zufällig alle $a_i^{(\nu)}$ verschwinden, so kann diesem Umstand durch die Wahl $k_i = -\infty$ Rechnung getragen werden.

Der Koeffizient von $D_{\nu+r}$, den wir in Gleichung (1) gleich 1 gesetzt haben, mag der Gleichförmigkeit halber gelegentlich auch mit $a_0^{(\nu)}$ bezeichnet werden; es ist dann $a_0^{(\nu)} = 1 \cdot \{\nu^0\}$, sodass wir neben den Exponenten $k_1, k_2, \ldots k_r$ noch den weiteren

$$k_0 = 0 \tag{3}$$

einführen wollen.

Es bedeute nun e denjenigen Index, für den k_e der grösste der Exponenten $k_0, k_1, \ldots k_r$ ist. Sollten mehrere von diesen den Maximalwert haben, so sei e der kleinste Index, für den dies eintritt, sodass also e eindeutig durch die Forderungen bestimmt ist:

$$k_e \begin{cases} > k_i \text{ für } i < e \\ \geq k_i \text{ für } i > e. \end{cases} \tag{4}$$

Wir versuchen dann der Differenzengleichung (1) die Form zu geben:

$$\begin{aligned} &D_{\nu+r} + \varrho_1^{(\nu+r-e)} D_{\nu+r-1} + \cdots + \varrho_e^{(\nu+r-e)} D_{\nu+r-e} \\ &+ b_1^{(\nu)} (D_{\nu+r-1} + \varrho_1^{(\nu+r-e-1)} D_{\nu+r-2} + \cdots + \varrho_e^{(\nu+r-e-1)} D_{\nu+r-e-1}) \\ &+ \cdots + b_{r-e}^{(\nu)} (D_{\nu+e} + \varrho_1^{(\nu)} D_{\nu+e-1} + \cdots + \varrho_e^{(\nu)} D_\nu) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

sodass also, wenn man zur Abkürzung

$$D_{\nu+e} + \varrho_1^{(\nu)} D_{\nu+e-1} + \varrho_2^{(\nu)} D_{\nu+e-2} + \cdots + \varrho_e^{(\nu)} D_\nu = E_\nu \tag{6}$$

setzt, für E_ν die Differenzengleichung $(r-e)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$E_{\nu+r-e} + b_1^{(\nu)} E_{\nu+r-e-1} + b_2^{(\nu)} E_{\nu+r-e-2} + \cdots + b_{r-e}^{(\nu)} E_\nu = 0 \tag{7}$$

ensteht. Diese Transformation lässt sich symbolisch als Zerlegung in Faktoren schreiben, wie sie analog auch bei Differentialgleichungen längst wohlbekannt ist. Führt man nämlich für die linken Seiten der Gleichungen (1), (6), (7) bez. die Symbole $P(D)$, $Q(D)$, $R(E)$ ein, so lässt sich die Übereinstimmung von (1) mit (5) in der einfachen Gestalt ausdrücken:

$$P = RQ.$$

Ist etwa $e = 0$, so ist die Transformation müssig; es ist eben dann der Faktor $Q = 1$, und $P = R$. Das heisst, es ist $b_i^{(\nu)} = a_i^{(\nu)}$, während $\varrho_i^{(\nu)}$ überhaupt keine vorkommen. Übrigens sind in diesem Fall die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt, sodass für jedes Integral $|D_\nu| < CM^\nu$ wird.

Ist $e = r$, so ist die Transformation ebenfalls müssig, weil jetzt der Faktor $R = 1$ und $P = Q$ ist. Das heisst, es ist diesmal $\varrho_i^{(\nu)} = a_i^{(\nu)}$, während $b_i^{(\nu)}$ keine vorkommen, sodass die nachfolgenden Betrachtungen, die sich auf die Berechnung und Abschätzung der $\varrho_i^{(\nu)}$, $b_i^{(\nu)}$ beziehen, wegfallen.

Um nun auch, wenn $0 < e < r$ ist, die Gleichung (1) mit (5) zur Deckung zu bringen, hat man das Gleichungssystem zu erfüllen:

$$
\begin{aligned}
a_1^{(\nu)} &= \varrho_1^{(\nu+r-e)} + b_1^{(\nu)} \\
a_2^{(\nu)} &= \varrho_2^{(\nu+r-e)} + b_1^{(\nu)} \varrho_1^{(\nu+r-e-1)} + b_2^{(\nu)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_e^{(\nu)} &= \varrho_e^{(\nu+r-e)} + b_1^{(\nu)} \varrho_{e-1}^{(\nu+r-e-1)} + \cdots + b_{r-e}^{(\nu)} \varrho_{2e-r}^{(\nu)} \,[1] \\
a_{e+1}^{(\nu)} &= b_1^{(\nu)} \varrho_e^{(\nu+r-e-1)} + b_2^{(\nu)} \varrho_{e-1}^{(\nu+r-e-2)} + \cdots + b_{r-e}^{(\nu)} \varrho_{2e-r+1}^{(\nu)} \,[1] \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{r-1}^{(\nu)} &= b_{r-e-1}^{(\nu)} \varrho_e^{(\nu+1)} + b_{r-e}^{(\nu)} \varrho_{e-1}^{(\nu)} \\
a_r^{(\nu)} &= b_{r-e}^{(\nu)} \varrho_e^{(\nu)} .
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Sehen wir zu, ob und wie das möglich ist. Versteht man unter ν irgend eine *bestimmte* Zahl, und denkt sich diejenigen $\varrho_i^{(\lambda)}$, deren oberer Index kleiner als $\nu + r - e$ ist, bereits bekannt, und zwar $\varrho_e^{(\lambda)} \neq 0$, so findet man aus den $r - e$ letzten der Gleichungen (8), bei der letzten beginnend, der Reihe nach die Zahlen $b_{r-e}^{(\nu)}, b_{r-e-1}^{(\nu)}, \ldots b_1^{(\nu)}$; sodann aus den e ersten Gleichungen auch $\varrho_1^{(\nu+r-e)}, \varrho_2^{(\nu+r-e)}, \ldots \varrho_e^{(\nu+r-e)}$. Damit sind dann alle Gleichungen (8) für diesen Index ν befriedigt; und wenn dabei $\varrho_e^{(\nu+r-e)} \neq 0$ ausfällt, kann man die Gleichungen jetzt für den nächst höheren Index anwenden, u. s. w. Daraus ergibt sich, dass die Zahlen $\varrho_i^{(0)}, \varrho_i^{(1)}, \ldots \varrho_i^{(r-e-1)}$ ganz willkürlich bleiben, dass dann aber die $b_i^{(\nu)}$ sowie die $\varrho_i^{(\nu+r-e)}$ für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ durch das System (8) vollständig eindeutig festgelegt sind, sofern nur bei der rekursorischen Berechnung kein $\varrho_\rho^{(\nu)}$ den Wert Null erhält. Dabei sind ausserdem die Zahlen $b_{r-e}^{(\nu)}$ wegen der letzten der Gleichungen (8) alle von Null verschieden.

[1] Hierbei ist natürlich $\varrho_0^{(\nu)} = 1$ zu setzen, während diejenigen Terme, bei denen der untere Index von ϱ etwa negativ werden sollte, einfach wegfallen.

Für unsere Zwecke genügt es übrigens, wenn wir die Umsetzung der Gleichung (1) in die Gestalt (5) nicht für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, sondern nur für $\nu \geq N$ bewerkstelligen, wo N eine irgendwie gewählte Zahl bedeutet; dann bleiben offenbar die Zahlen $\varrho_i^{(N)}, \varrho_i^{(N+1)}, \ldots \varrho_i^{(N+r-e-1)}$ willkürlich, während die $b_i^{(\nu)}$ und $\varrho_i^{(\nu+r-e)}$ für $\nu > N$ eindeutig bestimmt sind.

Machen wir vorläufig die Annahme, dass k_e, und also wegen (4) a fortiori auch die übrigen k_i nicht ∞ sind,[1] so lässt sich zeigen, dass bei geeigneter Wahl der Zahl N und der willkürlichen Elemente für alle $\nu (\geq N)$ die Ungleichungen gelten:

$$\left|\varrho_i^{(\nu)}\right| < \frac{1}{4}\left|a_i\right| \nu^{k_i}$$

$$\left|\varrho_j^{(\nu)}\right| < K_j\, \nu^{\mathrm{Max}\,(k_0, k_1, \ldots k_j)} \qquad (j = 1, 2, \ldots e-1)$$

wo die K_j gewisse positive Konstanten sind.[2]

Während diese Ungleichungen an Brauchbarkeit nichts verlieren, wenn wir alle Zahlen K_j durch eine einzige, etwa die grösste unter ihnen ersetzen, wird es für den Beweis wesentlich sein, sie in folgender Weise zu fixieren: Wir setzen

$$8 \max_{i=e+1}{}' \left|\frac{a_i}{a_e}\right| = G, \tag{9}$$

$$2^{r-e-1} G = H, \tag{10}$$

und definieren dann $K_1, K_2, \ldots K_{e-1}$ rekursorisch durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} &2\left|a_1\right| + H = K_1 \\ &2\left|a_2\right| + H + HK_1 = K_2 \\ &\quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &2\left|a_{e-1}\right| + H + HK_1 + HK_2 + \cdots + HK_{e-2} = K_{e-1}. \end{aligned} \tag{11}$$

Um nun zunächst die Zahl N in geeigneter Weise festzulegen, beachte man, dass wegen (2) für genügend grosse ν

$$\left|a_e^{(\nu)}\right| > \frac{1}{2}\left|a_e\right| (\nu + r - e)^{k_e} \tag{12}$$

[1] Die Modifikationen, welche die folgenden Erörterungen im Fall $k_e = \infty$ erleiden, werden am Schluss von § 4 kurz auseinandergesetzt werden.

[2] Mit dem Symbol $\mathrm{Max}\,(k_0, k_1, \ldots k_j)$ oder auch $\max_{i=0}^{j} k_i$ wird die grösste der Zahlen k_0, $k_1, \ldots k_j$ bezeichnet. Analog mit $\mathrm{Min}\,(k_0, k_1, \ldots, k_j)$ oder auch $\min_{i=0}^{j} k_i$ die kleinste.

$$|a_i^{(\nu)}| < 2|a_i|\,\nu^{\mathrm{Max}(k_i,\,k_0)} \qquad (i = 1, 2, \ldots r) \tag{13}$$

wird;[1] in der zweiten Ungleichung darf der Exponent von ν deshalb nicht einfach gleich k_i gewählt werden, weil ja $k_i = -\infty$ sein kann. Da des weiteren nach der Definition des Index e gewiss

$$k_e = \mathrm{Max}(k_0, k_1, \ldots k_{e-1})$$

ist, so wird ausserdem für grosse ν

$$\frac{\nu^{\mathrm{Max}(k_0, k_1, \ldots k_{e-1})}}{\nu^{k_e}} < \frac{\sum_4^{\mathrm{I}} |a_e|}{\mathrm{Max}(1, K_1, K_2, \ldots K_{e-1})} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &H(1 + K_1 + K_2 + \cdots + K_{e-1})(\nu + r - e - 1)^{\mathrm{Max}(k_0, k_1, \ldots k_{e-1})} \\ &< \sum_4^{\mathrm{I}} |a_e| (\nu + r - e)^{k_e}. \end{aligned} \tag{15}$$

Wir wählen jetzt die Zahl N so gross, dass die Ungleichungen (12) bis (15) für $\nu \geqq N$ sämtlich erfüllt sind. Die willkürlichen Zahlen $\varrho_i^{(N)}, \varrho_i^{(N+1)}, \ldots \varrho_i^{(N+r-e-1)}$ dagegen wählen wir derart, dass sie den zu beweisenden Ungleichungen für $\nu = N$, $N+1, \ldots N+r-e-1$ von selbst genügen. Dass diese Ungleichungen dann auch für $\nu \geq N + r - e$ gelten, lässt sich durch vollständige Induktion beweisen. Nehmen wir also an, dass für einen festen Index $\nu (\geq N)$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned} &|\varrho_e^{(\nu+i)}| > \sum_4^{\mathrm{I}} |a_e| (\nu + i)^{k_e} \qquad (i = 0, 1, \ldots r - e - 1) \\ &|\varrho_j^{(\nu+i)}| < K_j (\nu + i)^{\mathrm{Max}(k_0, k_1, \ldots k_j)} \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots r - e - 1 \\ j = 1, 2, \ldots e - 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{16}$$

bestehen, was ja für $\nu = N$ wegen unserer Wahl der willkürlichen Grössen bereits feststeht. Dann ist bloss noch zu zeigen, dass hieraus auch

$$|\varrho_e^{(\nu+r-e)}| > \sum_4^{\mathrm{I}} |a_e| (\nu + r - e)^{k_e}$$

$$|\varrho_j^{(\nu+r-e)}| < K_j (\nu + r - e)^{\mathrm{Max}(k_0, k_1, \ldots k_j)} \qquad (j = 1, 2, \ldots e - 1)$$

gefolgert werden kann.

Nun ergibt sich zunächst aus der letzten der Gleichungen (8):

[1] Hierzu bemerke ich, worauf mit Rücksicht auf Späteres zu achten ist, dass Ungleichung (13) für $i = e$ nicht beansprucht wird.

$$b_{r-e}^{(\nu)} = \frac{a_r^{(\nu)}}{\varrho_e^{(\nu)}},$$

und also, wenn man Zähler und Nenner der rechten Seite nach den Formeln (13), (16) abschätzt:

$$\left|b_{r-e}^{(\nu)}\right| < \frac{2\left|a_r\right|\nu^{\mathrm{Max}(k_r,\,k_0)}}{\frac{1}{4}\left|a_e\right|\nu^{k_e}} < 8\left|\frac{a_r}{a_e}\right| \cdot G.$$

wo G wieder die in Gleichung (9) festgesetzte Bedeutung haben soll. Allgemeiner erhält man, wenn man die $(e+i)^{\text{te}}$ der Gleichungen (8) nach $b_i^{(\nu)}$ auflöst:

$$b_i^{(\nu)} = \frac{a_{e+i}^{(\nu)}}{\varrho_e^{(\nu+r-e-i)}} - \sum_{j=1}^{r-e-i} b_{i+j}^{(\nu)} \frac{\varrho_{e-j}^{(\nu+r-e-i-j)}}{\varrho_e^{(\nu+r-e-i)}},$$

wobei indes die Fussnote pag. 113 zu beachten ist. Schätzt man nun die a und ϱ wieder nach den Formeln (113), (16) ab, so kommt:

$$\left|b_i^{(\nu)}\right| < \frac{2\left|a_{e+i}\right|\nu^{\mathrm{Max}(k_{e+i},\,k_0)}}{\frac{1}{4}\left|a_e\right|(\nu+r-e-i)^{k_e}} + \sum_{j=1}^{r-e-i}\left|b_{i+j}^{(\nu)}\right| \frac{K_{e-j}(\nu+r-e-i-j)^{\mathrm{Max}(k_0,\,k_1,\,\ldots\,k_{e-j})}}{\frac{1}{4}\left|a_e\right|(\nu+r-e-i)^{k_e}},$$

wobei $K_0 = 1$ zu setzen, und im übrigen die Summe nur soweit auszudehnen ist, als die Indices der K nicht negativ werden. Das Glied vor dem Summenzeichen ist nun wieder $< G$, während die Quotienten unter dem Summenzeichen nach (14) alle keiner als 1 sind. Man erhält daher

$$\left|b_i^{(\nu)}\right| < G + \left|b_{i+1}^{(\nu)}\right| + \left|b_{i+2}^{(\nu)}\right| + \cdots + \left|b_{r-e}^{(\nu)}\right|.$$

Hieraus folgt aber für $i = r-e-1,\ r-e-2,\ \ldots 2, 1$ sukzessive, da ja bereits $\left|b_{r-e}^{(\nu)}\right| < G$ gezeigt ist:

$$\left|b_{r-e-1}^{(\nu)}\right| < 2\,G,\ \left|b_{r-e-2}^{(\nu)}\right| < 4\,G,\ \ldots\ \left|b_1^{(\nu)}\right| < 2^{r-e-1}G.$$

Daher ist a fortiori allgemein (siehe Definitionsgleichung (10)):

$$\left|b_i^{(\nu)}\right| < 2^{r-e-1}G = H \qquad (i = 1, 2, \ldots r-e). \tag{17}$$

Weiter schliesst man nun aus der e^{ten} unter den Gleichungen (8):

$$\left|a_e^{(\nu)}\right| \leq \left|\varrho_e^{(\nu+r-e)}\right| + \sum_{j=1}^{e-1}\left|b_j^{(\nu)}\varrho_{e-j}^{(\nu+r-e-j)}\right|,$$

also erst recht nach (12), (16), (17):

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}|a_e|(\nu+r-e)^{k_e}\\
&<|\varrho_e^{(\nu+r-e)}|+H\sum_{j=1}^{r-e}K_{e-j}(\nu+r-e-j)^{\mathrm{Max}\,(k_0,k_1,\dots k_{e-j})}\\
&<|\varrho_e^{(\nu+r-e)}|+H(K_{e-1}+K_{e-2}+\cdots+K_1+1)(\nu+r-e-1)^{\mathrm{Max}\,(k_0,k_1,\dots k_{e-1})}\\
&<|\varrho_e^{(\nu+r-e)}|+\tfrac{1}{4}|a_e|(\nu+r-e)^{k_e}\quad\text{(nach Ungleichung (15))}.
\end{aligned}$$

Das besagt aber:

$$|\varrho_e^{(\nu+r-e)}|>\tfrac{1}{4}|a_e|(\nu+r-e)^{k_e}. \tag{18}$$

Endlich folgt noch aus der j^{ten} der Gleichungen (8):

$$|a_j^{(\nu)}|>|\varrho_j^{(\nu+r-e)}|-\sum_{i=1}^{r-e}|b_i^{(\nu)}\varrho_{j-i}^{(\nu+r-e-i)}|\qquad(j=1,2,\dots e-1).$$

Daher a fortiori nach (13), (16), (17):

$$|\varrho_j^{(\nu+r-e)}|<2|a_j|\,\nu^{\mathrm{Max}\,(k_j,k_0)}+H\sum_{i=1}^{r-e}K_{j-i}(\nu+r-e-i)^{\mathrm{Max}\,(k_0,k_1,\dots k_{j-i})}.$$

Der grösste der hier auftretenden Exponenten ist offenbar gleich

$$\mathrm{Max}\,(k_0,k_1,\dots k_j)\geq 0,$$

sodass erst recht die Ungleichung besteht:

$$|\varrho_j^{(\nu+r-e)}|<[2|a_j|+H(1+K_1+K_2+\cdots+K_{j-1})](\nu+r-e)^{\mathrm{Max}\,(k_0,k_1,\dots k_j)}.$$

Nach der Definition der Zahlen K_j durch die Gleichungen (11) besagt dies aber nichts anderes als

$$|\varrho_j^{(\nu+r-e)}|<K_j(\nu+r-e)^{\mathrm{Max}\,(k_0,k_1,\dots k_j)}. \tag{19}$$

Die Ungleichungen (18) und (19) sind nun aber gerade diejenigen, welche bewiesen werden sollten. Dadurch ist die Allgemeingiltigkeit der Ungleichungen

$$
\begin{aligned}
&|\varrho_e^{(\nu)}| > \tfrac{1}{4}|a_e|\,\nu^{k_e} \\
&|\varrho_j^{(\nu)}| < K_j\,\nu^{\mathrm{Max}(k_0,k_1,\ldots k_j)} \qquad (j = 1, 2, \ldots e-1)
\end{aligned} \tag{20}
$$

für $\nu \geq N$ dargetan, und zugleich hat sich in (17) das weitere wichtige Resultat ergeben, *dass die* $b_i^{(\nu)}$ *absolut alle unter einer von* ν *unabhängigen Schranke* H *bleiben*.

Diese Endresultate gelten nun auch wieder für $e = 0$ und $e = r$, in welchen Fällen ja $b_i^{(\nu)} = a_i^{(\nu)}$ bez. $\varrho_i^{(\nu)} = a_i^{(\nu)}$ ist, sodass für diese Fälle unsere Resultate bereits in den Formeln (2) stecken.

§ 3. Beim Studium gewisser Partikulärintegrale wird uns ein *Reziprozitätsprinzip* von Nutzen sein, das wir zunächst herleiten wollen. Seien $x_0, x_1, x_2, \ldots$ $y_0, y_1, y_2, \ldots$ zwei Serien von unendlich vielen Variabeln, welche durch ein Gleichungssystem der Form

$$y_\nu = c_0^{(\nu)} x_\nu + c_1^{(\nu)} x_{\nu+1} + c_2^{(\nu)} x_{\nu+2} + \cdots \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

mit einander verbunden sind. Die Umkehrung dieses Systems suchen wir durch den Ansatz

$$x_\nu = d_0^{(\nu)} y_\nu + d_1^{(\nu)} y_{\nu+1} + d_2^{(\nu)} y_{\nu+2} + \cdots \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

zu bewerkstelligen. Um die Koeffizienten $d_i^{(\nu)}$ ohne Rücksicht auf Konvergenz rein formal zu berechnen, kann man auf doppelte Weise verfahren. Einmal setzen wir

$$
\begin{aligned}
y_\nu &= c_0^{(\nu)} x_\nu + c_1^{(\nu)} x_{\nu+1} + c_2^{(\nu)} x_{\nu+2} + \cdots \\
y_{\nu+1} &= c_0^{(\nu+1)} x_{\nu+1} + c_1^{(\nu+1)} x_{\nu+2} + c_2^{(\nu+1)} x_{\nu+3} + \cdots \\
y_{\nu+2} &= c_0^{(\nu+2)} x_{\nu+2} + c_1^{(\nu+2)} x_{\nu+3} + c_2^{(\nu+2)} x_{\nu+4} + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

multiplizieren diese Gleichungen der Reihe nach mit $d_0^{(\nu)}, d_1^{(\nu)}, d_2^{(\nu)}, \ldots$ und addieren sie. Wir bekommen dann, damit sich die rechte Seite identisch auf x_ν reduziert, das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
&c_0^{(\nu)} d_0^{(\nu)} = 1 \\
&c_1^{(\nu)} d_0^{(\nu)} + c_0^{(\nu+1)} d_1^{(\nu)} = 0 \\
&c_2^{(\nu)} d_0^{(\nu)} + c_1^{(\nu+1)} d_1^{(\nu)} + c_0^{(\nu+2)} d_2^{(\nu)} = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned} \tag{A}
$$

aus welchem die Unbekannten $d_i^{(\nu)}$ sich eindeutig berechnen lassen, sofern nur $c_0^{(\nu)}$ für alle ν von Null verschieden ist.

Geht man aber umgekehrt von den Gleichungen

$$\begin{aligned} x_\nu &= d_0^{(\nu)} y_\nu + d_1^{(\nu)} y_{\nu+1} + d_2^{(\nu)} y_{\nu+2} + \\ x_{\nu+1} &= d_0^{(\nu+1)} y_{\nu+1} + d_1^{(\nu+1)} y_{\nu+2} + d_2^{(\nu+1)} y_{\nu+3} + \cdots \\ x_{\nu+2} &= d_0^{(\nu+2)} y_{\nu+2} + d_1^{(\nu+2)} y_{\nu+3} + d_2^{(\nu+2)} y_{\nu+4} + \\ &\quad \cdots \end{aligned}$$

aus, multipliziert diese der Reihe nach mit $c_0^{(\nu)}, c_1^{(\nu)}, c_2^{(\nu)}, \ldots$ und addiert sie dann, so erhält man analog:

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} & c_0^{(\nu)} d_0^{(\nu)} = 1 \\ & c_1^{(\nu)} d_0^{(\nu+1)} + c_0^{(\nu)} d_1^{(\nu)} = 0 \\ & c_2^{(\nu)} d_0^{(\nu+2)} + c_1^{(\nu)} d_1^{(\nu+1)} + c_0^{(\nu)} d_2^{(\nu)} = 0 \\ & \quad \cdots \end{aligned}$$

Dies ist ein zweites Gleichungssystem für die Unbekannten $d_i^{(\nu)}$, und die gesuchte Reziprozität besteht nun darin, *dass die beiden Systeme* (A) *und* (B), *obwohl sie total von einander verschieden sind, doch die nämlichen Werte für die* $d_i^{(\nu)}$ *liefern müssen.* Man verifiziert dies leicht, indem man etwa die $i+1$ ersten Gleichungen des Systems (A), welche die $i+1$ Unbekannten $d_0^{(\nu)}, d_1^{(\nu)}, \ldots d_i^{(\nu)}$ enthalten, nach $d_i^{(\nu)}$ auflöst; es ergibt sich:

$$c_0^{(\nu)} c_0^{(\nu+1)} \ldots c_0^{(\nu+i)} d_i^{(\nu)} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_0^{(\nu)} & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ c_1^{(\nu)} & c_0^{(\nu+1)} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i-1}^{(\nu)} & c_{i-2}^{(\nu+1)} & c_{i-3}^{(\nu+2)} & \ldots & 0 \\ c_i^{(\nu)} & c_{i-1}^{(\nu+1)} & c_{i-2}^{(\nu+2)} & \ldots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^i \begin{vmatrix} c_1^{(\nu)} & c_0^{(\nu+1)} & 0 & \ldots & 0 \\ c_2^{(\nu)} & c_1^{(\nu+1)} & c_0^{(\nu+2)} & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i-1}^{(\nu)} & c_{i-2}^{(\nu+1)} & c_{i-3}^{(\nu+2)} & \ldots & c_0^{(\nu+i-1)} \\ c_i^{(\nu)} & c_{i-1}^{(\nu+1)} & c_{i-2}^{(\nu+2)} & \ldots & c_1^{(\nu+i-1)} \end{vmatrix}.$$

Um ebenso das System (B) aufzulösen, müssen wir es zuerst dadurch umformen, dass wir an Stelle von ν in der ersten Gleichung $\nu+i$ setzen, in der zweiten $\nu+i-1$, in der dritten $\nu+i-2$, etc. Die $i+1$ ersten Gleichungen enthalten dann die $i+1$ Unbekannten $d_0^{(\nu+i)}, d_1^{(\nu+i-1)}, \ldots d_i^{(\nu)}$, und die Auflösung nach $d_i^{(\nu)}$ ergibt:

$$c_0^{(\nu)} c_0^{(\nu+1)} \dots c_0^{(\nu+i)} d_i^{(\nu)} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_0^{(\nu+i)} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ c_1^{(\nu+i-1)} & c_0^{(\nu+i-1)} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{i-1}^{(\nu+1)} & c_{i-2}^{(\nu+1)} & c_{i-3}^{(\nu+1)} & \dots & 0 \\ c_i^{(\nu)} & c_{i-1}^{(\nu)} & c_{i-2}^{(\nu)} & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^i \begin{vmatrix} c_1^{(\nu+i-1)} & c_0^{(\nu+i-1)} & 0 & \dots & 0 \\ c_2^{(\nu+i-1)} & c_1^{(\nu+i-2)} & c_0^{(\nu+i-2)} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{i-1}^{(\nu+1)} & c_{i-2}^{(\nu+1)} & c_{i-3}^{(\nu+1)} & \dots & c_0^{(\nu+1)} \\ c_i^{(\nu)} & c_{i-1}^{(\nu)} & c_{i-2}^{(\nu)} & \dots & c_1^{(\nu)} \end{vmatrix}.$$

Beide Resultate sind aber in der Tat identisch, da die zwei Determinanten durch Drehung um die Nebendiagonale in einander übergehen.[1]

Um jetzt zu unserer eigentlichen Aufgabe überzugehen, sei E_ν irgend ein Integral der Differenzengleichung (7). Da die Koeffizienten $b_i^{(\nu)}$ absolut unter einer endlichen Schranke H bleiben, so ist nach Satz 1:

$$|E_\nu| < C M^\nu. \tag{21}$$

Jede Funktion D_ν, die der nicht homogenen Differenzengleichung

$$D_{\nu+e} + \varrho_1^{(\nu)} D_{\nu+e-1} + \dots + \varrho_e^{(\nu)} D_\nu = E_\nu \tag{22}$$

genügt, ist offenbar ein Integral von (1). Wir wollen versuchen, ein solches Integral in Form einer unendlichen Reihe

$$D_\nu = p_0^{(\nu)} E_\nu + p_1^{(\nu)} E_{\nu+1} + p_2^{(\nu)} E_{\nu+2} + \dots \tag{23}$$

darzustellen. Da aber die $b_i^{(\nu)}$, $\varrho_i^{(\nu)}$, also auch E_ν nur für $\nu \geqq N$ eingeführt sind, so ist eine solche Darstellung natürlich auch auf die Indices $\nu \geqq N$ beschränkt. Allein die N fehlenden Werte $D_{N-1}, D_{N-2}, \dots D_0$ ergeben sich dann sofort aus (1), da ja alle $a_r^{(\nu)} \neq 0$ sind. Die Koeffizienten $p_i^{(\nu)}$ in (23) müssen wir nun derart bestimmen, dass Gleichung (22) identisch erfüllt wird. Bedeutet also ν irgend einen Index $\geqq N$, so werden wir den Ansatz machen:

$$\begin{aligned} D_\nu &= p_0^{(\nu)} E_\nu + p_1^{(\nu)} E_{\nu+1} + p_2^{(\nu)} E_{\nu+2} + \dots \\ D_{\nu+1} &= p_0^{(\nu+1)} E_{\nu+1} + p_1^{(\nu+1)} E_{\nu+2} + p_2^{(\nu+1)} E_{\nu+3} + \dots \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ D_{\nu+e} &= p_0^{(\nu+e)} E_{\nu+e} + p_1^{(\nu+e)} E_{\nu+e+1} + p_2^{(\nu+e)} E_{\nu+e+2} + \dots, \end{aligned}$$

[1] Für $i = 0$ versagen diese Determinanten. Aber dieser Fall ist trivial, da ja ohne weiteres aus der ersten Gleichung von (A) sowohl als von (B) übereinstimmend folgt: $d_0^{(\nu)} = \frac{1}{c_0^{(\nu)}}$.

sodann diese Gleichungen der Reihe nach mit $\varrho_\nu^{(\nu)}, \varrho_{\nu-1}^{(\nu)}, \ldots \varrho_1^{(\nu)}, 1$ multiplizieren und sie addieren. Die rechte Seite muss sich dann, damit Gleichung (22) besteht, auf E_ν reduzieren, und dies wird sicher dann der Fall sein, wenn die $p_i^{(\nu)}$ gewissen leicht angebbaren Rekursionsformeln genügen, aus denen sie eindeutig berechnet werden können.

Wenn nun die aus den gedachten Rekursionsformeln berechneten Zahlen $p_i^{(\nu)}$ derart sind, dass die Reihe (23) für alle $\nu(>N)$ konvergiert, so wird die durch diese Reihe definierte Funktion D_ν identisch die Gleichung (22) befriedigen und folglich ein Integral der Differenzengleichung (1) sein. Die gedachten Rekursionsformeln gestatten indes keine brauchbare Abschätzung der Zahlen $p_i^{(\nu)}$, um die Konvergenz der Reihe (23) erkennen zu lassen. Nun besagt aber das oben bewiesene *Reziprozitätsprinzip*, dass man genau die gleichen $p_i^{(\nu)}$ noch auf eine zweite Art berechnen kann, nämlich, indem man umgekehrt die mit (22) gleichbedeutenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
E_\nu &= -\varrho_\nu^{(\nu)} D_\nu + \varrho_{\nu-1}^{(\nu)} D_{\nu+1} + \cdots + \varrho_1^{(\nu)} D_{\nu+\varrho-1} + D_{\nu+\varrho}\\
E_{\nu+1} &= -\varrho_\varrho^{(\nu+1)} D_{\nu+1} + \varrho_{\varrho-1}^{(\nu+1)} D_{\nu+2} + \cdots + \varrho_1^{(\nu+1)} D_{\nu+\varrho} + D_{\nu+\varrho+1}\\
E_{\nu+2} &= -\varrho_\varrho^{(\nu+2)} D_{\nu+2} + \varrho_{\varrho-1}^{(\nu+2)} D_{\nu+3} + \cdots + \varrho_1^{(\nu+2)} D_{\nu+\varrho+1} + D_{\nu+\varrho+2}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

der Reihe nach mit $p_0^{(\nu)}, p_1^{(\nu)}, p_2^{(\nu)}, \ldots$ multipliziert und sie dann addiert, wobei die rechte Seite sich identisch auf D_ν reduzieren muss. Es ergibt sich so das System von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\varrho_\nu^{(\nu)} p_0^{(\nu)} = 1\\
&\varrho_{\varrho-1}^{(\nu)} p_0^{(\nu)} + \varrho_\varrho^{(\nu+1)} p_1^{(\nu)} = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(24)\qquad &p_0^{(\nu)} + \varrho_1^{(\nu+1)} p_1^{(\nu)} + \varrho_2^{(\nu+2)} p_2^{(\nu)} + \cdots + \varrho_\varrho^{(\nu+\varrho)} p_\varrho^{(\nu)} = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&p_{\lambda-\varrho}^{(\nu)} + \varrho_1^{(\nu+\lambda-\varrho+1)} p_{\lambda-\varrho+1}^{(\nu)} + \varrho_2^{(\nu+\lambda-\varrho+2)} p_{\lambda-\varrho+2}^{(\nu)} + \cdots + \varrho_\varrho^{(\nu+\lambda)} p_\lambda^{(\nu)} = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich sukzessive $p_0^{(\nu)}, p_1^{(\nu)}, p_2^{(\nu)}, \ldots$. Die erste dieser Gleichungen besagt speziell:

$$p_0^{(\nu)} = \frac{1}{\varrho_\varrho^{(\nu)}}.$$

Da wir aber $\nu \geq N$ angenommen haben, so ergibt sich aus (20):

$$|p_0^{(\nu)}| < \frac{4}{|a_e|}\,\nu^{-k_e}. \tag{25}$$

Von der zweiten ab können wir die Gleichungen (24) in der gemeinsamen Form schreiben:

$$p_{\lambda-e}^{(\nu)} + \varrho_1^{(\nu+\lambda-e+1)}\,p_{\lambda-e+1}^{(\nu)} + \varrho_2^{(\nu+\lambda-e+2)}\,p_{\lambda-e+2}^{(\nu)} + \cdots + \varrho_e^{(\nu+\lambda)}\,p_\lambda^{(\nu)} = 0,$$

sofern wir darin $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ setzen und übereinkommen, dass die $p^{(\lambda)}$ mit negativem unterem Index gleich Null sein sollen. Dividiert man durch $\varrho_e^{(\nu+\lambda)}$, so kommt:

$$-p_\lambda^{(\nu)} = \sum_{j=0}^{e-1} \frac{\varrho_j^{(\nu+\lambda-e+j)}}{\varrho_e^{(\nu+\lambda)}}\,p_{\lambda-e+j}^{(\nu)} \qquad (\text{wobei } \varrho_0^{(\nu+\lambda-e)} = 1),$$

und hieraus, indem man die ϱ mittels der Ungleichungen (20) abschätzt:

$$\begin{aligned} |p_\lambda^{(\nu)}| &< \sum_{j=0}^{e-1} \frac{K_j(\nu+\lambda-e+j)^{\operatorname{Max}(k_0,k_1,\ldots k_j)}}{\frac{1}{4}|a_e|(\nu+\lambda)^{k_e}}\,|p_{\lambda-e+j}^{(\nu)}| \\ &< \sum_{j=0}^{e-1} \frac{4K_j}{|a_e|}(\nu+\lambda)^{\operatorname{Max}(k_0,k_1,\ldots k_j)-k_e}\,|p_{\lambda-e+j}^{(\nu)}|, \end{aligned} \tag{26}$$

wobei wieder $K_0 = 1$ zu denken ist. Bedeutet nun L eine Zahl, die so gross ist, dass

$$\sum_{j=0}^{e-1} \frac{4K_j}{|a_e|}\,L^{j-e} < 1 \tag{27}$$

wird, und setzt man

$$\min_{j=0}^{e-1} \frac{k_e - k_j}{e-j} = s, \tag{28}$$

sodass s wegen der Ungleichungen (4) eine *positive* Zahl ist, so behaupte ich, es ist

$$|p_\lambda^{(\nu)}| < \frac{4}{|a_e|}\,\nu^{-k_e} L^\lambda (\lambda!)^{-s}.$$

In der Tat gilt diese Ungleichung nach (25) jedenfalls für $\lambda = 0$. Ihre Allgemeingiltigkeit ergibt sich dann durch vollständige Induktion; denn wenn wir sie für kleinere Werte von λ als richtig annehmen, so folgt aus (26):

$$|p_\lambda^{(\nu)}| < \sum_{j=0}^{e-1} \frac{4 K_j}{|a_e|} (\nu+\lambda)^{\mathrm{Max}(k_0, k_1, \ldots k_j) - k_e} \frac{4}{|a_e|} \nu^{-k_e} L^{\lambda-e+j} [(\lambda-e+j)!]$$

$$\frac{4}{|a_e|} \nu^{-k_e} L^\lambda (\lambda!)^{-s} \sum_{j=0}^{e-1} \frac{4 K_j}{|a_e|} (\nu+\lambda)^{\mathrm{Max}(k_0, k_1, \ldots k_j) - k_e} L^{j-e} [\lambda(\lambda-1) \ldots (\lambda-e+j+1)]^s$$

$$< \frac{4}{|a_e|} \nu^{-k_e} L^\lambda (\lambda!)^{-s} \sum_{j=0}^{e-1} \frac{4 K_j}{|a_e|} L^{j-e} (\nu+\lambda)^{\mathrm{Max}(k_0, k_1, \ldots k_j) - k_e + (e-j)s}.$$

Wenn wir nun zeigen können, dass in jedem Term dieser letzten Summe der Exponent von $\nu+\lambda$ negativ oder höchstens gleich Null ist, so folgt wegen (27) in der Tat:

$$|p_\lambda^{(\nu)}| < \frac{4}{|a_e|} \nu^{-k_e} L^\lambda (\lambda!)^{-s}. \tag{29}$$

womit die Allgemeingiltigkeit dieser Ungleichung bewiesen wäre. Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass

$$\mathrm{Max}(k_0, k_1, \ldots k_j) - k_e + (e-j)s \leq 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots e-1)$$

ist. Nun besagt aber die Definitionsgleichung (28), dass s die grösste Zahl ist, welche den e Ungleichungen genügt:

$$s \leq \frac{k_e - k_j}{e-j} \qquad (j = 0, 1, \ldots e-1),$$

oder auch

$$(e-j)s < k_e - k_j \qquad (j = 0, 1, \ldots e-1).$$

Setzt man $j-i$ an Stelle von j, so kommt

$$(e-j+i)s \leq k_e - k_{j-i} \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots j \\ j = 0, 1, \ldots e-1 \end{pmatrix},$$

also a fortiori

$$(e-j)s \leq k_e - k_{j-i}.$$

Da dies für $i = 0, 1, \ldots j$ gilt, so ergibt sich auch

$$(e-j)s \leq \min_{i=0}^{j} (k_e - k_{j-i})$$

$$= k_e - \mathrm{Max}(k_0, k_1, \ldots k_j).$$

Es ist also in der Tat, wie behauptet:

$$\operatorname{Max}(k_0, k_1, \ldots k_j) - k_e + (e-j)s < 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots e-1), \tag{30}$$

womit dann auch der Beweis von (29) beendet ist. Zugleich zeigt unsere Analyse, dass s die grösste Zahl ist, welche den e Ungleichungen (30) gleichzeitig Genüge leistet.

Aus (21) und (29) folgt nun sofort die absolute Konvergenz der Reihe

$$D_\nu = p_0^{(\nu)} E_\nu + p_1^{(\nu)} E_{\nu+1} + p_2^{(\nu)} E_{\nu+2} + \cdots \qquad (\nu > N), \tag{23}$$

die folglich ein Integral von (1) darstellt. Zugleich erhält man auch die Abschätzungsformel:

$$|D_\nu| \leq \sum_{\lambda=0}^{\infty} |p_\lambda^{(\nu)} E_{\nu+\lambda}| < \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left|\frac{4}{a_e}\right| \nu^{-k_e} L^\lambda (\lambda!)^{-s} C M^{\nu+\lambda}$$

$$< \frac{4C}{|a_e|} M^\nu \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(LM)^\lambda}{(\lambda!)^s}.$$

Diese letzte Summe ist aber eine von ν unabhängige Konstante, sodass wir schliesslich erhalten:

$$|D_\nu| < G M^\nu,$$

wo auch G von ν nicht abhängt (wohl aber, ebenso wie C, von den Anfangswerten $E_N, E_{N+1}, \ldots E_{N+r-e-1}$).

In (23) bedeutete nun E_ν ein beliebiges Integral der Differenzengleichung (7). Da diese von der $(r-e)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, so hat sie $r-e$ unabhängige Integrale

$$E_\nu^{(1)}, E_\nu^{(2)}, \ldots E_\nu^{(r-e)},$$

aus denen sich das allgemeine durch lineare Kombination ergibt. Diesen $r-e$ Integralen entsprechend erhalten wir daher auch $r-e$ Integrale von (1), welche sich für $\nu > N$ in der Form darstellen lassen:

$$D_\nu^{(i)} = p_0^{(\nu)} E_\nu^{(i)} + p_1^{(\nu)} E_{\nu+1}^{(i)} + p_2^{(\nu)} E_{\nu+2}^{(i)} + \cdots \qquad (i = 1, 2, \ldots r-e),$$

und welche ebenfalls linear unabhängig sind. Denn hätte man identisch für alle ν:

$$\sum_{i=1}^{r-e} c_i D_\nu^{(i)} = 0,$$

so würde hieraus folgen:

$$0 = \sum_{i=1}^{r-e} c_i D_{\nu+e}^{(i)} + \varrho_1^{(\nu)} \sum_{i=1}^{r-e} c_i D_{\nu+e-1}^{(i)} + \cdots + \varrho_e^{(\nu)} \sum_{i=1}^{r-e} c_i D_\nu^{(i)}$$

$$\sum_{i=1}^{r-e} c_i (D_{\nu+e}^{(i)} + \varrho_1^{(\nu)} D_{\nu+e-1}^{(i)} + \cdots + \varrho_e^{(\nu)} D_\nu^{(i)}) \quad \sum_{i=1}^{r-e} c_i E_\nu^{(i)},$$

was aber mit der Unabhängigkeit der $E_\nu^{(i)}$ im Widerspruch steht. *Somit ist die Existenz von $r-e$ unabhängigen Partikulärintegralen der Differenzengleichung* (1) *nachgewiesen, für welche die Ungleichung gilt*

$$|D_\nu^{(i)}| < M^\nu \qquad (i = 1, 2, \ldots r-e), \tag{31}$$

da man rechter Hand den Faktor G ja offenbar unterdrücken kann, wenn man nur die willkürlichen von ν freien Faktoren, die doch in $E_\nu^{(1)}, E_\nu^{(2)}, \ldots E_\nu^{(r-e)}$ stecken, geeignet normiert. Für jedes aus den genannten Partikulärintegralen linear zusammengesetzte Integral ist dann natürlich $|D_\nu| < C M^\nu$, wo C noch von den Anfangswerten $D_0, D_1, \ldots D_{r-1}$ abhängt.

Ist $e = 0$, so bleibt dies Resultat bestehen, da wir ja schon früher in Satz 1 sahen, dass dann für alle Integrale die Ungleichung $|D_\nu| < C M^\nu$ gilt. Für $e > 0$ aber fanden wir bis jetzt bloss $r-e$ linear unabhängige Integrale, die einer solchen Ungleichung genügen, und wir werden im nächsten Paragraphen sehen, dass es auch mehr nicht gibt. Speziell für $e = r$ ist natürlich die bisherige Untersuchung überhaupt noch resultatlos.

§ 4. Weitere Integrale von (1) ergeben sich aus der Bemerkung, dass die sämtlichen Integrale der Differenzengleichung

$$D_{\nu+e} + \varrho_1^{(\nu)} D_{\nu+e-1} + \varrho_2^{(\nu)} D_{\nu+e-2} + \cdots + \varrho_e^{(\nu)} D_\nu = 0 \tag{32}$$

a fortiori auch Integrale von (5) und folglich von (1) sind. Da die Differenzengleichung (32) von der e^{ten} Ordnung ist, so wird sie e linear unabhängige Integrale haben, die wir mit

$$D_\nu^{(r-e+1)}, D_\nu^{(r-e+2)}, \ldots D_\nu^{(r)} \tag{33}$$

bezeichnen wollen. Es ist nun leicht zu sehen, dass diese e Integrale mit den $r-e$ vorhin gefundenen $D_\nu^{(1)}, D_\nu^{(2)}, \ldots D_\nu^{(r-e)}$ zusammen ein Fundamentalsystem von Integralen der Differenzengleichung (1) bilden. Wäre nämlich identisch für alle ν:

$$\sum_{i=1}^{r} c_i D_\nu^{(i)} = 0, \tag{34}$$

so würde hieraus folgen:

$$0 = \sum_{i=1}^{r} c_i D_{\nu+e}^{(i)} + \varrho_1^{(\nu)} \sum_{i=1}^{r} c_i D_{\nu+e-1}^{(i)} + \cdots + \varrho_e^{(\nu)} \sum_{i=1}^{r} c_i D_\nu^{(i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} c_i (D_{\nu+e}^{(i)} + \varrho_1^{(\nu)} D_{\nu+e-1}^{(i)} + \cdots + \varrho_e^{(\nu)} D_\nu^{(i)}).$$

Von dieser Summe verschwinden aber die e letzten Terme, weil die betreffenden $D_\nu^{(i)}$ Integrale von (32) sind. Die $r - e$ ersten Terme dagegen haben die allgemeine Form $c_i E_\nu^{(i)}$; also folgt

$$\sum_{i=1}^{r-e} c_i E_\nu^{(i)} = 0.$$

Eine solche Identität ist aber wieder nur möglich, wenn

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_{r-e} = 0$$

ist. Die Gleichung (34) reduziert sich daher auf

$$\sum_{i=r-e+1}^{r} c_i D_\nu^{(i)} = 0,$$

woraus wegen der linearen Unabhängigkeit der Integrale (33) auch noch

$$c_{r-e+1} = c_{r-e+2} = \cdots = c_r = 0$$

folgt. Eine Identität der Form (34) kann also nur dann für alle ν bestehen, wenn sämtliche Koeffizienten c_i verschwinden. Das besagt aber, dass die r Integrale $D_\nu^{(1)}, D_\nu^{(2)}, \ldots D_\nu^{(r)}$ linear unabhängig sind. W. z. b. w.

Untersuchen wir nun, wie sich die e letzten Integrale, und überhaupt jedes Integral von (32) im Unendlichen verhalten. Sei D_ν irgend ein Integral von (32), und es bedeute μ einen im folgenden unverändert festzuhaltenden Index ($\geq N$), für den $D_\mu \neq 0$ ist.[1] Es besteht dann das Gleichungssystem:

[1] Unter je e aufeinander folgenden Indices muss sich notwendig ein solcher finden, weil sonst wegen (32) D_ν für alle ν verschwinden würde. Man kann also μ etwa aus der Reihe der Zahlen $N, N+1, \ldots N+e-1$ wählen.

$$D_{\mu+e} + \varrho_1^{(\mu)} D_{\mu+e-1} + \cdots + \varrho_e^{(\mu)} D_\mu = 0$$
$$D_{\mu+e+1} + \varrho_1^{(\mu+1)} D_{\mu+e} + \cdots + \varrho_e^{(\mu+1)} D_{\mu+1} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$D_{\mu+\nu+e} + \varrho_1^{(\mu+\nu)} D_{\mu+\nu+e-1} + \cdots + \varrho_e^{(\mu+\nu)} D_{\mu+\nu} = 0 .$$

Wir multiplizieren diese Gleichungen der Reihe nach mit den Zahlen $p_0^{(\mu)}, p_1^{(\mu)}, \ldots p_\nu^{(\mu)}$, und addieren sie. Dann fallen auf der linken Seite, weil die Multiplikatoren den Rekursionsformeln (24) genügen (für $\nu = \mu$), die Grössen $D_{\mu+1}, D_{\mu+2}, \ldots D_{\mu+\nu}$ heraus, während D_μ den Koeffizienten 1 erhält. Es kommt also, wenn man D_μ auf die andre Seite bringt:

$$p_\nu^{(\mu)} D_{\mu+\nu+e} + (p_{\nu-1}^{(\mu)} + \varrho_1^{(\mu+\nu)} p_\nu^{(\mu)}) D_{\mu+\nu+e-1} + \cdots$$
$$+ (p_{\nu-e+1}^{(\mu)} + \varrho_1^{(\mu+\nu-e+2)} p_{\nu-e+2}^{(\mu)} + \cdots + \varrho_{\nu-1}^{(\mu+\nu)} p_\nu^{(\mu)}) D_{\mu+\nu+1} = -D_\mu ,$$

oder kürzer

$$\sum_{i=1}^{e} \omega_i D_{\mu+\nu+i} = -D_\mu , \tag{35}$$

wo zur Abkürzung

$$\omega_i = \sum_{j=0}^{e-i} \varrho_j^{(\mu+\nu-e+i+j)} p_{\nu-e+i+j}^{(\mu)}$$

gesetzt ist. Für diesen letzten Ausdruck erhält man aber nach (20) und (29) die Abschätzung

$$|\omega_i| < \sum_{j=0}^{e-i} K_j (\mu + \nu - e + i + j)^{\mathrm{Max}\,(k_0, k_1, \ldots k_j)} \left|\frac{4}{a_e}\right|^{\mu} L^{\nu-e+i+j} [(\nu - e + i + j)!]^{-s}$$
$$< \sum_{j=0}^{e-i} K_j (\mu + \nu)^{k_e} \left|\frac{4}{a_e}\right|^{\mu} L^{\nu-e+i+j} [(\nu - e)!]^{-s}$$
$$= (\mu + \nu)^{k_e} L^{\nu+i} [(\nu - e)!]^{-s} \sum_{j=0}^{e-i} \left|\frac{4}{a_e}\right|^{\mu} K_j L^{j-e} .$$

Für hinreichend grosse Werte von ν ist daher auch, da μ unverändert festbleibt:

$$|\omega_i| < \frac{(2L)^{\mu+\nu+e}}{[(\mu + \nu + e)!]^s} .$$

Aus (35) ergibt sich dann

$$\sum_{i=1}^{e} \frac{(2L)^{\mu+\nu+e}}{[(\mu+\nu+e)!]^s} |D_{\mu+\nu+i}| > |D_\mu^*|.$$

Somit ist mindestens einer der links stehenden Summanden grösser als $\frac{1}{e}|D_\mu|$; also jedenfalls

$$\max_{i=1}^{e} |D_{\mu+\nu+i}| > \frac{1}{e}|D_\mu| \frac{[(\mu+\nu+e)!]^s}{(2L)^{\mu+\nu+e}}$$
$$> \frac{[(\mu+\nu+e)!]^s}{(3L)^{\mu+\nu+e}},$$

wenn nur ν hinreichend gross.

Dies besagt aber, dass es unbegrenzt viele Werte von ν gibt (nämlich für genügend grosse ν unter je e aufeinanderfolgenden mindestens einen), für welche

$$|D_\nu| > m_\nu (\nu!)^s \tag{36}$$

wird, wo m von ν und den Anfangswerten $D_0, D_1, \ldots D_{e-1}$ unabhängig ist.[1]

Dies gilt für jedes Integral von (32), also insbesondere auch von den Integralen (33). Es wird des weitern aber noch für jedes Integral von (1) gelten, welches nicht der partikulären Schar

$$c_1 D_\nu^{(1)} + c_2 D_\nu^{(2)} + \cdots + c_{r-e} D_\nu^{(r-e)}$$

angehört. Denn ein solches Integral hat notwendig die Form

$$2D_\nu + c_1 D_\nu^{(1)} + c_2 D_\nu^{(2)} + \cdots + c_{r-e} D_\nu^{(r-e)},$$

wo $2D_\nu$, also auch D_ν selbst ein nicht identisch verschwindendes Integral von (32) bedeutet. Nach (36) und (31) ist aber dann für unbegrenzt viele Werte von ν:

$$|2D_\nu + c_1 D_\nu^{(1)} + c_2 D_\nu^{(2)} + \cdots + c_{r-e} D_\nu^{(r-e)}|$$
$$> 2m^e(\nu!)^s - (|c_1| + |c_2| + \cdots + |c_{r-e}|) M^{\nu} \cdot m^e(\nu!)^s.$$

W. z. b. w.

[1] Von den Anfangswerten abhängig dagegen ist der kleinste ν-Wert, für welchen die Ungleichung (36) besteht. Will man ihn davon unabhängig haben, so ist auf der rechten Seite von (36) noch ein konstanter Faktor C beizusetzen, der dann seinerseits von den Anfangswerten abhängen wird, oder aber man lässt m von diesen abhängen. Übrigens wird die Abhängigkeit oder Unabhängigkeit (auch der Zahlen M, L etc.) von den Anfangswerten, da sie nirgends eine Rolle spielt, im folgenden nicht mehr weiter registriert.

Dies besagt zugleich, dass es ausser den Integralen der obigen partikulären Schar keines mehr gibt, das für alle ν (oder auch nur für alle hinreichend grossen ν) der Ungleichung $|D_\nu| < M^\nu$ Genüge leistet.

Zusammenfassend gewinnen wir den folgenden

Fundamentalsatz: *Wenn die Koeffizienten der linearen Differenzengleichung* r^{ter} *Ordnung*

$$D_{\nu+r} + a_1^{(\nu)} D_{\nu+r-1} + a_2^{(\nu)} D_{\nu+r-2} + \cdots + a_r^{(\nu)} D_\nu = 0$$

die Form haben:

$$a_i^{(\nu)} = a_i \{\nu^{k_i}\}_j \qquad a_i \neq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots r),$$
$$a_r^{(\nu)} \neq 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots);$$

wenn ferner e *denjenigen der Indices* $0, 1, \ldots r$ *bedeutet, welcher durch die Ungleichungen*

$$k_e \begin{cases} > k_i \text{ für } i < e \\ \geq k_i \text{ für } i > e, \end{cases}$$

wobei $k_0 = 0$ *sein soll, eindeutig bestimmt wird; wenn endlich* $k_e < \infty$ *ist:*

dann hat die Differenzengleichung genau $r - e$ *linear unabhängige Integrale, für welche*

$$|D_\nu| < M^\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist, während dagegen jedes andre Integral für unbegrenzt viele Werte von ν *der mit der vorigen unverträglichen Ungleichung*

$$|D_\nu| > m^\nu (\nu!)^s, \quad s = \operatorname*{Min}_{j=0}^{e-1} \frac{k_e - k_j}{e - j}$$

genügt. M und m sind dabei von ν *unabhängige Konstanten.*

Eine Bemerkung knüpft sich noch an den Fall $e = 1$. Wir sahen nämlich, dass die Ungleichung (36) für *mindestens einen* von e aufeinanderfolgenden hinreichend grossen ν-Werten besteht. Wenn nun $e = 1$ ist, besagt dies aber, dass sie für *alle* hinreichend grossen Werte von ν gilt. Wir dürfen daher, wenn $e = 1$ ist, in dem Fundamentalsatz die Worte »für unbegrenzt viele Werte von ν» ersetzen durch: »für alle ν über einer gewissen Grenze».

Unsere Überlegungen lassen sich mit geringen Modifikationen auf den bisher ausgeschlossenen Fall $k_e = \infty$ übertragen, wobei wir jedoch annehmen müssen, dass dann die übrigen Exponenten $k_i < \infty$ sind, also endlich oder $-\infty$. Bei unserem ganzen Räsonnement kam es einzig und allein auf die Ungleichungen

(4), sowie darauf an, dass für $\nu \geq N$ die Ungleichungen (12) bis (15) bestanden. Daraus ergab sich dann die obere Schranke H für die Zahlen $|b_i^{(\nu)}|$, sowie auch die Abschätzungsformeln für $\varrho_i^{(\nu)}$ in (20) und für $p_\lambda^{(\nu)}$ in (29) mit allen daran geknüpften Folgerungen. Nun bleiben aber die Ungleichungen (12) bis (15) in dieser Form nicht bestehen, wenn $k_e = \infty$ ist, sodass auch die weiteren Konsequenzen hinfällig scheinen.

Wir bezeichnen dann mit k eine ganz beliebig grosse, aber fest gewählte Zahl, die insbesondere grösser sein soll als jeder der Exponenten k_i $(i \neq e)$, sodass die Ungleichungen (4) noch richtig bleiben, wenn man darin k_e durch k ersetzt. Wenn man ebenso auch in den Ungleichungen (12) bis (15) an Stelle von k_e diese Zahl k setzt, so werden die entstehenden Ungleichungen wegen $k_e = \infty$ ebenfalls sicher erfüllt sein, wenn nur $\nu \geq N$ ist,[1] wobei die Zahl N allerdings von k abhängt. Es bleiben daher auch alle aus den Ungleichungen (4) sowie (12) bis (15) gezogenen Folgerungen bestehen, sofern man in ihnen stets k_e ersetzt durch k. Insbesondere gilt dies also von den Abschätzungsformeln (20), (29) und bezüglich der Existenz der obern Schranke H für die Zahlen $|b_i^{(\nu)}|$. Daraus gewinnt man schliesslich auch, indem man immer Schritt für Schritt die früheren Überlegungen wiederholt, das gleiche Endresultat, worin wieder lediglich k_e durch k zu ersetzen ist. Es wird also $r - e$ linear unabhängige Partikulärintegrale geben, für welche $|D_\nu| < M^\nu$ ist, während alle andern Integrale für unendlich viele Werte von ν der Ungleichung

$$|D_\nu| > m^\nu (\nu!)^s$$

genügen, wobei natürlich s die entsprechende Bedeutung hat:

$$s = \operatorname*{Min}_{j=0}^{e-1} \frac{k - k_j}{e - j}.$$

Da aber die Zahl k von vorn herein beliebig gross gewählt werden durfte, so wird auch s so gross sein, wie man nur will. Während also $r - e$ linear unabhängige Partikulärintegrale kleiner bleiben als M^ν, *wird jedes andre Integral für unbegrenzt viele Werte von ν absolut grösser als eine beliebig hohe Potenz von $\nu!$*.

Bezüglich der $r - e$ Partikulärintegrale werden wir übrigens gleich noch weiter sehen, dass sie in Wahrheit noch viel kleiner sind als eben bewiesen; sie konvergieren nämlich mit wachsendem ν gegen Null, und zwar rascher als jede beliebig hohe Potenz von $\frac{1}{\nu!}$.

[1] Abgesehen von der Ungleichung (13) für $i = e$, welche aber, wie dort bereits bemerkt wurde, die weitere Untersuchung nicht beeinflusst.

§ 5. Der Fundamentalsatz des vorigen Paragraphen lässt sich erheblich verallgemeinern. Zu dem Zweck wenden wir die Transformation an:

$$D_\nu = (\nu!)^q \Delta_\nu, \tag{37}$$

wo der Exponent q irgend eine endliche reelle Zahl bedeute. Dadurch geht die Differenzengleichung (1) über in

$$\Delta_{\nu+r} + \frac{a_1^{(\nu)}}{(\nu+r)^q}\Delta_{\nu+r-1} + \cdots + \frac{a_r^{(\nu)}}{[(\nu+r)(\nu+r-1)\ldots(\nu+1)]^q}\Delta_\nu = 0,$$

wofür wir kürzer schreiben wollen

$$\Delta_{\nu+r} + b_1^{(\nu)}\Delta_{\nu+r-1} + b_2^{(\nu)}\Delta_{\nu+r-2} + \cdots + b_r^{(\nu)}\Delta_\nu = 0. \tag{38}$$

Es ist dann offenbar, wenn die $a_i^{(\nu)}$ wieder die Form (2) haben:

$$b_i^{(\nu)} = a_i\{\nu^{k_i - iq}\} \qquad (i = 1, 2, \ldots r) \tag{39}$$

$$b_r^{(\nu)} \neq 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Wenn wir den Fundamentalsatz auf die Differenzengleichung (38) anwenden wollen, wird es sich darum handeln, unter den Exponenten

$$k_0 = 0,\ k_1 - q,\ k_2 - 2q, \ldots\ k_r - rq \tag{40}$$

den ersten ausfindig zu machen, welcher den maximalen Wert hat.

Um zunächst den Fall

$$k_e = \infty,\ k_i < \infty \quad \text{für } i \neq e$$

zu erledigen, beachte man, dass dann bei ganz beliebigem q die Zahl $k_e - eq = \infty$ ist, während die anderen Zahlen (40) alle $< \infty$ sind. Es wird also die Differenzengleichung (38) $r - e$ Integrale haben, für welche $|\Delta_\nu| < M^\nu$ ist, und dann ist wegen (37)

$$|D_\nu| < M^\nu(\nu!)^q,$$

während alle anderen Integrale Δ_ν und also auch D_ν für unbegrenzt viele Werte von ν absolut grösser sind als eine beliebig hohe Potenz von $\nu!$ Da hierbei aber q ganz willkürlich ist, also auch eine beliebig grosse negative Zahl sein darf, so folgt, dass die $r - e$ Integrale D_ν rascher gegen Null konvergieren, als jede noch so hohe Potenz von $\frac{1}{\nu!}$. Damit ist die Bemerkung am Schluss des vorigen Paragraphen als richtig nachgewiesen, und zugleich der Fall $k_e = \infty$ erledigt.

Wenn alle $k_i < \infty$ sind, so wollen wir den Spezialfall

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = -\infty$$

vorwegnehmen. Es sind dann bei beliebigem q die r letzten der Exponenten (40) gleich $-\infty$, sodass für alle Integrale von (38) die Ungleichung $|\mathfrak{z}_\nu| < M^\nu$ gilt, also auch $|D_\nu| < M^\nu(\nu!)^q$ für alle Integrale von (1). Da hier q ebenfalls wieder eine beliebig grosse negative Zahl sein darf, so folgt:

Satz 3. *Wenn die Koeffizienten der Differenzengleichung* (1) *rascher gegen Null konvergieren als jede Potenz von* $\frac{1}{\nu}$, *so konvergieren die Integrale rascher gegen Null als jede Potenz von* $\frac{1}{\nu!}$.

Nach Erledigung dieser Spezialfälle bleibt nun noch übrig, dass alle $k_i < \infty$ sind, aber mindestens ein $k_i > -\infty$ ist. Dabei nehmen wir zunächst an, es sei speziell auch

$$k_r > -\infty,$$

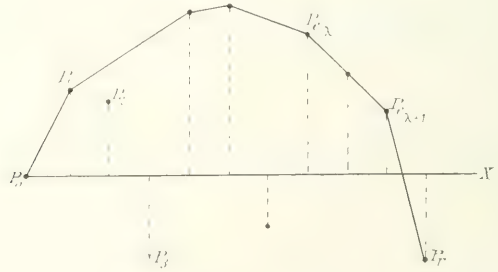
indem wir den gegenteiligen Fall nachträglich rasch werden erledigen können. Wir konstruieren dann in einer Ebene unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen X-Y-Koordinatensystems die $r+1$ Punkte

$$P_0, P_1, \ldots P_r$$

mit den bez. Koordinaten

$$x = i,\ y = k_i \qquad (i = 0, 1, \ldots r)$$

und umspannen diese Punkte mit einem Newton-Puiseux'schen Polygon. Es ist das ein die Punkte P_0 und P_r verbindender, nach der positiven Y-Seite konvexer Streckenzug, der eindeutig durch die Forderung bestimmt ist, dass jede



Ecke einer der Punkte P_i ist, während die übrigen dieser Punkte nicht auf der konvexen Seite liegen dürfen. Siehe die Figur, wo $k_{-1} = -\infty$ gedacht ist.

Das Polygon habe etwa $\sigma + 1$ Ecken, und diese seien der Reihe nach:

$$P_{e_0} = P_0,\ P_{e_1},\ P_{e_2},\ \ldots\ P_{e_\sigma} = P_r.$$

Wir wählen dann für den Exponenten q in (37) nacheinander die folgenden $\sigma + 1$ Werte:

$$q_\lambda = \frac{k_{e_{\lambda+1}} - k_{e_\lambda}}{e_{\lambda+1} - e_\lambda} \qquad (\lambda = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \sigma - 1)$$

(41)

$$q_\sigma = q_{\sigma-1} - 1.$$

Es ist dann

$$q_0 > q_1 > q_2 > \cdots > q_{\sigma-1} > q_\sigma. \tag{42}$$

Denn die letzte dieser Ungleichungen folgt aus der Definition $q_\sigma = q_{\sigma-1} - 1$; die vorhergehenden aber liest man ohne weiteres aus der Figur ab, da ja offenbar q_λ die trigonometrische Tangente des Winkels ist, den die $(\lambda + 1)^{\text{te}}$ Polygonseite mit der positiven X-Achse bildet.

Ebenso leicht erkennt man aus der Figur die weiteren Ungleichungen:

$$q_\lambda = \frac{k_{e_{\lambda+1}} - k_{e_\lambda}}{e_{\lambda+1} - e_\lambda} \begin{cases} < \dfrac{k_{e_\lambda} - k_i}{e_\lambda - i} & \text{für } i < e_\lambda \\ > \dfrac{k_i - k_{e_\lambda}}{i - e_\lambda} & \text{für } i > e_\lambda \end{cases} \qquad (\lambda = 0,\ 1,\ \ldots\ \sigma - 1),$$

$$q_\sigma = q_{\sigma-1} \begin{cases} < \dfrac{k_r - k_{e_{\sigma-1}}}{r - e_{\sigma-1}} \leq \dfrac{k_r - k_i}{r - i} \\ > \dfrac{k_r - k_{e_{\sigma-1}}}{r - e_{\sigma-1}} \geq \dfrac{k_r - k_i}{r - i} \end{cases} \qquad (i = 0,\ 1,\ \ldots\ r - 1).$$

Oder auch, indem man jede dieser Ungleichungen mit dem Nenner der rechten Seite, der ja stets positiv ist, multipliziert:

$$k_{e_\lambda} - e_\lambda q_\lambda \begin{cases} > k_i - i q_\lambda & \text{für } i < e_\lambda \\ \geq k_i - i q_\lambda & \text{für } i > e_\lambda \end{cases} \qquad (\lambda = 0,\ 1,\ \ldots\ \sigma) \tag{43}$$

Setzen wir daher $q = q_\lambda$, so folgt aus dem Fundamentalsatz pag. 129, dass genau $r - e_\lambda$ linear unabhängige Integrale existieren, für welche

$$|J_r| < M^r,$$

also

$$|D_\nu| < M^\nu(\nu!)^{q_\lambda}$$

ist, während alle andern Integrale für unbegrenzt viele Werte von ν der Ungleichung genügen:

$$|J_\nu| > m^\nu(\nu!)^s,$$

also

$$|D_\nu| > m^\nu(\nu!)^{s+q_\lambda},$$

wobei

$$s = \min_{j=0}^{e_\lambda - 1} \frac{(k_{e_\lambda} - e_\lambda q_\lambda) - (k_j - j q_\lambda)}{e_\lambda - j},$$

und folglich

$$s + q_\lambda = \min_{j=0}^{e_\lambda - 1} \frac{k_{e_\lambda} - k_j}{e_\lambda - j}.$$

ist. Nun zeigt aber wiederum ein Blick auf die Figur, dass dieses Minimum nichts andres ist als

$$\frac{k_{e_\lambda}}{e_\lambda} - \frac{k_{e_{\lambda-1}}}{e_{\lambda-1}} = q_{\lambda-1}.$$

Man kann daher unser Resultat so aussprechen, dass die Differenzengleichung (1) genau $r - e_\lambda$ linear unabhängige Integrale

$$D_\nu^{(1)},\ D_\nu^{(2)},\ \ldots\ D_\nu^{(r-e_\lambda)} \tag{44}$$

hat, für welche

$$|D_\nu^{(i)}| < M^\nu(\nu!)^{q_\lambda} \qquad (i = 1, 2, \ldots r - e_\lambda) \tag{45}$$

ist, während alle andern Integrale für unbegrenzt viele Werte von ν der Ungleichung genügen:

$$|D_\nu| > m^\nu(\nu!)^{q_{\lambda-1}}.$$

Nun gibt es aber auch, indem man λ durch $\lambda - 1$ ersetzt, $r - e_{\lambda-1}$ unabhängige Integrale, für die

$$|D_\nu| < M^\nu(\nu!)^{q_{\lambda-1}}$$

wird. Ausser den Integralen (44), die dieser Ungleichung wegen (45) und wegen $q_\lambda < q_{\lambda-1}$ a fortiori genügen, gibt also noch $e_\lambda - e_{\lambda-1}$ weitere Integrale dieser Art; sie seien

$$D_\nu^{(r-e_\lambda+1)},\ D_\nu^{(r-e_\lambda+2)},\ \ldots\ D_\nu^{(r-e_{\lambda-1})}. \tag{46}$$

Für diese ist daher einerseits

$$|D_\nu^{(i)}| < M^\nu(\nu!)^{q_{\lambda-1}} \qquad (i = r - e_\lambda + 1,\ r - e_\lambda + 2,\ \ldots\ r - e_{\lambda-1});$$

anderseits aber auch, da sie ja nicht der aus den Integralen (44) entspringenden partikulären Schar angehören:

$$\left|D_r^{(i)}\right| > m^r (r!)^{q_{\lambda-1}} \qquad (i = r - e_\lambda + 1,\ r - e_\lambda + 2, \ldots r - e_{\lambda-1})$$

für unendlich viele Werte von r.

Des kürzeren Ausdrucks halber definieren wir jetzt:

Eine Funktion D_r heisst von der Ordnung q, wenn sie den Ungleichungen genügt:

$$|D_r| < M^r (r!)^q \text{ für } r > r_1$$

$$|D_r| > m^r (r!)^q \text{ für unbegrenzt viele } r.$$

Wir können dann sagen, dass die $e_\lambda - e_{\lambda-1}$ Integrale (46) von der Ordnung $q_{\lambda-1}$ sind. Das gleiche gilt aber offenbar auch für jedes Integral, das linear aus den Integralen (46) zusammengesetzt ist,[1] da ein solches ja ebenfalls nicht der aus den Integralen (44) entspringenden partikulären Schar angehört.

Wenn man hier für λ der Reihe nach die Werte $\sigma, \sigma - 1, \ldots 2, 1$ setzt, so lässt sich das Ergebnis in folgender Weise formulieren:

Satz 4. *Die Differenzengleichung* (1) *hat ein Fundamentalsystem von Integralen, die derart in σ Klassen zerfallen, dass die Integrale einer Klasse und deren lineare Kombinationen von ein und derselben Ordnung sind. Dabei gehören der* 1ten, $2^{\text{ten}}, \ldots \sigma^{\text{ten}}$ *Klasse bez.*

$$r - e_{\sigma-1},\ e_{\sigma-1} - e_{\sigma-2}, \ldots e_2 - e_1,\ e_1$$

Integrale des Fundamentalsystems an, und die zugehörigen Ordnungen sind respektive:

$$q_{\sigma-1} = \frac{k_r - k_{e_{\sigma-1}}}{r - e_{\sigma-1}},\ q_{\sigma-2} = \frac{k_{e_{\sigma-1}} - k_{e_{\sigma-2}}}{e_{\sigma-1} - e_{\sigma-2}}, \ldots\ q_1 = \frac{k_{e_2} - k_{e_1}}{e_2 - e_1},\ q_0 = \frac{k_{e_1}}{e_1}.$$

Man beachte, dass diese Ordnungszahlen in der angegebenen Reihenfolge wachsen (nach (42)). Insbesondere gibt es also genau $r - e_{\sigma-1}$ linear unabhängige Partikulärintegrale, welche die *Minimalordnung* $q_{\sigma-1}$ haben, während das *allgemeine* Integral von der Ordnung q_0 ist.

Der sehr allgemeine Satz 4 enthält nun auch die zwei Theoreme als Spezialfälle, die ich in der eingangs zitierten Arbeit in den Mathematischen Annalen Bd. 66, pag. 462, 469 mit Hilfe de Theorie der *Jacobiketten* entwickelt habe. Sei

[1] An sich kann ja eine lineare Kombination von Funktionen q^{ter} Ordnung sehr wohl auch von geringerer (aber niemals von höherer) Ordnung sein.

nämlich erstens P_1 eine Ecke des NEWTON'schen Polygons, d. h. $e_1 = 1$, was mit dem Bestehen der Ungleichungen

$$k_1 > \frac{k_i}{i} \qquad (i = 2, 3, \ldots r)$$

oder, was dasselbe sagt:

$$\frac{k_1 - k_i}{i - 1} > -k_1 \qquad (i = 2, 3, \ldots r)$$

äquivalent ist. Dann besagt Satz 4, indem man die $\sigma - 1$ ersten Klassen zusammenfasst, dass es genau $r - 1$ linear unabhängige Integrale gibt, welche höchstens die Ordnung

$$q_1 \quad \frac{k_{e_2} - k_1}{e_2 - 1} = \operatorname*{Max}_{i=2}^{r} \frac{k_i - k_1}{i - 1}$$

haben, während das r^{te} Integral von der höheren Ordnung $q_0 = k_1$ ist. Dies ist aber nur eine kürzere Formulierung des ersten der genannten Theoreme, wenn man noch die zu dem Fundamentalsatz pag. 129 gemachte Bemerkung berücksichtigt.

Sei zweitens P_{r-1} eine Ecke des NEWTON'schen Polygons, d. h. $e_{\sigma-1} = r - 1$, was mit dem Bestehen der Ungleichungen

$$\frac{k_{r-1} - k_i}{r - 1 - i} > k_r - k_{i-1} \qquad (i = 0, 1, \ldots r - 2)$$

gleichbedeutend ist. Dann hat nach Satz 4 ein und nur ein Integral genau die Ordnung $q_{\sigma-1} = k_r - k_{r-1}$, während alle andern mindestens von der höheren Ordnung

$$q_{\sigma-2} \quad \frac{k_{r-1} - k_{r_{\sigma-2}}}{r - 1 - e_{\sigma-2}} = \operatorname*{Min}_{i=0}^{r-2} \frac{k_{r-1} - k_i}{r - 1 - i}$$

sind. Aber dies ist abgesehen von der Bezeichnung nichts anderes als das zweite der genannten Theoreme.

Zwei extreme Fälle verdienen noch hervorgehoben zu werden.

I. Wenn die Exponenten k_i den Ungleichungen

$$\frac{k_r}{r} > \frac{k_i}{i} \qquad (i = 1, 2, \ldots r - 1)$$

genügen, so ist dies ganz gleichbedeutend damit, dass nur die zwei Punkte P_0, P_r Ecken des Polygons sind. Es ist also dann $e_1 = r$, $\sigma = 1$; daher gibt es nur eine Klasse von Integralen, und alle Integrale sind von der Ordnung $q_0 = \frac{k_r}{r}$.

II. Wenn dagegen die Exponenten k_i den Ungleichungen

$$k_1 > k_2 \quad k_1 - k_2 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_i \quad k_{i+1}$$

genügen, so besagt dies soviel als dass alle Punkte P_i Polygonecken sind. Dann ist also $\sigma = r$, $e_\lambda = \lambda$. Es gibt daher r verschiedene Klassen, d. h. es gibt ein Fundamentalsystem von Integralen, die lauter verschiedene Ordnungen haben, und zwar sind diese Ordnungen in wachsender Reihenfolge:

$$q_{r-1} = k_r - k_{r-1},\ q_{r-2} = k_{r-1} - k_{r-2}, \ldots\ q_1 = k_2 - k_1,\ q_0 = k_1.$$

Zum Schluss betrachten wir noch kurz den seither ausgeschlossenen Fall $k_r = -\infty$. Es sei etwa $k_{e_{\sigma-1}}$ die letzte der Zahlen $k_1, k_2, \ldots k_r$, welche $> -\infty$ ist, da ja der Fall, dass alle gleich $-\infty$ sind, durch Satz 3 bereits erledigt ist.

Dann umspannen wir die Punkte $P_0, P_1, \ldots P_{e_{\sigma-1}}$ durch ein Newton-Puiseux'sches Polygon mit den σ Ecken

$$P_{e_0} = P_0,\ P_{e_1},\ P_{e_2}, \ldots\ P_{e_{\sigma-1}},$$

und erweitern dieses durch eine Strecke, welche vom Endpunkt $P_{e_{\sigma-1}}$ beliebig steil nach abwärts führt und die Ordinate $x = r$ etwa im Punkt $y = k'_r$ schneiden möge; diesen nehmen wir als letzten Polygoneckpunkt hinzu. *Es ist dann k'_r eine beliebig grosse negative Zahl.*

Alle unsere früheren Betrachtungen lassen sich nun mit ganz geringen, leicht ersichtlichen Modifikationen an dieses neue Polygon anschliessen, wobei natürlich k_r durch k'_r zu ersetzen ist. Man erhält also wiederum σ Integralklassen, und zwar haben die $\sigma - 1$ letzten Klassen wieder die in Satz 4 angegebenen Ordnungszahlen, während die $r - e_{\sigma-1}$ Integrale der ersten Klasse die Ordnung $-\infty$ haben. Dabei ist unter einer Funktion der Ordnung $-\infty$ natürlich eine solche zu verstehen, die rascher gegen Null konvergiert als jede noch so hohe Potenz von $\frac{1}{r!}$.

Man bemerke noch, dass sich unter dieses Resultat schliesslich auch der Fall von Satz 3 subsumieren lässt, indem dann alle Integrale von der Ordnung $-\infty$ sind.

München, November 1908.

ÜBER LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT RATIONALEN KOEFFIZIENTEN.

VON

OSKAR PERRON

in MÜNCHEN.

1. Sind die Koeffizienten einer linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m(x)y = 0$$

in der Umgebung einer Stelle $x = a$ in LAURENTsche Reihen entwickelbar, so bestehen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass alle Integrale an dieser Stelle sich bestimmt verhalten, bekanntlich darin, dass die Funktionen

$$(x-a)p_1(x),\ (x-a)^2 p_2(x),\ \ldots,\ (x-a)^m p_m(x)$$

regulär sind, d. h. keine negativen Potenzen von $x-a$ mehr enthalten. Sind diese Bedingungen nicht alle erfüllt, so ist der Punkt $x = a$ eine Stelle der Unbestimmtheit. Im allgemeinen verhalten sich dann auch *alle* Integrale unbestimmt, indem die eventuell vorhandenen Reihen der Form

$$(x-a)^\varrho \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu (x-a)^\nu,$$

welche die Differentialgleichung *formal* befriedigen, für alle x divergieren. Ausnahmsweise können unter diesen Reihen aber auch konvergente sein. Diejenigen Differentialgleichungen, bei denen dies eintritt, sodass an der Unbestimmtheitsstelle doch einzelne Partikulärintegrale sich bestimmt verhalten, sind von Herrn

Thomé eingehend untersucht worden;[1] doch konnte Herr Thomé kein Kriterium angeben, welches mit Sicherheit die Existenz eines solchen Integrales anzeigt. Die sehr komplicierten notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür sind erst durch die schönen Untersuchungen des Herrn Helge von Koch mit Hilfe unendlicher Determinanten aufgedeckt worden.[2] Indes hat Herr von Koch seiner ausführlichen Untersuchung die Annahme zu Grunde gelegt, dass der Koeffizient der zweithöchsten Ableitung verschwindet. Wenn man dies auch durch eine geeignete Transformation stets erzielen kann, so werden doch durch diese Transformation im allgemeinen die Integrale, die sich bestimmt verhalten, in solche transformiert, die sich unbestimmt verhalten, sodass ein Rückschluss aus der Anzahl der sich bestimmt verhaltenden Integrale der transformierten Gleichung auf die entsprechende Anzahl der ursprünglichen Gleichung nur ausnahmsweise gestattet ist.

Ich behandle nun im folgenden auf einem neuen und, wie ich glaube, einfacheren Weg lineare Differentialgleichungen, deren Koeffizienten *rationale* Funktionen von x sind, deren keine identisch zu verschwinden braucht. Dabei bediene ich mich zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten der Integrale der Form

$$(x-a)^\varrho \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu (x-a)^\nu$$

nicht unendlicher Determinanten, sondern derjenigen Resultate, die ich in einer vorausgehenden Arbeit über lineare Differenzengleichungen[3] gewonnen habe, und die mir für den vorliegenden Zweck besonders bequem erscheinen. Ohne jedoch näher auf die Natur der notwendigen und hinreichenden Bedingungen einzugehen, gelange ich dann zu einigen speziellen Klassen von Differentialgleichungen, bei denen eine Anzahl von Partikulärintegralen an einer einzelnen singulären Stelle oder auch in der ganzen Ebene holomorph sind.

§ 1.

2. Die Stelle a, an der die Integrale untersucht worden sollen, mag der einfacheren Schreibweise halber in den Nullpunkt verlegt werden. Wir bringen dann die Differentialgleichung auf die »Normalform»:

[1] *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.* Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik, Bde 74 ff.

[2] *Sur les intégrales régulières des équations différentielles linéaires.* Acta mathematica, 18 (1894). Siehe auch zwei Noten in den Comptes rendus, 116 (1893) pag. 91 und 365.

[3] Seite 109 dieses Bandes.

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{m} x^i (c_{i,0} + c_{i,1}x + c_{i,2}x^2 + \cdots + c_{i,r}x^r) \frac{d^i y}{dx^i} = 0,$$

wobei die Polynome

$$P_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}x + c_{i,2}x^2 + \cdots + c_{i,r}x^r \qquad (i = 0, 1, \ldots m)$$

als teilerfremd vorausgesetzt werden dürfen. Es können dann insbesondere die Zahlen $c_{i,0}$ nicht alle verschwinden, weil sonst die Polynome $P_i(x)$ den gemeinsamen Faktor x hätten; daher ist

$$(2) \qquad |c_{0,0}| + |c_{1,0}| + \cdots + |c_{m,0}| > 0.$$

Ferner darf auch

$$(3) \qquad |c_{0,r}| + |c_{1,r}| + \cdots + |c_{m,r}| > 0$$

angenommen werden. Denn wenn alle $c_{i,r}$ verschwinden würden, so wären die Polynome $P_i(x)$ alle von geringerem als dem r^{ten} Grad, und es könnte dann r durch eine kleinere Zahl ersetzt werden. Endlich ist auch

$$(4) \qquad |c_{m,0}| + |c_{m,1}| + \cdots + |c_{m,r}| > 0,$$

weil sonst die Differentialgleichung von geringerer als der m^{ten} Ordnung wäre.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass sich alle Integrale im Nullpunkt bestimmt verhalten, lautet jetzt einfach: $c_{m,0} \neq 0$. Wenn diese erfüllt, und wenn ausserdem noch $c_{i,k} = 0$ ist für $i + k < m$, so haben alle Koeffizienten der Differentialgleichung den Faktor x^m, und der Nullpunkt ist dann nicht nur keine Stelle der Unbestimmtheit, sondern überhaupt kein singulärer Punkt mehr.

Wir brauchen indes ausser den Ungleichungen (2), (3), (4) keinerlei Voraussetzungen über die Koefficienten $c_{i,k}$ zu machen, sondern werden alle Fälle der Bestimmtheit und Unbestimmtheit gemeinsam behandeln können. Vorwegzunehmen ist lediglich der Fall $r = 0$. Die Differentialgleichung hat dann die einfache Gestalt:

$$\sum_{i=0}^{m} c_i x^i \frac{d^i y}{dx^i} = 0 \qquad (c_m \neq 0)$$

und lässt sich folglich ohne weiteres integrieren. Wie bekannt, entsprechen nämlich einer k-fachen Wurzel ϱ der »determinierenden Fundamentalgleichung»

$$c_0 + c_1\varrho + c_2\varrho(\varrho-1) + \cdots + c_m\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-m+1) = 0$$

die k Integrale

$$x^\varrho,\ x^\varrho \log x,\ \ldots\ x^\varrho (\log x)^{k-1},$$

womit dieser einfache Fall bereits erledigt ist.

3. Von jetzt ab sei daher

$$r > 0. \tag{5}$$

Substituiert man dann die Reihe

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^{\varrho+\nu} \tag{6}$$

in die Differentialgleichung (1), so erhält man, wenn zur Abkürzung

$$c_{0,h} + c_{1,h}\varrho + c_{2,h}\varrho(\varrho-1) + \cdots + c_{m,h}\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-m+1) = f_h(\varrho) \tag{7}$$
$$(h = 0, 1, \ldots r)$$

gesetzt wird, zur Berechnung der Koeffizienten D_ν die Formeln:

$$\begin{aligned}
&D_0 f_0(\varrho) = 0\\
&D_1 f_0(\varrho+1) + D_0 f_1(\varrho) = 0\\
&D_2 f_0(\varrho+2) + D_1 f_1(\varrho+1) + D_0 f_2(\varrho) = 0\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&D_{\nu+r} f_0(\varrho+\nu+r) + D_{\nu+r-1} f_1(\varrho+\nu+r-1) + \cdots + D_\nu f_r(\varrho+\nu) = 0\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{8}$$

Wegen der Forderungen (2) und (3) sind speziell die Funktionen $f_0(\varrho)$ und $f_r(\varrho)$ nicht identisch Null. Ist nun etwa $c_{1,0} = c_{2,0} = \cdots = c_{m,0} = 0$, reduciert sich also $f_0(\varrho)$ auf die Konstante $c_{0,0}$, welche dann von Null verschieden sein muss, so gibt es offenbar kein Integral der verlangten Form. Denn wenn die Entwicklung etwa genau mit der ϱ^{ten} Potenz beginnt, also $D_0 \neq 0$ ist, so widerspricht dies der ersten der Gleichungen (8).[1] Als eine notwendige Bedingung für die Existenz von Integralen der Form (6) finden wir daher

$$|c_{1,0}| + |c_{2,0}| + \cdots + |c_{m,0}| > 0. \tag{9}$$

[1] Wie Herr Thomé l. c. Bd. 74 gezeigt hat, kann es überhaupt immer höchstens so viele sich bestimmt verhaltende Integrale, also a fortiori höchstens so viele Integrale der Form (6) geben, als der Grad des Polynoms $f_0(\varrho)$ beträgt.

Diese Bedingung sei erfüllt, sodass $f_0(\varrho)$ sich nicht auf eine Konstante reduziert. Bedeutet dann ϱ_0 eine beliebige Wurzel der Gleichung $f_0(\varrho) = 0$, und setzen wir in dem hypothetischen Integral (6) speciell $\varrho = \varrho_0$, so wird die erste der Bedingungsgleichungen (8) von selbst erfüllt. Die Gesamtheit der übrigen aber teilen wir in folgender Weise in zwei Klassen.

Da, wie schon bemerkt, die Polynome $f_0(\varrho)$ und $f_r(\varrho)$ nicht identisch verschwinden, so kann man eine Zahl N angeben, derart, dass für $\nu \geq N$:

$$f_0(\varrho_0 + \nu + r) \neq 0, \quad f_r(\varrho_0 + \nu) \neq 0 \tag{10}$$

wird. Denkt man sich die Koeffizienten $c_{i,k}$ nicht als numerisch gegebene Konstanten, sondern als variable Parameter, so wird man für diese zunächst einen Bereich T abgrenzen, von der Beschaffenheit, dass für alle Parameterwerte im Bereich T die Wurzeln der Gleichungen $f_0(\varrho) = 0$ und $f_r(\varrho) = 0$ unter einer endlichen Schranke liegen. Dann kann man N derart wählen, dass für $\nu \geq N$ die Ungleichungen (10) im ganzen Bereich T gelten. Nach dieser Festsetzung nehmen wir in die eine Klasse die 2te, 3te, $\ldots (N + r)^{\text{te}}$ der Gleichungen (8) auf. Diese lauten, wenn wir die einzelnen Summanden der linken Seiten in umgekehrter Reihenfolge schreiben:

$$\begin{aligned}
&D_0 f_1(\varrho_0) + D_1 f_0(\varrho_0 + 1) = 0 \\
&D_0 f_2(\varrho_0) + D_1 f_1(\varrho_0 + 1) + D_2 f_0(\varrho_0 + 2) = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&D_{N-1} f_r(\varrho_0 + N - 1) + D_N f_{r-1}(\varrho_0 + N) + \cdots + D_{N+r-1} f_0(\varrho_0 + N + r - 1) = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

In die andre Klasse nehmen wir alle übrigen der Gleichungen (8). Also, wenn man durch den ersten Koeffizienten, der ja gemäss unsrer Wahl der Zahl N von Null verschieden ist, dividiert:

$$D_{\nu+r} + \frac{f_1(\varrho_0 + \nu + r - 1)}{f_0(\varrho_0 + \nu + r)} D_{\nu+r-1} + \cdots + \frac{f_r(\varrho_0 + \nu)}{f_0(\varrho_0 + \nu + r)} D_\nu = 0 \qquad (\nu \geq N). \tag{12}$$

In diesen Gleichungen ist auch der letzte Koeffizient nach Annahme stets von Null verschieden.

4. Nun sei $c_{m,e}$ die erste der Zahlen

$$c_{m,0}, c_{m,1}, \ldots c_{m,r},$$

welche nicht gleich Null ist (nach (4) sind ja nicht alle gleich Null). Es ist dann auch $f_e(\varrho)$ das erste der Polynome

$$f_0(\varrho), f_1(\varrho), \ldots f_r(\varrho),$$

welches genau vom m^{ten} Grad ist; die vorhergehenden sind von geringerem; die nachfolgenden jedenfalls nicht von höherem Grad.

Die Gesamtheit der Gleichungen (12) ist daher, als Differenzengleichung aufgefasst, ganz von der Art, wie ich sie in der genannten Arbeit studiert habe, und aus dem Theorem pag. 129 folgt sogleich, dass es genau $r - e$ linear unabhängige Systeme

$$D_\nu^{(1)}, D_\nu^{(2)}, \ldots D_\nu^{(r-e)} \qquad (\nu = N, N+1, N+2, \ldots) \tag{13}$$

gibt, welche den Gleichungen (12) Genüge leisten, und für welche ausserdem

$$|D_\nu^{(i)}| < M^\nu \qquad (i = 1, 2, \ldots r - e)$$

ist. Bei jeder Lösung D_ν von (12) dagegen, die sich nicht linear aus $D_\nu^{(1)}, D_\nu^{(2)}, \ldots D_\nu^{(r-e)}$ zusammensetzt, ist D_ν für unendlich viele Werte von ν grösser als eine positive Potenz von $\nu!$. In diesem letzteren Falle divergiert also die Reihe

$$\sum_{\nu=N}^{\infty} D_\nu x^{\varrho_0+\nu}$$

für alle Werte von x. Der erste Fall dagegen kann offenbar durch e von einander unabhängige Gleichungen

$$\gamma_{K,0} D_N + \gamma_{K,1} D_{N+1} + \cdots + \gamma_{K,r-1} D_{N+r-1} = 0 \qquad (K = 1, 2, \ldots e) \tag{14}$$

charakterisiert werden. Die Koeffizienten $\gamma_{K,i}$ sind dabei bis zu gewissem Grad willkürlich. Eindeutig bestimmt sind nur die Verhältnisse der Determinanten ihrer Matrix, und zwar dadurch, dass die $r - e$ Wertesysteme (13) den Gleichungen (14) genügen müssen. Diese Wertesysteme und folglich die genannten Determinantenverhältnisse hängen natürlich von den $c_{i,k}$ ab; doch will ich auf die Natur dieser Abhängigkeit hier nicht näher eingehen.

5. Seien jetzt, sofern dies möglich ist, die $N + r$ Zahlen

$$D_0, D_1, \ldots D_{N+r-1} \tag{15}$$

derart gewählt, dass sie den Gleichungen (11) und (14) Genüge leisten. Wenn man dann die folgenden D_ν aus (12) berechnet, so wird es eine Zahl M geben, derart, dass $|D_\nu| < M^\nu$ ist. Daher konvergiert die Reihe

$$(16) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^{\varrho_0+\nu}$$

in einem gewissen Kreis, und stellt folglich ein Integral von (1) dar.

Wenn dagegen die Zahlen (15) nicht allen Gleichungen (11) und (14) Genüge leisten, so stellt die betreffende Reihe (16) gewiss kein Integral dar. Denn damit sie überhaupt konvergiert, sind ja die Bedingungen (14), und damit sie ein Integral darstellt, auch (11) erforderlich.

Hieraus folgt aber, dass es genau soviel linear unabhängige Integrale der Form (16) *gibt, als die Gleichungen* (11), (14) *linear unabhängige Lösungen haben.*

Dies sind aber zusammen $N + r - 1 + e$ homogene lineare Gleichungen mit $N + r$ Unbekannten. Die Matrix ihres Koefficientensystems ist:

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} f_1(\varrho_0) & f_0(\varrho_0+1) & & & & & \\ f_2(\varrho_0) & f_1(\varrho_0+1) & f_0(\varrho_0+2) & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & f_r(\varrho_0+N-1) & f_{r-1}(\varrho_0+N) & \cdots & f_0(\varrho_0+N+r-1) & \\ & & & \gamma_{1,0} & \cdots & \gamma_{1,r-1} & \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & \gamma_{e,0} & \cdots & \gamma_{e,r-1} & \end{vmatrix}$$

Sei R der »Rang» dieser Matrix, sodass also nicht alle R-reihigen Determinanten verschwinden, wohl aber alle $(R+1)$-reihigen. Dann haben die Gleichungen bekanntlich $N + r - R$ linear unabhängige Lösungen, also gibt es ebenso viele Integrale der verlangten Form. Umgekehrt, wenn es $N + r - R$ Integrale gibt, dann haben die Gleichungen ebensoviele Lösungen, und der Rang der Matrix ist daher gleich R. Setzen wir noch $N + r - R = s$, so folgt hieraus das

Theorem I. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Differentialgleichung* (1) *genau s linear unabhängige Integrale der Form*

$$y = x^{\varrho_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^\nu$$

hat, wo ϱ_0 eine Wurzel der Gleichung $f_0(\varrho) = 0$ bedeutet, besteht darin, dass die Matrix (17) *vom Rang $N + r - s$ ist.*

Bemerken wir, dass die gefundenen Integrale nicht notwendig zum Exponenten ϱ_0 gehören in dem Sinn, dass die Entwicklung wirklich mit der Potenz x^{ϱ_0} beginnt; es kann sehr wohl in allen Integralen auch $D_0 = 0$ sein.

6. Die Bedingung des Theorems leidet an dem Übelstand, dass darin die $\gamma_{K,i}$ vorkommen, deren Abhängigkeit von den im Bereich T liegenden Parametern $c_{i,k}$ sehr kompliciert ist. Man kann indes leicht eine Bedingung angeben, die von den $\gamma_{K,i}$ frei und die wenigstens hinreichend ist. Sei nämlich die Matrix

$$A_N \quad \begin{vmatrix} f_1(\varrho_0)\, f_0(\varrho_0+1) & & & \\ f_2(\varrho_0)\, f_1(\varrho_0+1)\, f_0(\varrho_0+2) & & & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ & & f_r(\varrho_0+N-1)\, f_{r-1}(\varrho_0+N)\ \ldots\ f_0(\varrho_0+N+r-1) \end{vmatrix}$$

vom Rang R_N; dann ist der Rang der Matrix (17) offenbar $\leqq R_N + e$. Daher die Anzahl der fraglichen Integrale nach obigem $\geqq N + r - R_N - e$. Setzt man also diesmal $N + r - R_N = s$, so ergibt sich:

Korollar I. *Wenn die Matrix A_N vom Rang $N + r - s$ ist, und wenn von den Zahlen*

$$c_{m,0},\ c_{m,1},\ \ldots\ c_{m,r}$$

die e ersten verschwinden, während $c_{m,e} \neq 0$ ist, so gibt es mindestens $s - e$ linear unabhängige Integrale der gleichen Form wie in Theorem I.

7. Man bemerke, dass diese hinreichende Bedingung mit wachsendem N sich zwar *formal* ändert, indem die Determinanten, deren Verschwinden und Nichtverschwinden sie ausdrückt, immer andere und andere werden. *Inhaltlich* aber bleibt die Bedingung, solange der Bereich T für die $c_{i,k}$ festgehalten wird, bei wachsendem N konstant, insofern die Bedingung für N diejenige für $N + 1$ nach sich zieht, und umgekehrt. Man kann also durch Vergrösserung von N keinerlei Reduktion der Bedingung erhoffen.

Hierzu genügt es zu beweisen, dass wenn die Matrix A_N vom Rang $N + r - s$ ist, der Rang von A_{N+1} gleich $N + 1 + r - s$ sein muss, oder also, dass die Gleichung

$$R_{N+1} = R_N + 1$$

besteht. Nun ergibt sich aber einerseits schon aus dem Begriff des Ranges die Ungleichung

$$R_{N+1} \leq R_N + 1.$$

Anderseits aber kann man auch aus einer nichtverschwindenden R_N-reihigen Determinante der Matrix A_N leicht eine nicht verschwindende $(R_N + 1)$-reihige der Matrix A_{N+1} bilden, indem man nämlich die letzte Zeile und Kolonne von

A_{N+1} hinzunimmt, wodurch die ursprüngliche Determinante nur mit der von Null verschiedenen Zahl $f_0(\varrho_0 + N + r)$ multipliziert wird. Es ist daher auch

$$R_{N+1} > R_N + 1,$$

und folglich in der Tat

$$R_{N+1} = R_N + 1. \quad \text{W. z. b. w.}$$

8. Bemerken wir noch folgenden Spezialfall. Sei p eine positive ganze Zahl, und es möge etwa ϱ_0 eine gemeinsame Wurzel der $\frac{p(p+1)}{2}$ Gleichungen

$$f_h(\varrho + i) = 0 \qquad (h, i = 0, 1, 2, \ldots;\ h + i < p)$$

sein. Dann ist insbesondere $f_0(\varrho_0) = 0$, und ausserdem enthalten die $p - 1$ ersten Zeilen der Matrix A_N lauter Nullen. Da diese Matrix aber $N + r - 1$ Zeilen hat, so verschwinden demnach gewiss alle

$$N + r - 1 - (p - 1) + 1 = N + r - p + 1$$

-reihigen Determinanten, und der Rang ist daher gleich $N + r - p - \alpha$, wobei $\alpha \geqq 0$ ist. Nach Korollar I gibt es also mindestens $p + \alpha - e$, d. h. a fortiori mindestens $p - e$ Integrale der angebenen Form. Daraus folgt

Korollar II. *Ist ϱ_0 eine gemeinsame Wurzel der Gleichungen*

$$f_h(\varrho + i) = 0 \qquad (h, i = 0, 1, 2, \ldots;\ h + i < p),$$

und bedeutet e die gleiche Zahl wie in Korollar I, so hat die Differentialgleichung (1) *wenigstens $p - e$ Integrale der Form*

$$x^{\varrho_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^\nu.$$

Speziell für $e = 1$ habe ich diesen Satz bereits in meiner Arbeit »Über lineare Differenzen- und Differentialgleichungen» pag. 473 bewiesen.[1]

§ 2.

9. Unter den im vorigen Paragraphen gefundenen Integralreihen können solche mit *endlicher* Gliederzahl vorkommen, indem die Gleichungen (11), deren Matrix A_N ist, unter Umständen die Lösung

$$D_N = D_{N+1} = \cdots = D_{N+r-1} = 0$$

[1] Mathematische Annalen, Bd. 66.

zulassen, ohne dass gleichzeitig für alle $\nu < N$ auch $D_\nu = 0$ wird. Die betreffenden Integrale sind dann abgesehen vom Faktor x^{ϱ_0} Polynome in x. Man kann leicht die notwendigen und hinreichenden Bedingungen angeben für die Existenz einer bestimmten Anzahl solcher Integrale.

Um zunächst eine notwendige Bedingung zu erhalten, sei ϱ_0 so angenommen, dass $D_0 \neq 0$ ist, und das betreffende Polynom sei dann etwa vom n^{ten} Grad; also

$$D_n \neq 0, \; D_\nu = 0 \text{ für } \nu > n.$$

Die erste und die $(n + r + 1)^{\text{te}}$ der Bedingungsgleichungen (8) für $\varrho = \varrho_0$ lauten dann:

$$f_0(\varrho_0) = 0; \; f_r(\varrho_0 + n) = 0.$$

Wenn also die Differentialgleichung (1) ein Integral der Form

$$y = x^{\varrho_0} P(x)$$

haben soll, wo $P(x)$ ein Polynom ist, so muss es notwendig eine ganze Zahl $n (\geq 0)$ geben, derart, das die zwei Gleichungen

$$f_0(\varrho) = 0, \; f_r(\varrho + n) = 0$$

eine gemeinsame Wurzel haben. Diese notwendige Bedingung ist sicher dann nicht erfüllt, wenn $f_r(\varrho)$ sich auf eine Konstante reduciert; in diesem Fall kann es also gewiss kein Integral der obigen Form geben.

10. Um nun auch die notwendigen und hinreichenden Bedingungen zu finden, sei ϱ_0 wieder irgend eine Wurzel der Gleichung $f_0(\varrho) = 0$. Ist D_n wieder die letzte von Null verschiedene der Zahlen D_ν, so ist nach obigem

$$f_r(\varrho_0 + n) = 0.$$

Wenn also eine Zahl N so gewählt wird, dass für $\nu \geq N$

$$f_r(\varrho_0 + \nu) \neq 0$$

ist, so muss bei jedem Integral der verlangten Form notwendig $D_\nu = 0$ sein für $\nu \geq N$; daher reducieren sich die Bedingungsgleichungen (8), wenn darin $\varrho = \varrho_0$ gesetzt wird, auf die folgenden:

$$\begin{aligned}
&D_0 f_1(\varrho_0) + D_1 f_0(\varrho_0 + 1) = 0 \\
&D_0 f_2(\varrho_0) + D_1 f_1(\varrho_0 + 1) + D_2 f_0(\varrho_0 + 2) = 0 \\
&\quad \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
&D_{N-2} f_r(\varrho_0 + N - 2) + D_{N-1} f_{r-1}(\varrho_0 + N - 1) = 0 \\
&D_{N-1} f_r(\varrho_0 + N - 1) = 0.
\end{aligned}$$

Es wird also genau soviele Integrale der verlangten Art geben, als dieses Gleichungssystem linear unabhängige Lösungen hat. Die Matrix dieses Systems sei B_N; sie geht offenbar aus der Matrix A_N hervor, indem man die r letzten Kolonnen wegstreicht. Ist R der Rang der Matrix B_N, so ist die Anzahl der unabhängigen Lösungen gleich $N - R$. Dies ergibt das

Theorem II. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Differentialgleichung* (1) *genau s linear unabhängige Integrale der Form*

$$y = x^{\varrho_0} P(x)$$

hat, wo ϱ_0 eine Wurzel der Gleichung $f_0(\varrho) = 0$ bedeutet, und wo $P(x)$ ein Polynom sein soll, besteht darin, dass die Matrix B_N vom Rang $N - s$ ist.

11. Nun kann es ferner vorkommen, dass unter den Integralreihen sich solche finden, die zwar keine mit x^{ϱ_0} multiplicierten Polynome sind, die aber doch beständig konvergieren. Die betreffenden Integrale sind dann, vom Faktor x^{ϱ_0} abgesehen, ganze (transcendente) Funktionen von x. Um die Existenz solcher Integrale in allgemeinster Weise zu prüfen, und um zugleich die Stärke der Konvergenz zu untersuchen, sei $c_{m_h, h}$ die letzte von Null verschiedene unter den Zahlen

$$c_{0,h}, c_{1,h}, \ldots c_{m,h}.$$

Es ist dann allgemein das Polynom $f_h(\varrho)$ vom Grad m_h. Sollte für einen besonderen Index h vielleicht $f_h(\varrho)$ identisch verschwinden, also die Zahlen $c_{0,h}, \ldots c_{m,h}$ alle gleich Null sein, so versagt diese Definition der Zahl m_h. Wir müssen dann, um genaue Übereinstimmung mit der Bezeichnungsweise in der vorausgehenden Arbeit zu erzielen, $m_h = -\infty$ setzen; für das folgende würde es aber auf das gleiche hinauskommen, wenn wir in diesem Fall $m_h = 0$ definieren würden.

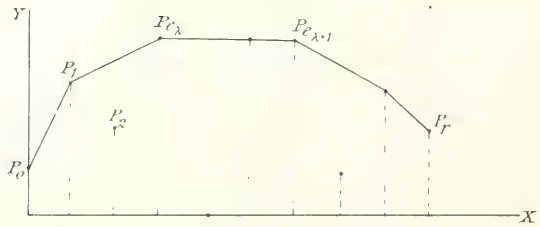
Wir konstruieren jetzt in einer Ebene unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen X-Y-Coordinatensystems die $r + 1$ Punkte P_h $(h = 0, 1, \ldots r)$ mit den bez. Koordinaten

$$x = h,\ y = m_h \qquad (h = 0, 1, \ldots r),$$

und umspannen diese Punkte mit einem nach der positiven Y-Seite konvexen Newton-Puiseuxschen Polygon (Siehe Figur).

Das Polygon habe $\sigma + 1$ Ecken

$$P_{e_0} = P_0, P_{e_1}, P_{e_2}, \ldots P_{e_\sigma} = P_r,$$



und die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der $(\lambda+1)^{\text{ten}}$ Polygonseite gegen die X-Achse sei q_λ; also

$$q_\lambda = \frac{m_{e_{\lambda+1}} - m_{e_\lambda}}{e_{\lambda+1} - e_\lambda}. \tag{18}$$

Es ist dann offenbar

$$q_0 > q_1 > q_2 > \cdots > q_{\sigma-1}. \tag{19}$$

Betrachten wir nun wieder wie in § 1 die Differenzengleichung

$$D_{\nu+r} + \frac{f_1(\varrho_0+\nu+r-1)}{f_0(\varrho_0+\nu+r)} D_{\nu+r-1} + \cdots + \frac{f_r(\varrho_0+\nu)}{f_0(\varrho_0+\nu+r)} D_\nu = 0 \qquad (\nu \geq N), \tag{12}$$

so wird hierin der Koeffizient von $D_{\nu+r-h}$ die Form

$$\frac{f_h(\varrho_0+\nu+r-h)}{f_0(\varrho_0+\nu+r)} = \frac{c_{m_h,h}}{c_{m_0,0}} \nu^{m_h-m_0}(1+\eta_\nu)$$

haben, wo η_ν mit wachsendem ν gegen Null konvergiert. Konstruiert man also in Bezug auf diese Differenzengleichung das Newton-Puiseuxsche Polygon nach der Vorschrift von § 5 der vorausgehenden Abhandlung (pag. 132), so wird sich diese Konstruktion von der soeben ausgeführten nur dadurch unterscheiden, dass die X-Achse parallel mit sich um die Strecke m_0 verschoben ist. An dem Polygon selbst aber, und insbesondere auch an den Neigungswinkeln seiner Seiten gegen die X-Achse wird nichts geändert. Nach Satz 4 pag. 135 *hat also die Differenzengleichung* (12) *ein Fundamentalsystem von r Lösungen*

$$D_\nu^{(1)}, D_\nu^{(2)}, \ldots D_\nu^{(r)},$$

die derart in σ Klassen zerfallen, dass die $(\sigma-\lambda)^{\text{te}}$ Klasse $(\lambda = \sigma-1, \sigma-2, \ldots 1, 0)$ genau $e_{\lambda+1} - e_\lambda$ Lösungen enthält, und dass diese Lösungen und ihre linearen Kombinationen den Ungleichungen genügen:

$$|D_\nu| < M^\nu(\nu!)^{q_\lambda} \text{ für alle hinreichend grossen } \nu$$

$$|D_\nu| > m^\nu(\nu!)^{q_\lambda} \text{ für unbegrenzt viele } \nu.$$

12. Ich bezeichne nun, der Terminologie von VIVANTI-GUTZMER[1] folgend, als μ-Index einer Potenzreihe $\Sigma D_\nu x^\nu$ oder auch allgemeiner einer Reihe der Form $\Sigma D_\nu x^{\varrho_0+\nu}$ diejenige reelle Zahl μ, welche durch die Forderung eindeutig bestimmt ist, dass bei jedem positiven ε die Ungleichungen

$$|D_\nu| < \frac{1}{(\nu!)^{\mu-\varepsilon}} \text{ für alle hinreichend grossen } \nu$$

$$|D_\nu| > \frac{1}{(\nu!)^{\mu+\varepsilon}} \text{ für unbegrenzt viele } \nu$$

bestehen. Ist aber $|D_\nu|$ kleiner als eine beliebig hohe Potenz von $\frac{1}{\nu!}$, wenn nur ν genügend gross, so ist der μ-Index gleich $+\infty$; dies ist insbesondere der Fall, wenn von einem gewissen ν ab alle D_ν verschwinden, wenn also die Reihe eine *endliche* ist.

Ist der μ-Index positiv, so konvergiert die Reihe beständig; ist er negativ, so divergiert sie beständig. Ist er aber Null, so kann der Konvergenzradius gleich null, endlich oder unendlich sein.

Ich behaupte dann, *dass der μ-Index einer jeden Reihe der Form*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^{\varrho_0+\nu},$$

welche formal die Differentialgleichung (1) *befriedigt, notwendig eine der Zahlen*

$$q_0, \quad q_1, \ldots, \quad q_{\sigma-1}, \quad -\infty$$

sein muss. Denn die Koeffizienten D_ν für $\nu \geq N$ müssen, damit die Reihe die Differentialgleichung (1) formal befriedigt, den Gleichungen (12) genügen, sich also linear aus den r Fundamentallösungen, $D_\nu^{(1)}, \ldots D_\nu^{(r)}$ zusammensetzen:

$$D_\nu = a_1 D_\nu^{(1)} + a_2 D_\nu^{(2)} + \cdots + a_r D_\nu^{(r)}.$$

Sind hiebei alle Koeffizienten $a_i = 0$, so ist $D_\nu = 0$ für $\nu \geq N$, also der μ-Index gleich $+\infty$. Sind aber nicht alle $a_i = 0$, so sei die Zahl λ aus der Reihe $0, 1, \ldots \sigma - 1$ so gewählt, dass die $(\sigma - \lambda)^{\text{te}}$ Klasse die letzte ist, deren Lösungen

[1] *Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen*, Leipzig 1906, pag. 229

nicht sämtlich den Koefficienten $a_i = 0$ haben. Dann ergibt sich aus dem oben gesagten unter Berücksichtigung der Ungleichungen (10):

$$|D_\nu| < M^\nu (\nu!)^{q_\lambda} \text{ für alle hinreichend grossen } \nu$$

$$|D_\nu| > m^\nu (\nu!)^{q_\lambda} \text{ für unbegrenzt viele } \nu,$$

sodass jetzt der μ-Index gleich $-q_\lambda$ ist. W. z. b. w. Zugleich zeigt unsere Analyse, das der μ-Index nur dann gleich $+\infty$ ist, wenn die Reihe abbricht; ferner, dass, wenn der μ-Index gleich Null ist, der Konvergenzradius zwischen positiven Grenzen liegt $\left(\frac{1}{M} \text{ und } \frac{1}{m}\right)$. *Insbesondere ist daher bei einer beständig konvergenten Integralreihe der μ-Index stets positiv, nicht null.*

Damit ist keineswegs gesagt, dass jeder dieser möglichen μ-Indices nun auch wirklich vorkommt. Dies wäre allerdings der Fall, wenn die Koeffizienten D_ν bloss den Gleichungen (12) zu genügen hätten, welche r von diesen Koefficienten willkürlich lassen. In Wirklichkeit sind aber, damit die Differentialgleichung (1) formal befriedigt wird, ausserdem noch die Gleichungen (11) zu erfüllen, welche im allgemeinen diese Willkürlichkeit bedeutend einschränken und dadurch einige der möglichen μ-Indices ausschliessen.

13. Bedeutet D_ν eine beliebige Lösung von (12), die sich schon linear aus den $r - e_\lambda$ Fundamentallösungen der $\sigma - \lambda$ ersten Klassen zusammensetzt, so ist nach obigem gewiss für alle hinreichend grossen Werte von ν

$$|D_\nu| < M^\nu (\nu!)^{q_\lambda}.$$

Jede andre Lösung von (12) dagegen, bei deren linearer Zusammensetzung aus den r Fundamentallösungen also auch mindestens eine aus den λ letzten Klassen einen Koefficienten $a_i \neq 0$ hat, genügt eben deshalb und wegen (10) für unbegrenzt viele Werte von ν der mit der vorigen unverträglichen Ungleichung:

$$|D_\nu| > m^\nu (\nu!)^{q_\lambda - 1}.$$

Daraus folgt nun, dass es genau $r - e_\lambda$ linear unabhängige Lösungen von (12) gibt, welche der Ungleichung

$$|D_\nu| < M^\nu (\nu!)^{q_\lambda}$$

für hinreichend grosse Werte von ν genügen; nämlich die und nur die, welche sich schon aus den $r - e_\lambda$ Fundamentallösungen der $\sigma - \lambda$ ersten Klassen zu-

sammensetzen. Diese $r - e_\lambda$ Lösungen lassen sich offenbar charakterisieren durch e_λ von einander unabhängige Gleichungen:

$$\gamma_{K,0}^{(\lambda)} D_N + \gamma_{K,1}^{(\lambda)} D_{N+1} + \cdots + \gamma_{K,r-1}^{(\lambda)} D_{N+r-1} = 0 \qquad (K = 1, 2, \ldots e_\lambda). \tag{20}$$

Nun kann man an diese Gleichungen ganz die nämlichen Folgerungen knüpfen, wie in § 1 an die analogen Gleichungen (14). An Stelle der Matrix (17) tritt dann offenbar die folgende:

$$\begin{vmatrix} f_1(\varrho_0) & f_0(\varrho_0+1) & & & & \\ f_2(\varrho_0) & f_1(\varrho_0+1) & f_0(\varrho_0+2) & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & f_r(\varrho_0+N-1) & f_{r-1}(\varrho_0+N) & \ldots & f_0(\varrho_0+N+r-1) \\ & & & \gamma_{1,0}^{(\lambda)} & \ldots & \gamma_{1,r-1}^{(\lambda)} \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \gamma_{e_\lambda,0}^{(\lambda)} & \ldots & \gamma_{e_\lambda,r-1}^{(\lambda)} \end{vmatrix}. \tag{21}$$

und man erhält das

Theorem III. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass man die Differentialgleichung* (1) *durch genau s linear unabhängige Reihen der Form*

$$y = x^{\varrho_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^\nu$$

formal befriedigen kann, wo ϱ_0 eine Wurzel der Gleichung $f_0(\varrho) = 0$ bedeutet, und wo

$$|D_\nu| < M^\nu (\nu!)^{q_\lambda}$$

für alle hinreichend grossen Werte von ν sein soll, besteht darin, dass die Matrix (21) *vom Rang $N + r - s$ ist.*

Man bemerke, dass es sehr wohl mehr als $r - e_\lambda$ linear unabhängige Reihen von der in diesem Theorem angegebenen Beschaffenheit geben kann, obwohl die Differenzengleichung (12) nur $r - e_\lambda$ linear unabhängige Lösungen hat, welche der verlangten Ungleichung genügen. Ist die Anzahl der betreffenden Reihen etwa gleich $r - e_\lambda + \alpha$, so ist aber klar, dass sich durch lineare Zusammensetzung daraus mindestens α Reihen ergeben müssen, welche der trivialen Lösung von (12): $D_\nu = 0$ für $\nu \geqq N$ entsprechen. Die Differentialgleichung (1) hat also dann mindestens α Integrale, welche, vom Faktor x^{ϱ_0} abgesehen, Polynome sind.

14. Das Theorem III führt nun wieder leicht zu solchen Bedingungen, die von den $\gamma_{K,i}^{(\lambda)}$ frei sind und die wenigstens hinreichen. Der Process ist dabei wörtlich der gleiche, der zu den Korollaren I, II führte, sodass ich wieder gleich das Resultat angeben kann.

Korollar III. *Wenn die Matrix A_N (pag. 46) vom Rang $N + r - s$ ist, so gibt es mindestens $s - e_\lambda$ linear unabhängige Reihen der Form*

$$x^{\varrho_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^\nu,$$

welche die Differentialgleichung (1) formal befriedigen, und deren Koeffizienten den Ungleichungen

$$|D_\nu| < M^\nu (\nu!)^{q_\lambda}$$

genügen für alle hinreichend grossen Werte von ν.

Korollar IV. *Ist ϱ_0 eine gemeinsame Wurzel der Gleichungen*

$$f_h(\varrho + i) = 0 \qquad (h, i = 0, 1, 2, \ldots;\ h + i < p),$$

so gibt es wenigstens $p - e_\lambda$ linear unabhängige Reihen von der in Korollar III angegebenen Beschaffenheit.

Mit diesen Sätzen ist übrigens keineswegs gesagt, dass der μ-Index der betreffenden Reihen gleich $-q_\lambda$ ist, sondern nur dass er nicht kleiner sein kann als $-q_\lambda$. Er kann aber sehr wohl für einige oder alle Reihen auch grösser sein.

15. Die Zahlen $q_0, q_1, \ldots q_{\sigma-1}$, welche den Ungleichungen (19) genügen, können alle positiv sein, d. h. die Seiten des Newtonschen Polygons alle von links nach rechts aufsteigend. In diesem Fall nützen uns die obigen Sätze nichts, da sie ja nur aussagen, dass der μ-Index mindestens gleich einer gewissen negativen Zahl $-q_\lambda$ ist, also die Konvergenz der betreffenden Reihen nicht verbürgen. Da wir überdies aber wissen, dass der μ-Index eine der Zahlen $-q_\lambda$ oder $+\infty$, also im gegenwärtigen Fall entweder negativ oder $+\infty$ sein muss, so kommt eine konvergente Reihe überhaupt nur zu Stande, wenn er $+\infty$ ist. Aber dieser Fall tritt wieder nur ein, wie wir sahen, wenn die Reihe abbricht. Wenn also alle Zahlen q_λ positiv sind, so muss ein Integral der Form $x^{\varrho_0} \sum D_\nu x^\nu$ vom Faktor x^{ϱ_0} abgesehen notwendig ein Polynom sein, sodass dieser Fall nach Theorem II vollständig erledigt werden kann.

Sind dagegen unter den Polygonseiten auch solche, die horizontal verlaufen oder von links nach rechts absteigen, d. h. sind die Zahlen $q_0, q_1, \ldots q_{\sigma-1}$ alle oder zum Teil ≤ 0, so wenden wir unsere Resultate speziell auf diejenigen Werte von λ an, für welche $q_\lambda \leq 0$ ist. Die betreffenden Reihen liefern dann wirkliche Integrale der Differentialgleichung (1), weil die Ungleichungen, denen die D_i genügen, Konvergenz erzwingen, für $q_\lambda < 0$ sogar beständige Konvergenz.

16. Ein Beispiel mag die Sache illustrieren. Untersuchen wir die Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$(ax^2 + bx^3)\frac{d^4y}{dx^4} + c\frac{d^3y}{dx^3} + dxy = 0,$$

wo die Konstanten a, b, c, d von Null verschieden sein mögen. Um sie auf die Normalform zu bringen, müssen wir mit x^3 multiplizieren, es kommt dann:

$$x^4(ax + bx^2)\frac{d^4y}{dx^4} + x^3c\frac{d^3y}{dx^3} + dx^4y = 0,$$

also ist $m = 4$, $r = 4$; ferner

$$c_{4,1} = a,\ c_{4,2} = b,\ c_{3,0} = c,\ c_{0,4} = d,$$

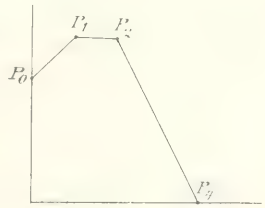
während die übrigen $c_{i,k}$ den Wert Null haben. Die Funktionen $f_h(\varrho)$ sind daher die folgenden:

$$\begin{aligned} f_0(\varrho) &= c\,\varrho(\varrho-1)(\varrho-2)\\ f_1(\varrho) &= a\,\varrho(\varrho-1)(\varrho-2)(\varrho-3)\\ f_2(\varrho) &= b\,\varrho(\varrho-1)(\varrho-2)(\varrho-3)\\ f_3(\varrho) &= 0\\ f_4(\varrho) &= d; \end{aligned}$$

also

$$m_0 = 3,\ m_1 = 4,\ m_2 = 4,\ m_3 = -\infty,\ m_4 = 0.$$

Das Polygon hat infolgedessen die nebenstehende Gestalt und man findet:



$$e_0 = 0,\ e_1 = 1,\ e_2 = 2,\ e_3 = 4$$
$$q_0 = 1,\ q_1 = 0,\ q_2 = -2.$$

Ferner ist

$$f_0(0) = f_0(1) = f_0(2) = f_1(0) = f_1(1) = f_2(0) = 0\,,$$

sodass man bei Anwendung des Korollar IV $\varrho_0 = 0$ und $p = 3$ setzen kann. Man erhält dann mindestens

$$\begin{aligned} &p - e_0 = 3 \text{ Reihen, für welche } |D_\nu| < M^\nu(\nu!)^{q_0} = M^\nu \nu!\,,\\ &p - e_1 = 2 \text{ Reihen, für welche } |D_\nu| < M^\nu(\nu!)^{q_1} = M^\nu\,,\\ &p - e_2 = 1 \text{ Reihe, für welche } |D_\nu| < M^\nu(\nu!)^{q_2} = \frac{M^\nu}{(\nu!)^2} \end{aligned}$$

ist. Es giebt also mindestens drei der Differentialgleichung formal genügende Potenzreihen. Unter diesen finden sich mindestens zwei, die einen von Null verschiedenen Konvergenzradius haben, also zwei im Nullpunkt analytische Integrale. Unter diesen wieder ist mindestens eines, bei dem $|D_\nu| < \frac{M^\nu}{(\nu!)^2}$ ist, welches also eine ganze Funktion von x darstellt. Um deren μ-Index genau festzustellen, beachte man, dass er nur die Werte $-q_2 = 2$ oder $+\infty$ haben kann. Wäre er $+\infty$, so müsste die Reihe abbrechen; die Differentialgleichung hätte dann ein Polynom zum Integral. Dies kann aber nach den Erörterungen am Ende von No. 9 nicht sein, weil sich $f_\nu(\varrho) = f_4(\varrho)$ auf die Konstante d reduziert. Die Differentialgleichung hat also mindestens eine ganze Funktion zum Integral; diese ist notwendig transcendent, und ihr μ-Index ist gleich 2.

Wenn die Koeffizienten a, b, c, d gewissen Bedingungen genügen, so kann es auch mehr als zwei im Nullpunkt analytische Integrale geben, oder auch mehr als ein Integral, das eine ganze transcendente Funktion ist. Auf keinen Fall aber gibt es mehr als $r - e_1 = 3$ im Nullpunkt analytische Integrale, und auch nicht mehr als $r - e_2 = 2$ Integrale, die ganze Funktionen sind. Denn nach den an Theorem III angeschlossenen Erörterungen müsste die Differentialgleichung dann auch ein Polynom als Integral zulassen, was aber nicht der Fall ist.

17. In den Sätzen dieses Paragraphen sind die des vorigen als Spezialfall enthalten. Denn wenn $c_{m,e}$ die erste der Zahlen $c_{m,h}$ ist, welche nicht verschwindet, wenn also $f_e(\varrho)$ das erste der Polynome $f_h(\varrho)$ ist, welches den m^{ten} Grad erreicht, so ist

$$\begin{aligned} &m_e = m\\ &m_h \leqq m - 1 \text{ für } h < e\,. \end{aligned}$$

Bei der Konstruktion des Newton'schen Polygons erweist sich demnach der Punkt P_e als Ecke, und zwar sind die Polygonseiten bis zum Punkt P_e auf-

steigend, von P_e an aber horizontal oder absteigend. Unter den Zahlen e_λ kommt daher insbesondere die Zahl e vor, und für $e_\lambda = e$ ist

$$q_\lambda \leq 0, \quad q_{\lambda-1} > 0.$$

Setzt man diese Werte von e_λ und q_λ in die Sätze dieses Paragraphen ein, so gehen die des § 1 daraus hervor.

18. Ein zweiter wichtiger Spezialfall ist folgender.

Sei $c_{m,\varepsilon}$ die *letzte* der Zahlen $c_{m,h}$, welche nicht verschwindet, also $f_\varepsilon(\varrho)$ das letzte der Polynome $f_h(\varrho)$, welches den m^{ten} Grad erreicht. Dann ist natürlich $\varepsilon \geqq e$; ferner

$$m_\varepsilon = m$$
$$m_h \leq m - 1 \text{ für } h > \varepsilon.$$

Es wird also auch P_ε ein Eckpunkt des NEWTON'schen Polygons; die Seiten sind bis P_e aufsteigend; dann folgt eine horizontale bis P_ε; der Rest ist absteigend. Es wird also unter den Zahlen e_λ auch die Zahl ε vorkommen, und für $e_\lambda = \varepsilon$ ist

$$q_\lambda < 0, \quad q_{\lambda-1} \geq 0.^1$$

Man sieht leicht, dass sogar

$$q_\lambda \leq -\frac{1}{r-\varepsilon}$$

wird. Denn es ist

$$m_{e_\lambda} = m_\varepsilon = m; \quad m_{e_{\lambda+1}} \leq m - 1; \quad e_\lambda = \varepsilon; \quad e_{\lambda+1} \leq r;$$

daher

$$q_\lambda = \frac{m_{e_{\lambda+1}} - m_{e_\lambda}}{e_{\lambda+1} - e_\lambda} \leq \frac{-1}{e_{\lambda+1} - e_\lambda} \leq \frac{-1}{r-\varepsilon}.$$

Da alle beständig konvergenten Integralreihen, wie pag. 152 festgestellt wurde, notwendig einen positiven μ-Index haben, sodass der Wert $-q_{\lambda-1}$ dafür nicht mehr in Betracht kommt, so besagt Theorem III für $e_\lambda = \varepsilon$:

Theorem IV. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Differentialgleichung* (1) *genau s linear unabhängige Integrale hat, welche abgesehen vom Faktor x^{ϱ_0} ganze Funktionen von x sind, besteht darin, dass die Matrix* (21) *für $e_\lambda = \varepsilon$ vom Rang $N + r - s$ ist.*

[1] Offenbar ist $q_{\lambda-1} = 0$ für $e < \varepsilon$; dagegen $q_{\lambda-1} > 0$ für $e = \varepsilon$.

Der μ-Index der betreffenden ganzen Funktionen ist mindestens gleich $\frac{1}{r-\varepsilon}$. *Dabei bedeutet ε die grösste der Zahlen $h = 0, 1, \ldots r$, für welche $c_{m,h} \neq 0$ ist.*

Ebenso folgt aus den Korollaren III und IV:

Korollar V. *Wenn die Matrix A_N vom Rang $N + r - s$ ist, so hat die Differentialgleichung* (1) *mindestens $s - \varepsilon$ linear unabhängige Integrale von der gleichen Beschaffenheit wie in Theorem IV.*

Korollar VI. *Ist ϱ_0 eine gemeinsame Wurzel der Gleichungen*

$$f_h(\varrho + i) = 0 \qquad (h, i = 0, 1, 2, \ldots; h + i < p),$$

so gibt es mindestens $p - \varepsilon$ derartige Integrale.

19. Wir wollen nun neben der unteren Grenze $\frac{1}{r-\varepsilon}$ für den μ-Index auch eine obere angeben. Zwar kann der μ-Index gleich $+\infty$ sein; aber nur dann, wenn die betreffende ganze Funktion ein Polynom ist. Ist sie dagegen transcendent, so ist der μ-Index eine der Zahlen $-q_\lambda$. Da aber nach Definition

$$-q_\lambda = \frac{m_{e_\lambda} - m_{e_{\lambda+1}}}{e_{\lambda+1} - e_\lambda} \leq \frac{m - 0}{e_{\lambda+1} - e_\lambda} \leq m$$

ist, so ergibt sich

Theorem V. *Genügt eine ganze transcendente Funktion von x einer linearen homogenen Differentialgleichung, deren Koeffizienten rationale Funktionen von x sind, so ist ihr μ-Index ein positiver Bruch mit ganzzahligem Zähler und Nenner, wobei der Zähler höchstens gleich der Ordnung der Differentialgleichung ist. Insbesondere ist also der μ-Index selbst höchstens gleich dieser Ordnung.*

Dass der μ-Index wirklich den angegebenen Maximalwert erreichen kann, zeigt das Beispiel der Funktion

$$\sum_{\nu=m-1}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!\,(\nu-1)!\ldots(\nu-m+1)!},$$

welche der Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$x^{m-1}\frac{d^m y}{dx^m} - y = 0$$

genügt. Allgemeinere Differentialgleichungen dieser Art habe ich in § 7 der zitierten Arbeit in den Mathematischen Annalen behandelt.

Der letzte Teil von Theorem V lässt sich noch folgendermassen verallgemeinern:

Theorem VI. *Wenn mehrere ganze transcendente Funktionen*

$$F_1(x),\ F_2(x),\ \ldots\ F_k(x)$$

die Eigenschaft haben, dass auch jede lineare Verbindung

$$c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) + \cdots + c_k F_k(x)$$

transcendent bleibt, und wenn sie ein und derselben linearen homogenen Differentialgleichung genügen, deren Koeffizienten rationale Funktionen von x sind, so ist die Summe ihrer μ-Indices höchstens gleich der Ordnung dieser Differentialgleichung.

Offenbar kommt nämlich der μ-Index $-q_\lambda$ höchstens so oft vor, als die Differenzengleichung (12) linear unabhängige Lösungen der $(\sigma-\lambda)^{\text{ten}}$ Klasse hat; deren sind es aber $e_{\lambda+1}-e_\lambda$. Also ist die Summe sämtlicher μ-Indices höchstens gleich

$$\sum_{e_\lambda \geq r} (e_{\lambda+1}-e_\lambda)(-q_\lambda) = \sum_{e_\lambda \geq r} (m_{e_\lambda} - m_{e_{\lambda+1}})$$
$$= m - m_r \leq m. \qquad \text{W. z. b. w.}$$

§ 3.

20. Aus den bisher bewiesenen allgemeinen Theoremen sollen nun noch die wichtigsten darin enthaltenen Spezialfälle hergeleitet werden, welche sich auf die Existenz von Partikulärintegralen beziehen, die in einem singulären Punkt analytisch sind, d. h. gewöhnliche Potenzreihen.

Theorem VII. *Sind die Koeffizienten einer homogenen linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung Polynome, so sind in einer s-fachen Nullstelle des Koeffizienten der höchsten Ableitung mindestens $m-s$ Integrale analytisch.*

Beweis. Wählen wir als die betreffende Stelle den Nullpunkt, so hat die Differentialgleichung die Gestalt

$$(22)\qquad x^s Q_0(x)\frac{d^m y}{dx^m} + x^{s_1} Q_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + x^{s_{m-1}} Q_{m-1}(x)\frac{dy}{dx} + x^{s_m} Q_m(x) y = 0,$$

wobei die Polynome $Q_i(x)$ im Nullpunkt nicht mehr verschwinden. Von den Exponenten $s, s_1, \ldots s_m$ ist mindestens einer gleich Null; sonst könnte man durch x dividieren, und der Nullpunkt wäre dann keine s-fache Nullstelle des höchsten Koeffizienten.

Wir setzen nun der Gleichmässigkeit halber $s = s_0$ und bezeichnen die kleinste der Zahlen

$$s_0 + 0,\ s_1 + 1,\ s_2 + 2, \ldots s_m + m$$

mit q. Es ist also

$$s_i + i \geq q \qquad (i = 0,\ 1, \ldots m), \tag{23}$$

aber für mindestens einen Index j:

$$s_j + j = q. \tag{24}$$

Durch Multiplikation mit x^{m-q} gewinnt man dann für die Differentialgleichung (22) die folgende Normalform:

$$\begin{aligned} x^m(x^{s_0-q}Q_0)\frac{d^m y}{dx^m} + x^{m-1}(x^{s_1+1-q}Q_1)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + x^{m-2}(x^{s_2+2-q}Q_2)\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} \\ + \cdots + (x^{s_m+m-q}Q_m)y = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Bringt man diese mit (1) zur Deckung, so ist offenbar wegen (24)

$$c_{m-j,0} \neq 0,$$

es ist also die Forderung (2) pag. 141 erfüllt. Ferner ist bei richtiger Wahl der Zahl r natürlich auch (3), endlich auch (4) erfüllt, da ja die Differentialgleichung von der m^{ten} Ordnung ist. Die Gleichung (25) hat also die Form, wie wir sie unsern seitherigen Untersuchungen zu Grunde legten.

Dabei ist unter den Zahlen

$$c_{m,0},\ c_{m,1}, \ldots c_{m,r}$$

offenbar c_{m,s_0-q} die *erste* von Null verschiedene, sodass wir

$$e = s_0 - q$$

setzen müssen. Ebenso ist allgemein die erste von Null verschiedene unter den Zahlen

$$c_{i,0},\ c_{i,1}, \ldots c_{i,r}$$

diejenige, deren zweiter Index gleich $s_{m-i} + m - i - q$ ist. Es wird also

$$c_{i,h} = 0 \text{ für } h < s_{m-i} + m - i - q.$$

Oder a fortiori, da doch $s_{m-i} > 0$ ist:

$$c_{i,h} = 0 \text{ für } h + i < m - q.$$

Dies ist aber nach der Definition der Funktionen $f_h(\varrho)$ (pag. 142) offenbar gleichbedeutend mit

$$f_h(i) = 0 \text{ für } h + i < m - q.$$

Bei Anwendung des Korollar II können wir also

$$\varrho_0 = 0, \; p = m - q, \; e = s - q$$

setzen, wodurch wir das Resultat erhalten, dass es mindestens $p - e = m - s$ linear unabhängige Integrale der Form

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^\nu$$

gibt. Damit ist aber Theorem VII bewiesen.

21. Hieraus folgt auch leicht das folgende

Theorem VIII. *Sind die Koeffizienten einer linaren homogenen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung Polynome, und ist der Koeffizient der höchsten Ableitung speziell vom s^{ten} Grad, so sind mindestens $m - s$ Integrale im Endlichen überall analytisch, also ganze Funktionen.*

Wie dieses Theorem aus dem vorhergenden hergeleitet werden kann, habe ich l. c. (Math. Annal. Bd. 66 pag. 475 f.) gezeigt, denn dass ich mich dort auf den von Herrn Poincaré angegebenen Spezialfall beschränkt habe, wo auch die übrigen Koeffizienten nur vom s^{ten} Grad sind, spielt dabei keine Rolle. Ich kann also hier von einer Wiederholung dieses Beweises absehen. Der Satz lässt sich aber auch ganz direkt gewinnen ohne den Umweg über Theorem VII. Die Differentialgleichung sei

$$(26). \qquad Q_0(x)\frac{d^m y}{dx^m} + Q_1(x)\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + Q_m(x)\, y = 0,$$

wobei also das Polynom $Q_0(x)$ vom s^{ten} Grad ist. Wir untersuchen jetzt die Integrale in der Umgebung einer *regulären* Stelle, welche wir der einfacheren Schreibweise halber in den Nullpunkt legen, sodass $Q_0(0) \neq 0$ ist. Multipliziert man mit x^m so kommt

$$(27) \qquad x^m Q_0 \frac{d^m y}{dx^m} + x^{m-1}(xQ_1)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + x^{m-2}(x^2 Q_2)\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + (x^m Q_m)y = 0.$$

Diese Differentialgleichung hat offenbar wieder die Normalform, wie wir sie unsern früheren Untersuchungen zu Grunde legten, und es ist speziell $c_{m,0} \neq 0$. Weil $Q_0(x)$ vom s^{ten} Grad, so ist ferner unter den Zahlen

$$c_{m,0},\ c_{m,1},\ \ldots\ c_{m,r}$$

offenbar $c_{m,s}$ die *letzte* von Null verschiedene. Bei Anwendung des Korollar VI ist also $\varepsilon = s$ zu setzen. Ausserdem ist

$$c_{i,h} = 0 \text{ für } h + i < m,$$

was wieder gleichbedeutend ist mit

$$f_h(i) = 0 \text{ für } h + i < m.$$

Wir werden also in Korollar VI noch $\varrho_0 = 0$, $p = m$ einsetzen, und erhalten dann mindestens $p - \varepsilon = m - s$ linear unabhängige Integrale, welche ganze Funktionen von x sind. W. z. b. w.

22. Wenn der Grad der Polynome $Q_i(x)$ genauer angegeben ist, so lassen sich auch nähere Angaben über den μ-Index dieser ganzen Funktionen machen. Seien etwa $Q_1, \ldots Q_m$ nicht von höherem Grad wie Q_0 d. h. höchstens vom s^{ten} Grad. Dann ist

$$c_{i,h} = 0 \text{ für } h + i > m + s$$

$$c_{m,s} \neq 0.$$

Von den Zahlen

$$c_{0,h},\ c_{1,h},\ \ldots\ c_{m,h}$$

sind daher die $h - s$ letzten gleich Null; also ist, wenn wieder m_h die auf pag. 149 angegebene Bedeutung hat:

$$(28) \qquad m_h \leq m - h + s,$$

$$(29) \qquad m_s = m.$$

Bei dem Newtonschen Polygon ist daher der Punkt P_s mit den Koordinaten s, $m_s = m$ ein Eckpunkt. Bis zu ihm steigen die Polygonseiten an oder laufen horizontal. Von da aus aber senken sie sich, und zwar, da die Ordinaten der

folgenden Punkte P_{s+j} nach (28) höchstens gleich $m-j$ sind, sodass diese Punkte alle unterhalb oder auf der durch P_s gehenden Geraden

$$y = -x + m + s$$

liegen, *mit einem Neigungswinkel von mindestens* $45°$ *gegen die X-Achse*. Es ist also

$$q_s \geq 1,$$

und folglich der μ-Index einer jeden ganzen Funktion, die der Differentialgleichung genügt, mindestens gleich 1. Dies ergibt

Theorem IX. *Sind die Koeffizienten einer linearen homogenen Differentialgleichung* m^{ter} *Ordnung Polynome höchstens* s^{ten} *Grades, und speziell der Koeffizient der* m^{ten} *Ableitung genau vom* s^{ten} *Grad, so ist für jede ganze Funktion, die der Differentialgleichung genügt, der* μ*-Index mindestens gleich* 1.

Dieses Theorem gilt auch für $s \geq m$, sofern die Differentialgleichung dann überhaupt ganze Funktionen als Integrale zulässt, was aber nur ausnahmsweise der Fall ist. Für $s < m$ gibt es nach Theorem VIII immer solche Integrale, und zwar mindestens $m - s$ linear unabhängige.

Speziell wird also eine lineare Differentialgleichung mit *konstanten* Koeffizienten lauter ganze Funktionen als Integrale haben, und deren μ-Indices sind mindestens gleich 1. Da aber anderseits bei einer solchen Differentialgleichung die letzte der Funktionen $f_h(\varrho)$ sich offenbar auf eine Konstante reduziert, so hat sie jedenfalls kein Polynom zum Integral, sodass nach Theorem VI die Summe der μ-Indices ihrer m Integrale höchstens gleich m sein kann. Beide Resultate zusammengenommen besagen aber, dass für jedes Integral der μ-Index genau gleich 1 ist. Dies lässt sich auch leicht direkt bestätigen. Denn jedes Integral setzt sich ja bekanntlich linear zusammen aus m Funktionen der Form

$$x^n e^{ax}.$$

Der μ-Index einer solchen linearen Kombination ist aber, wie leicht zu sehen, der gleiche wie bei der Exponentialfunktion, also in der Tat gleich 1.

München im Dezember 1908.

DIVERGENZCHARACTERE GEWISSER DIRICHLET'SCHER REIHEN.

Von

KONRAD KNOPP

in Nagasaki.

In seiner Arbeit »Über den Divergenzcharacter gewisser Potenzreihen»[1] hat Herr Pringsheim über das Verhalten von Potenzreihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze sehr weitgehende Sätze bewiesen, die es bisher erst zum kleinen Teil auf Dirichlet'sche Reihen zu übertragen gelungen ist. Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, diese Übertragung — im Wesentlichen unter Beibehaltung der Pringsheim'schen Methoden — für die hauptsächlichsten seiner Resultate durchzuführen.

§ 1.

Es seien

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu^x} \tag{1}$$

und

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x} \tag{2}$$

zwei Dirichlet'sche Reihen mit der Grenzgeraden

$$R(x) = \lambda \qquad (\lambda \geqq 0)^2$$

und zwar möge die Reihe (1) für $x = \lambda$ konvergieren, während die Reihe (2) in der Weise divergieren soll, dass,

[1] Acta mathematica, Bd. XXVIII (1904), S. 1—30.

[2] Die Annahme $\lambda \geqq 0$ bedeutet keine sachliche Einschränkung, erweist sich aber im Folgenden als vorteilhaft.

$$d_\nu = \delta_\nu + \delta'_\nu i$$

gesetzt, wenigstens eine der Reihen

$$\sum \frac{\delta_\nu}{\nu^\varrho} \quad \text{und} \quad \sum \frac{\delta'_\nu}{\nu^\varrho}$$

nach $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert. —

Dann hat Herr Cahen[1] als Analogon zu dem entsprechenden Abel'schen Grenzwertsatz über Potenzreihen bekanntlich bewiesen, dass

$$\lim_{\varrho=\lambda} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu^\varrho} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu^\lambda} \tag{3}$$

ist, wenn ϱ, durch reelle Werte abnehmend, sich dem Werte λ nähert. Von diesem Satz gilt die leicht beweisbare[2] Umkehrung, dass

$$\lim_{\varrho=\lambda} \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^\varrho} \right| = +\infty, \tag{4}$$

wenn $\sum \frac{d_\nu}{\nu^\varrho}$ eine Reihe der Art (2) bezeichnet, und ϱ sich ebenso wie bei (3) dem Werte λ nähert.

Herr Cahen hat nun ferner gezeigt[1] und es soll weiter unten von neuem bewiesen werden, dass bei dem Satze (3) die Annäherung längs der reellen Achse an den Punkt λ keinen wesentlichen Teil des Satzes ausmacht, wie dies in entsprechender Weise für Potenzreihen von Stolz[3] bewiesen worden ist. Vielmehr bleibt die Beziehung (3) bestehen, wenn sich die Variable auf einem beliebigen Wege dem Werte λ nähert, wofern dieser Weg nur ganz in einem vom Punkte λ ausgehenden Winkelraume liegt, dessen Schenkel je einen spitzen Winkel φ_0 mit der positiven Richtung der Axe des Reellen bilden. Eine Annäherung in diesem Winkelraume, den wir kurz den Winkelraum $\mathcal{A}$ nennen wollen, an die Stelle λ soll im Folgenden durch

$$\lim x = \lambda \tag{5}$$

im Gegensatz zu der längs der reellen Achse erfolgenden Annäherung

[1] Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et sur des fonctions analogues [Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, Sér. III, Bd. XI (1894), S. 75—164], S. 86—87.

[2] Knopp, Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze [Inaugural-Dissertation, Berlin (1907), S. 1—50], S. 39—40.

[3] Beweis einiger Sätze über Potenzreihen [Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XX (1875), S. 369—376].

$$\lim \varrho = \lambda$$

bezeichnet werden. Es lässt sich also, wie gesagt, neben (3) der weitergehende Satz

$$\lim_{x=\lambda} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu^x} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu^\lambda} \tag{6}$$

beweisen. Bei der Umkehrung (4) dieses Satzes liegt es indessen anders; hier bildet die Annäherung $\lim \varrho = \lambda$ einen wesentlichen Bestandteil des Satzes, selbst wenn man die Koeffizienten d_ν sämtlich positiv voraussetzt. Die folgende dem Pringsheim'schen Beispiel nachgebildete Reihe mag dies erläutern:

Aus

$$\zeta(1+x) = 1 + \frac{1}{2^{1+x}} + \cdots + \frac{1}{\nu^{1+x}} + \cdots$$

bilde ich die Funktion

$$\varphi(x) = e^{\zeta^2(1+x)} = e^{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\tau(\nu)}{\nu^{1+x}}},$$

wo $\tau(\nu)$ die Anzahl aller Teiler von ν bezeichnet. Die Reihe $\sum \frac{\tau(\nu)}{\nu^{1+x}}$ ist bekanntlich für $R(x) > 0$ konvergent, und es ist daher auch die Dirichlet'sche Reihe, in die sich $\varphi(x)$ entwickeln lässt, nämlich

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= e\left[1 + \left(\frac{2}{2^{1+x}} + \cdots + \frac{\tau(\nu)}{\nu^{1+x}} + \cdots\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{2}{2^{1+x}} + \cdots\right)^2 + \cdots\right] \\ &= e\left[1 + \frac{2}{2^{1+x}} + \frac{2}{3^{1+x}} + \frac{5}{4^{1+x}} + \cdots\right]\end{aligned}$$

im Gebiet $R(x) > 0$ konvergent. Die Reihe hat überdies nur positive Koeffizienten und muss für $x = 0$ in eine divergente Reihe übergehen, da gemäss der Definition von $\varphi(x)$

$$\lim_{\varrho=0} \varphi(\varrho) = +\infty$$

ist, was der im Falle der Konvergenz der ebengenannten Reihe stattfindenden Beziehung (3) widersprechen würde. Trotzdem aber hat die Funktion $\varphi(x)$ bei gewissen Annäherungen an die Stelle 0 innerhalb des Winkelraumes Δ einen endlichen Grenzwert, wie sich folgendermassen zeigen lässt:

$\zeta^2(1+x)$ gestattet bekanntlich die Darstellung

$$\zeta^2(1+x) = \frac{h(x)}{x^2},$$

wo $h(x)$ eine in der *Umgebung* von $x = 0$ reguläre Funktion bezeichnet, die im Punkte $x = 0$ den Wert 1 hat. Bei der Annäherung an die Stelle 0 verhält sich daher die Funktion $\varphi(x)$ genau so wie die Funktion

$$e^{\frac{1}{x^2}}.$$

Setzt man nun

$$x = \vartheta(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

so ist

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{\vartheta^2}(\cos 2\varphi - i\sin 2\varphi)$$

und folglich

$$\left|e^{\frac{1}{x^2}}\right| = e^{\frac{1}{\vartheta^2}\cos 2\varphi}.$$

Nähert man sich also der Stelle $x = 0$ auf einem Strahle, der mit der Achse des Positiv-Reellen einen zwischen $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$ gelegenen Winkel einschliesst, so nähert sich

$$e^{\frac{1}{x^2}}$$

und also auch $\varphi(x)$ dem Werte 0. —

Will man also den Satz (4) im Sinne der Gleichung (6) erweitern, so wird man den Koeffizienten d_ν gewisse Beschränkungen auferlegen müssen. Solche Beschränkung würde etwa die Annahme

$$\frac{\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{d_\nu}{\nu^x}\right|}{\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{d_\nu}{\nu^x}\right|} \geq \alpha > 0 \tag{7}$$

für alle im Winkelraum Δ hinreichend nahe an λ gelegenen Werte von x sein, wofern gleichzeitig die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{d_\nu}{\nu^x}\right|$$

divergiert. Denn wegen

$$\left|\frac{d_\nu}{\nu^x}\right| = \frac{|d_\nu|}{\nu^{\lambda(x)}}$$

hat man nach (4) wegen der Divergenz von $\sum\left|\frac{d_\nu}{\nu^x}\right|$

$$\lim_{x=\lambda} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{d_\nu}{\nu^x} \right| = \lim_{\varrho=\lambda} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|d_\nu|}{\nu^\varrho} = +\infty .$$

Gleichzeitig mit dem Nenner muss dann aber wegen der Annahme (7) auch der Zähler unendlich werden, d. h. man hat auch

$$\lim_{x=\lambda} \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x} \right| = +\infty .$$

Im Anschluss an Herrn PRINGSHEIM, will ich von einer Dirichlet'schen Reihe $\sum \frac{d_\nu}{\nu^x}$, die der Bedingung (7) genügt und für die $\sum \left| \frac{d_\nu}{\nu^x} \right|$ divergiert, sagen, sie ginge bei $x = \lambda$ *gleichmässig* zur Divergenz über, oder kurz, sie *divergiere gleichmässig* bei $x = \lambda$. Es gilt dann also der Satz:

Satz I. »Wenn $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x}$ bei $x = \lambda$ gleichmässig divergiert, so ist neben

$$\lim_{\varrho=\lambda} \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^\varrho} \right| = +\infty$$

auch

$$\lim_{x=\lambda} \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x} \right| = +\infty .» \tag{8}$$

Mit Hilfe dieses Satzes ist es nun leicht, einen Satz zu beweisen, der für Potenzreihen zuerst in der genannten Arbeit des Herrn PRINGSHEIM und der für Dirichlet'sche Reihen und die reelle Annäherung $\lim \varrho = \lambda$ von mir bewiesen wurde.[1] Aus diesem Satze lassen sich dann eine Reihe von Analogien zu Sätzen über Potenzreihen herleiten.

Satz II. »Sind zwei Dirichlet'sche Reihen mit der Grenzgeraden $R(x) = \lambda$ vorgelegt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x} \text{ und } \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x}, \tag{9}$$

deren zweite bei $x = \lambda$ in dem Sinne der eben aufgestellten Definition gleichmässig divergiert, und hat man

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{d_n} = g, \tag{10}$$

so ist auch

[1] l. c., S. 38—41.

$$\lim_{x=\lambda} \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x}}{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x}} = g, \quad (g \text{ beliebig}) \tag{11}$$

und, falls $g \neq 0$, so divergiert auch die Reihe $\sum \frac{a_\nu}{\nu^x}$ bei $x = \lambda$ gleichmässig, d. h. es existiert ein $\beta > 0$, so dass

$$\frac{\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x}\right|}{\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{a_\nu}{\nu^x}\right|} \geq \beta > 0 \tag{12}$$

für alle hinreichend nahe an λ gelegenen Werte x des Raumes $\mathcal{A}$.»

Beweis: Ich setze

$$\frac{a_n}{d_n} = g + \varepsilon_n,$$

so dass

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$$

und

$$a_n = g d_n + \varepsilon_n d_n$$

ist. Dann hat man:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x} = g \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu d_\nu}{\nu^x}$$

oder

$$\left| \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x}}{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x}} - g \right| \leq \frac{\left|\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varepsilon_\nu d_\nu}{\nu^x}\right| + \left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu d_\nu}{\nu^x}\right|}{\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x}\right|}$$

Wähle ich nun hierin n so gross, dass für alle $\nu > n$

$$|\varepsilon_\nu| < \varepsilon$$

wird, wo ε eine beliebige positive Grösse ist, und dann x so dicht an λ (innerhalb $\mathcal{A}$), dass auch

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\varepsilon_\nu d_\nu}{\nu^x}\right| < \varepsilon \left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{d_\nu}{\nu^x}\right|$$

ist, — was wegen (8) stets möglich ist —, so wird auch

$$\left|\frac{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^x}}{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{d_\nu}{\nu^x}} - g\right| < \varepsilon + \varepsilon \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{d_\nu}{\nu^x}\right|}{\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{d_\nu}{\nu^x}\right|}$$

oder wegen der Annahme (7):

$$< \varepsilon\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$$

für alle in dieser Nähe von λ gelegenen Werte von x. Dies besagt aber, dass

$$\lim_{x=\lambda} \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^x}}{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{d_\nu}{\nu^x}} = g \tag{11}$$

ist. –

Dass nun, im Falle $g \neq 0$, die Reihe $\sum \frac{a_\nu}{\nu^x}$ ebenfalls bei $x = \lambda$ gleichmässig divergiert, lässt sich folgendermassen einsehen:

Wegen $a_\nu = g d_\nu + \varepsilon_\nu d_\nu$ hat man

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^x}\right| \geq |g| \cdot \left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{d_\nu}{\nu^x}\right| - \left|\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\varepsilon_\nu d_\nu}{\nu^x}\right| - \left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu d_\nu}{\nu^x}\right|$$

und

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{a_\nu}{\nu^x}\right| \leq |g| \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{d_\nu}{\nu^x}\right| + \sum_{\nu=1}^{n}\left|\frac{\varepsilon_\nu d_\nu}{\nu^x}\right| + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\left|\frac{\varepsilon_\nu d_\nu}{\nu^x}\right|.$$

Denke ich mir nun diese beiden Ungleichungen durch einander dividiert und dann den Quotienten auf der rechten Seite in Zähler und Nenner durch

$$|g| \sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{d_\nu}{\nu^x}\right|$$

gehoben, so erhalte ich einen Ausdruck von der Form

$$\frac{\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^x}\right|}{\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{a_\nu}{\nu^x}\right|} \geqq \frac{\alpha - A - B}{1 + A' + B'}$$

wo A, B, A', B' Grössen sind, die durch geeignete Wahl von n und passende Beschränkung von x, wie oben, beliebig klein gemacht werden können. Ich habe also sicher für eine hinreichend kleine Umgebung von λ (innerhalb $\mathcal{A}$):

$$\frac{\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^x}\right|}{\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{a_\nu}{\nu^x}\right|} \geqq \frac{\alpha}{2} = \beta > 0 \tag{12}$$

w. z. b. w.

Aus diesem Satze lässt sich nun eine Reihe von Sätzen folgern, die im Falle reeller Annäherung und reeller Koeffizienten zum Teil schon bekannt und für die Annäherung durch komplexe Werte neuerdings zum Teil von Herrn Schnee[1] auf Grund ganz anders gearteter Betrachtungen bewiesen worden sind. Bevor wir indessen hierzu übergehen, soll der Satz II noch nach einer Richtung hin erweitert werden, die seine Anwendung wesentlich erleichtert. Ich behaupte nämlich, dass der Satz II gültig bleibt, wenn man (unter sonst gleichen Voraussetzungen) statt der Annahme

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{d_n} = g \tag{10}$$

die allgemeinere

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{d_1 + d_2 + \cdots + d_n} = g \tag{13}$$

setzt, zu deren Erfülltsein die vorige im Allgemeinen[2] zwar hinreichend aber nicht notwendig ist. —

[1] Ueber irreguläre Potenzreihen und Dirichlet'sche Reihen [Inaugural-Dissertation, Berlin (1908), S. 1—80], S. 29—59.

[2] Den Schluss von (10) auf (13) darf man stets dann machen, wenn $\Sigma |d_\nu|$ in der Weise divergiert, dass doch

$$\frac{|d_1 + d_2 + \cdots + d_n|}{|d_1| + |d_2| + \cdots + |d_n|}$$

für alle n oberhalb einer positiven Zahl bleibt, — sicher also wenn die d_ν positiv sind und Σd_ν divergiert.

Für $R(x) > \lambda$ gilt bekanntlich die Transformation

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x} = \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu \left(\frac{1}{\nu^x} - \frac{1}{(\nu+1)^x} \right),$$

wo

$$D_\nu = d_1 + d_2 + \cdots + d_\nu$$

gesetzt ist. Hierfür kann man dann auch schreiben:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{D_\nu}{\nu^x} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\nu} \right)^x \right]$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{D_\nu}{\nu^x} \left[\frac{x}{\nu} - \frac{x(x+1)}{2!\,\nu^2} + \cdots \right]$$

$$= x \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{D_\nu}{\nu^{1+x}} \left[1 - \frac{1}{\nu} \left(\frac{x+1}{2!} - \frac{(x+1)(x+2)}{3!\,\nu} + \cdots \right) \right].$$

wo die im Innern stehende Reihe für alle $\nu > 1$ und alle in Betracht kommenden Werte von x gleichmässig konvergiert. Ich kann daher setzen:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x} = x \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{D_\nu}{\nu^{1+x}} \left(1 + \frac{\vartheta_\nu}{\nu} \right), \tag{14}$$

wo die ϑ_ν (und gleich hernach die ϑ'_ν und ϑ''_ν) Zahlen bedeuten, deren Beträge für alle ν und alle in Betracht kommenden Lagen von x unterhalb einer endlichen Schranke bleiben. Analog gilt für $R(x) > \lambda$ die Transformation

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x} = x \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu^{1+x}} \left(1 + \frac{\vartheta'_\nu}{\nu} \right), \tag{15}$$

wo

$$A_\nu = a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu$$

gesetzt ist. Man hat daher

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x}}{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x}} = \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu^{1+x}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu \vartheta'_\nu}{\nu^{2+x}}}{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{D_\nu}{\nu^{1+x}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{D_\nu \vartheta_\nu}{\nu^{2+x}}},$$

wo rechts der gemeinsame Faktor x unterdrückt ist.

Geht man in dieser Gleichung zur Grenze $\lim x = \lambda$ über, so bleibt der zweite Summand in Zähler und Nenner endlich; der erste Summand des Nenners dagegen wird seinem Betrage nach unendlich, wie man dies am einfachsten aus (14) erkennt, indem man dort zur Grenze $\lim x = \lambda$ übergeht. Denn würde

$$\left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{D_\nu}{\nu^{1+\mu}} \right|$$

unterhalb einer endlichen Schranke bleiben, so würde dies auch mit der rechten Seite von (14) der Fall sein, während doch die linke Seite den Voraussetzungen gemäss unendlich wird. Daher hat man:

$$\lim_{x=\lambda} \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^\varrho}}{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^\varrho}} = \lim_{x=\lambda} \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu^{1+\mu}}}{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{D_\nu}{\nu^{1+\mu}}}, \tag{16}$$

wofern der rechte Grenzwert vorhanden ist. Ist nun aber

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{D_n} = g,$$

so folgte nach Satz II sofort

$$\lim_{x=\lambda} \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu^{1+\mu}}}{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{D_\nu}{\nu^{1+\mu}}} = \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{D_n}$$

und also auch

$$\lim_{x=\lambda} \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^\varrho}}{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^\varrho}} = \lim_{n=\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{d_1 + d_2 + \cdots + d_n}, \tag{17}$$

— wenn nur die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{D_\nu}{\nu^{1+\mu}}$$

bei $x = \lambda$ gleichmässig divergiert. Dass dies aber unter der Annahme der gleichmässigen Divergenz von $\sum \frac{d_\nu}{\nu^\varrho}$ bei $x = \lambda$ stets der Fall ist, erkennt man folgendermassen:

Nach (14) ist

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\lambda'} \frac{d_\nu}{\nu^x}\right| = |x|\left|\sum_{\nu=1}^{\lambda'} \frac{D_\nu}{\nu^{1+x}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{D_\nu \vartheta_\nu}{\nu^{2+c}}\right|$$

und entsprechend, indem man

$$|d_1| + |d_2| + \cdots + |d_\nu| = A_\nu$$

setzt:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{d_\nu}{\nu^x}\right| = \sum_{\nu=1}^{\lambda'} \frac{|d_\nu|}{\nu^{R(x)}} = R(x) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu^{1+R(x)}} + R(x) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu \vartheta''_\nu}{\nu^{2+R(x)}}$$

also ist:

$$\frac{\left|\sum_{\nu=1}^{\lambda'} \frac{d_\nu}{\nu^x}\right|}{\sum_{\nu=1}^{\lambda'} \left|\frac{d_\nu}{\nu^x}\right|} = \frac{|x|}{R(x)} \cdot \frac{\left|\sum_{\nu=1}^{\lambda'} \frac{D_\nu}{\nu^{1+x}} + \sum_{\nu=1}^{\lambda'} \frac{D_\nu \vartheta_\nu}{\nu^{2+x}}\right|}{\sum_{\nu=1}^{\lambda'} \frac{A_\nu}{\nu^{1+R(x)}} + \sum_{\nu=1}^{\lambda'} \frac{A_\nu \vartheta''_\nu}{\nu^{2+R(x)}}}.$$

Da nun der Voraussetzung nach dieser Wert stets

$$\geq \alpha > 0$$

bleibt, da ferner bei der Annäherung der Grösse x an die Stelle λ der erste Summand in Zähler und Nenner der rechten Seite unendlich wird, während die zweiten Summanden bei diesem Grenzübergang unterhalb einer endlichen Schranke bleiben und da endlich auch stets

$$\frac{|x|}{R(x)}$$

unterhalb einer durch die Öffnung des Winkelraums Δ fixierten Konstanten $k_0 = \frac{1}{\cos \varphi_0}$ liegt, so existiert eine positive Zahl α' derart, dass für alle x einer hinreichend kleinen Umgebung von λ innerhalb Δ stets

$$\frac{\left|\sum_{\nu=1}^{\lambda'} \frac{D_\nu}{\nu^{1+x}}\right|}{\sum_{\nu=1}^{\lambda'} \frac{A_\nu}{\nu^{1+R(x)}}} > \alpha' > 0$$

bleibt. Nun ist aber

$$\frac{\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{D_\nu}{\nu^{1+x}}\right|}{\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{D_\nu}{\nu^{1+x}}\right|} \geq \frac{\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{D_\nu}{\nu^{1+x}}\right|}{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_\nu}{\nu^{1+R(x)}}},$$

also auch

$$\cdot\, \alpha' > 0$$

d. h. auch die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{D_\nu}{\nu^{1+x}}$$

divergiert gleichmässig bei $x = \lambda$, wie behauptet. Damit ist dann der folgende Satz vollständig bewiesen:

Satz III. »Sind $\sum \frac{a_\nu}{\nu^x}$ und $\sum \frac{d_\nu}{\nu^x}$ zwei Dirichlet'sche Reihen mit der Grenzgeraden $R(x) = \lambda \geq 0$, deren zweite bei $x = \lambda$ gleichmässig divergiert, so ist

$$\lim_{x=\lambda}\frac{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^x}}{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{d_\nu}{\nu^x}} = \lim_{n=\infty}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{d_1 + d_2 + \cdots + d_n}, \tag{18}$$

wofern der rechtsstehende Grenzwert existiert und x sich innerhalb Δ dem Wert λ nähert.» —

Setzt man, in derselben Richtung weitergehend

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu = A'_\nu$$
$$D_1 + D_2 + \cdots + D_\nu = D'_\nu,$$

und allgemein

$$A_1^{(\gamma-1)} + A_2^{(\gamma-1)} + \cdots + A_\nu^{(\gamma-1)} = A_\nu^{(\gamma)}$$
$$D_1^{(\gamma-1)} + D_2^{(\gamma-1)} + \cdots + D_\nu^{(\gamma-1)} = D_\nu^{(\gamma)},$$

so folgt durch wiederholte Anwendung der Beziehung (16)

$$\lim_{x=\lambda}\frac{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^x}}{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{d_\nu}{\nu^x}} = \lim_{x=\lambda}\frac{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_\nu^{(\gamma)}}{\nu^{\gamma+1+x}}}{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{D_\nu^{(\gamma)}}{\nu^{\gamma+1+x}}} = \lim_{n=\infty}\frac{A_n^{(\gamma)}}{D_n^{(\gamma)}}, \tag{19}$$

wofern für einen bestimmten Wert von γ der letzte Grenzwert existiert. Es ist aber im allgemeinen die Voraussetzung der Existenz von

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n^{(\gamma)}}{D_n^{(\gamma)}}$$

umfassender als die Voraussetzung der Existenz von

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n^{(\gamma-1)}}{D_n^{(\gamma-1)}},$$

da man zwar (im Allgemeinen[1]) von dem letzteren Grenzwert mit Hilfe des bekannten Cauchy-Stolz'schen Grenzwertsatzes auf die Existenz des ersteren, aber nicht umgekehrt schliessen kann.

Folgende Bemerkung mag hier Platz finden: Im Satz II hat die Voraussetzung

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{d_n} = g$$

offenbar die Tatsache *zur Folge*, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x} \tag{20}$$

dieselbe Grenzgerade hat wie die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x}, \tag{21}$$

so dass es dort genügt hätte, nur über die Grenzgerade dieser letzten Reihe etwas vorauszusetzen. Dasselbe gilt auch für den Satz III. Ist nämlich

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{d_1 + d_2 + \cdots + d_n} = \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{D_n} = g,$$

so ist

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\log |A_n|}{\log n} \leq \limsup_{n=\infty} \frac{\log |D_n|}{\log n}$$

d. h. $\sum \frac{a_\nu}{\nu^x}$ konvergiert mindestens (und falls $g \neq 0$ ist, sogar genau) in demselben Gebiet wie $\sum \frac{d_\nu}{\nu^x}$. Anders liegt es aber bei der Erweiterung (19). Ist z. B.

[1] S. Fussnote 2 S. 172

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}{D_1 + D_2 + \cdots + D_n} = g\,, \tag{22}$$

so braucht die Reihe (20) doch nicht dieselbe Grenzgerade zu haben, wie (21).[1] Es liegt dies ersichtlich daran, dass die transformierte Reihe (15) weiter konvergieren kann als die ursprüngliche.

Es habe etwa (20) die Grenzgerade $R(x) = \lambda_1$; dann ist (s. o.) für $R(x) > \lambda_1$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x} \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \left(\frac{1}{\nu^x} - \frac{1}{(\nu+1)^x} \right) = x \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu^{1+x}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu\, \vartheta(\nu, x)}{\nu^{\alpha+x}}\,,$$

wo $\vartheta(\nu, x)$ für alle ν und alle in Betracht kommenden x unter einer endlichen Schranke bleibt. Es kann nun aber, wie gesagt, eintreten, dass die rechtsstehende Reihe noch in einem gewissen Streifen links von der Geraden $R(x) = \lambda_1$ konvergiert; stets dann nämlich, wenn

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\log |A_1 + A_2 + \cdots + A_n|}{\log n} < \limsup_{n=\infty} \frac{\log |A_n|}{\log n} + 1\,,$$

oder, was dasselbe ist, wenn es eine Zahl $c < 1$ gibt, so dass für jedes $\varepsilon > 0$ von einer gewissen Stelle an

$$|A_1 + A_2 + \cdots + A_n| < n^{c+\varepsilon} |A_n|$$

ist. In diesem Falle liefert also die transformierte Reihe die Fortsetzung der durch die gegebene Reihe dargestellten Funktion $a(x)$ und diese selbst kann demnach keinen singulären Punkt auf der Geraden $R(x) = \lambda_1$ haben. — $a(x)$ ist dann also unter den Voraussetzungen des Satzes (19), welchen Wert auch $\lambda_1 > \lambda$ haben mag, sicher für $R(x) > \lambda$ regulär und für die Annäherung an den Punkt λ gilt die Relation (19) in dem etwas modifizierten Sinne, dass jetzt

$$\lim_{x=\lambda} \frac{a(x)}{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^x}} = \lim_{n=\infty} \frac{A_n^{(\gamma)}}{D_n^{(\gamma)}}$$

ist, falls der rechtsstehende Grenzwert für einen bestimmten Wert von γ existiert.

[1] Man kann dies leicht an der durch gliedweise Addition von

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^x} \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu\, \nu^{\frac{\alpha}{2}}}{\nu^x}$$

entstehenden Reihe $\sum \frac{a_\nu}{\nu^x}$ prüfen.

§ 2.

Um aus den Sätzen II, III und (19) spezielle Schlüsse ziehen zu können, ist es vor allem nötig, Reihen vom Typus

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x}$$

aufzustellen, die bei $x = \lambda$ gleichmässig divergieren. Am einfachsten lässt sich diese Eigenschaft von der Funktion

$$\zeta(1+x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{1+x}}$$

mit der Grenzgeraden $R(x) = 0$ nachweisen. Denn da diese Funktion in der Umgebung von $x = 0$ die Darstellung

$$\zeta(1+x) = \frac{1}{x} + g(x)$$

gestattet, wo $g(x)$ eine in der Umgebung von $x = 0$ reguläre Funktion bezeichnet, so hat man im Winkelraume $\mathcal{A}$

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{1+x}}\right| \quad |\zeta(1+x)| \cdot \left|\frac{1}{x} + g(x)\right|$$
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{1}{\nu^{1+x}}\right| \quad \zeta(1+R(x)) \quad \frac{1}{R(x)} + g(R(x))$$

$$\cdot \frac{1 - |x| g(x)}{|x| \atop R(x)} \div |x| g(R(x)) \cdot$$

Beschränke ich also x auf eine so kleine Umgebung der Stelle $x = 0$ innerhalb $\mathcal{A}$, dass die zweiten Summanden in Zähler und Nenner $< \frac{1}{2}$ bleiben, so bleibt

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{1+x}}\right| \quad 1 - \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2k_0 + 1},$$
$$\sum_{\nu=1}^{k_0} \left|\frac{1}{\nu^{1+x}}\right| \quad k_0 \; 1 \; \frac{1}{2}$$

wo k_0 die schon oben erwähnte Konstante ist. Diese Beziehung besagt aber, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{1+x}}$$

bei $x = 0$ gleichmässig divergiert. Ebenso würde offenbar eine Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu^{1+x}}$ stets dann bei $x = 0$ gleichmässig divergieren, wenn die durch sie dargestellte Funktion sich in der Umgebung von $x = 0$ wie

$$\frac{c}{x^p} + g(x) \qquad (R(p) > 0)$$

verhält, wobei c eine Konstante, p eine komplexe Zahl mit positiv-reellem Teil und $g(x)$ eine dort reguläre Funktion bedeutet. Ich behaupte nun, dass die durch die Reihen

$$f_p(x) = 1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\log^{p-1} \nu}{\nu^{1+x}} \qquad (R(p) > 0)$$

dargestellten Funktionen $f_p(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ ein solches Verhalten aufweisen. Hierzu ist es hinreichend zu zeigen, dass die Reihe

$$f_p(x) - \int_2^{\infty} \frac{\log^{p-1} u}{u^{1+x}} du = 1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \left\{ \frac{\log^{p-1} \nu}{\nu^{1+x}} - \int_\nu^{\nu+1} \frac{\log^{p-1} u}{u^{1+x}} du \right\} \tag{23}$$

für $R(x) > -1$ konvergiert. Denn da

$$\int_1^{\infty} \frac{\log^{p-1} u}{u^{1+x}} du = \frac{\Gamma(p)}{x^p}$$

ist, so wäre in der Umgebung von $x = 0$ wirklich

$$f_p(x) = \frac{c}{x^p} + g(x). \tag{24}$$

Nun ist aber, wenn ich mir x zunächst reell denke,

$$\int_\nu^{\nu+1} \frac{\log^{p-1} u}{u^{1+x}} du = \log^{p-1}(\nu + \vartheta) \int_\nu^{\nu+1} \frac{du}{u^{1+x}} = \frac{\log^{p-1}(\nu + \vartheta)}{x} \left[-\frac{1}{u^x} \right]_\nu^{\nu+1} \quad (0 < \vartheta < 1)$$

$$\frac{\log^{p-1}(\nu+\vartheta)}{x}\left(\frac{1}{\nu^x}-\frac{1}{(\nu+1)^x}\right)$$
$$-\frac{\log^{p-1}(\nu+\vartheta)}{x\cdot\nu^x}\left[1-\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{-x}\right]$$
$$=\frac{\log^{p-1}(\nu+\vartheta)}{\nu^{1+x}}+\frac{A}{\nu^{2+x-\varepsilon}},$$

wo ε eine beliebig kleine positive Zahl und $A=A(\nu)$ eine mit $\frac{1}{\nu}$ gegen 0 abnehmende Grösse bedeutet. Es genügt hiernach, zu beweisen, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=2}'\left\{\frac{\log^{p-1}\nu-\log^{p-1}(\nu+\vartheta)}{\nu^{1+x}}\right\}$$

für $R(x)>-1$ konvergiert. Da aber die Differenz $\log^{p-1}\nu-\log^{p-1}(\nu+\vartheta)$ von geringerer Grössenordnung ist als $\frac{\log^p\nu}{\nu}$, so erhellt dies unmittelbar.

Die analytische Funktion (23) erweist sich dadurch für reelle $x>-1$ mit einer für $R(x)>-1$ regulären Funktion identisch; erstere ist daher ebenfalls für $R(x)>-1$ regulär, und für $f_p(x)$ gilt somit in der Umgebung von $x=0$ die Darstellung (24), w. z. b. w.

Auf Grund dieser Tatsache nun, dass die durch die Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\log^{p-1}\nu}{\nu^{1+x}} \qquad (R(p)>0)$$

dargestellten Funktionen sich in der Umgebung von $x=0$ wie

$$\frac{\Gamma(p)}{x^p}$$

verhalten, und also diese Reihen selbst bei $x=0$ gleichmässig divergieren, lassen sich mit Hilfe der Sätze II, III und (10) eine Anzahl spezieller Sätze beweisen, die sämtlich Analoga zu bekannten Grenzwertsätzen in der Theorie der Potenzreihen darstellen, und die für Dirichlet'sche Reihen zu einem Teil in der schon zitierten Arbeit des Herrn Schnee enthalten sind, dort aber auf ganz andere Weise bewiesen sind.

1) Wenn

$$\lim_{n=\infty}a_n=a,$$

so hat man

$$\lim_{x=0} \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{1+x}}}{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{1+x}}} = \lim_{x=0} \zeta(1+x) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{1+x}} = a,$$

oder auch wegen

$$\lim_{x=0} x \cdot \zeta(1+x) = 1$$

$$\lim_{x=0} x \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{1+x}} = \lim_{x=0} (x+1) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x} = a. \tag{25}$$

Analog folgt aus

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^\lambda} = a,$$

dass

$$\lim_{x=0} x \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{\lambda+1+x}} = a \tag{26}$$

ist.

2) Wenn $\sum \frac{a_\nu}{\nu^x}$ die Grenzgerade $R(x) = 0$ hat und wenn Σa_ν konvergiert, und $= A$ ist, d. h. also wenn

$$\lim_{n=\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \lim_{n=\infty} A_n = A$$

ist, so hat man nach (14) bezw. (15)

$$\lim_{x=0} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x} = \lim_{x=0} x \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu^{1+x}},$$

also nach (25)

$$\lim_{x=0} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x} = A = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu; \tag{27}$$

man erkennt hierin das Cahen'sche[1] Analogon zum Abel'schen[2] Stetigkeitssatz für Potenzreihen.

[1] Siehe Fussnote 1 S. 166.

[2] Untersuchungen über die Reihe

$$1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots \text{ u. s. w.}$$

[Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. I (1826), S. 311—339], S. 317—318.

3) Wenn $\sum \frac{a_\nu}{\nu^x}$ die Grenzgerade $R(x) = 0$ hat, wenn aber $\sum a_\nu$ nicht konvergiert, wohl aber das arithmetische Mittel der ersten n Teilsummen einem Grenzwerte A zustrebt, d. h. also wenn

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{A'_n}{n} = A$$

ist, so hat man analog

$$\lim_{x=0} \sum \frac{a_\nu}{\nu^x} = \lim_{x=0} \left\{ x \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu^{1+x}} \right\} = \lim_{x=0} \left\{ x(x+1) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A'_\nu}{\nu^{2+x}} \right\}$$

also nach (26) für $\lambda = 1$

$$\lim_{x=0} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x} = A = \lim_{n=\infty} \frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}{n}. \tag{28}$$

Man erkennt hierin das Analogon zu dem bei Potenzreihen zuerst von Herrn Frobenius[1] bewiesenen Satz.

Sowohl Abel, wie Herr Frobenius haben indessen die Beziehungen nur für reelle Annäherung aufgestellt.

4) In derselben Richtung weitergehend ergibt sich durch wiederholte Anwendung von (14):

$$\lim_{x=0} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x} = \lim_{x=0} \left\{ x \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu^{1+x}} \right\} = \cdots = \lim_{x=0} \left\{ x(x+1) \ldots (x+\gamma) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu^{(\gamma)}}{\nu^{\gamma+1+x}} \right\}.$$

Existiert also für einen bestimmten Wert von γ

$$\lim_{n=\infty} \frac{\gamma!}{n^\gamma} A_n^{(\gamma)} = A$$

so hat man hieraus nach (26) für $\lambda = \gamma$

$$\lim_{x=0} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x} = A = \lim_{n=\infty} \frac{\gamma!}{n^\gamma} A_n^{(\gamma)}. \tag{29}$$

5) Hat die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x}$$

[1] Über die Leibnitz'sche Reihe [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LXXXIX (1880), S. 262—264].

die Grenzgerade $R(x) = \lambda > 0$ und existiert hier der Grenzwert

$$\lim \frac{A_n^{(\gamma)}}{n^{\lambda+\gamma}} = A,$$

so ist zunächst

$$\lim_{x=0} \left\{ x \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu^{(\gamma)}}{\nu^{\gamma+\lambda+1+x}} \right\} = \lim_{x=\lambda} \left\{ (x-\lambda) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu^{(\gamma)}}{\nu^{\gamma+1+x}} \right\} = A,$$

also

$$\lim_{x=\lambda} (x-\lambda) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x} = \lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+\gamma)A. \tag{30}$$

6) Da bekanntlich

$$\lim_{v=0} \left\{ v^p \left((1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\log^{p-1}\nu}{\nu^{1+v}} \right) \right\} = \Gamma(p) \qquad (R(p) > 0)$$

ist, und da, wie oben gezeigt, die Reihen

$$1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\log^{p-1}\nu}{\nu^{1+x}} \qquad (R(p) > 0)$$

bei $x = 0$ gleichmässig divergieren, so ist auch

$$\lim_{x=0} \left\{ x^p \cdot \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\log^{p-1}\nu}{\nu^{1+x}} \right\} = \Gamma(p). \tag{31}$$

Ist also für eine Reihe $\sum \frac{a_\nu}{\nu^x}$

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{\log^{p-1} n} = A, \qquad (R(p) > 0)$$

so folgt nach (31) sofort, dass

$$\lim_{x=0} \left\{ x^p \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{1+x}} \right\} = A \cdot \Gamma(p) \tag{32}$$

ist Man erkennt hierin das Analogon zu einem von Herrn APPELL[1] bei Potenzreihen bewiesenen Satz.

Ganz entsprechend folgt aus

$$\lim_{n=\infty} n^{\lambda} \frac{a_n}{\log^{p-1} n} = A\,,$$

dass

$$\lim_{x=0} \left\{ x^p \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{\lambda+1+x}} \right\} = \lim_{x=\lambda} \left\{ (x-\lambda)^p \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{1+x}} \right\} = A \,.\, \Gamma(p) \tag{33}$$

ist.

7) Endlich ergibt die bei (30) ausgeführte Transformation dass aus

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n^{(\gamma)}}{n^{\gamma+\lambda} \log^{p-1} n} = A$$

sich folgern lässt, dass

$$\lim_{x=\lambda} \left\{ (x-\lambda)^p \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x} \right\} = \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+\gamma) A \,.\, \Gamma(p)\,^2 \tag{34}$$

st. Und in dieser Formel sind alle vorhergehenden als Spezialfälle enthalten, wenn man nur, im Falle $\lambda = 0$, sich den rechts auftretenden Faktor λ gegen $(x-\lambda)$ auf der linken Seite heben lässt.

§ 3.

Die in den Formeln (25) bis (34) enthaltenen Sätze waren bisher allein aus der Tatsache hergeleitet, dass die Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\log^{p-1} \nu}{\nu^{1+x}} \qquad (R(p) > 0)$$

bei $x = 0$ gleichmässig divergieren. Zu wesentlich weitergehenden Sätzen gelangt man, wenn man allgemeinere Typen gleichmässig bei $x = 0$ divergierender Reihen aufstellt. Diesem Zwecke soll der folgende Abschnitt dienen.

[1] Sur certaines séries ordonnées par rapport aux puissances d'une variable [Comptes rendus, Bd. LXXXVII (2. Semester 1878), S. 689—692].

[2] Auch für die Beziehungen (29), (30) und (34) gelten die am Ende von § 1 gemachten Bemerkungen.

Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$ eine mit n monoton ins Unendliche wachsende Folge positiver Zahlen; doch sei ihr Wachstum schliesslich langsamer als jede noch so kleine positive Potenz von $\log (n+1)$, d. h. *es sei*

$$1 < \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} < \left(\frac{\log (n+1)}{\log n}\right)^{\varepsilon}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ von einer gewissen Stelle an. Dann ist auch

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} < \left(1 + \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right)^{\varepsilon} < \left(1 + \frac{1}{n \log n}\right)^{\varepsilon}$$

oder auch

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} < 1 + \frac{\varepsilon}{n \log n}$$

für jedes $\varepsilon > 0$, mindestens von einer gewissen Stelle an. Es ist daher auch

$$\lambda_n - \lambda_{n-1} < \frac{\varepsilon \lambda_{n-1}}{n \log n} < \frac{\varepsilon \lambda_n}{n \log n} \tag{35}$$

und man kann daher setzen

$$\lambda_n - \lambda_{n-1} = \frac{\varepsilon_n \lambda_n}{n \log n},$$

wo die ε_n eine Folge positiver Zahlen sind, für die

$$\lim \varepsilon_n = 0$$

ist.

Neben den Grössen λ_n betrachte ich noch die positive, stetige, mit r monoton ins Unendliche wachsende Funktion

$$\lambda(r),$$

die sonst nur der Bedingung

$$\lambda(n) = \lambda_n$$

zu genügen hat.

Diese Funktion hat die für das Folgende fundamentale Eigenschaft, dass

$$\lim_{r=\infty} \frac{\lambda(r^\alpha)}{\lambda(r)} = 1 \tag{36}$$

ist für jedes positive α. Wegen der Stetigkeit der Funktion $\lambda(r)$ und der Beziehung $\lim_{n=\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1$ genügt es offenbar zu zeigen, dass

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda_{[n^\alpha]}}{\lambda_n} = 1$$

ist. Da aber, falls $\alpha > 1$,

$$\lambda_{[n^\alpha]} - \lambda_n = \sum_{\nu=n+1}^{[n^\alpha]} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) = \sum_{\nu=n+1}^{[n^\alpha]} \frac{\varepsilon_\nu \lambda_\nu}{\nu \log \nu}$$

ist, so hat man, da auch $\frac{\lambda_n}{\log n}$ schliesslich monoton abnimmt,

$$\frac{\lambda_{[n^\alpha]}}{\lambda_n} - 1 \leq \varepsilon_{n+1} \frac{\lambda_n}{\log n} \sum_{\nu=n+1}^{[n^\alpha]} \frac{1}{\nu} \cdot \frac{1}{\lambda_n},$$

wo ε_{n+1} die grösste der Grössen $\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+2}, \ldots$ bezeichnet. Da aber

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_{n+1} = 0$$

ist, so folgt hieraus unmittelbar

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda_{[n^\alpha]}}{\lambda_n} = 1$$

und damit die Gültigkeit der Beziehung (36)[1] die offenbar gleichmässig für alle α zwischen zwei festen positiven Grenzen gilt.

Ich behaupte nun, wenn die λ_n Zahlen der eben charakterisierten Art sind, so hat die Dirichtlet'sche Reihe

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}{\nu^x} \qquad (\lambda_0 = 0) \qquad (37)$$

die Grenzgerade $R(x) = 0$ und divergiert gleichmässig bei $x = 0$. — Nur das letztere bedarf eines Beweises. Es ist

$$F(x) - \lambda_n \sum_{\nu=1}^{n} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) \left(\frac{1}{\nu^x} - 1 \right) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}{\nu^x}$$

oder

$$\lambda_n^{-1} \cdot F(x) - 1 = \lambda_n^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) \left(\frac{1}{\nu^x} - 1 \right) + \lambda_n^{-1} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}{\nu^x}.$$

In dieser Gleichung denke ich mir nun x und n so gewählt, dass

$$|x| \leq \frac{1}{\log n}$$

oder

$$|x| \log n \leq 1$$

[1] Ist $\alpha < 1$, so substituiere man ν^α für ν.

ist. Dann ist aber für $\nu \leq n$

$$\left|\frac{1}{\nu^x} - 1\right| = \left|1 - e^{-x\log\nu}\right| = \left|x\log\nu - \frac{x^2\log^2\nu}{2!} + \cdots\right|$$

$$< |x|\log\nu\left\{1 + \frac{1}{2!} + \cdots\right\} \leq 2|x|\log\nu.$$

Also ist

$$\left|\lambda_n^{-1}F(x) - 1\right| \leq \frac{2|x|}{\lambda_n}\sum_{\nu=1}^{n}(\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})\log\nu + \left|\lambda_n^{-1}\cdot\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}{\nu^x}\right|$$

$$< \frac{2|x|}{\lambda_n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\varepsilon_\nu\lambda_\nu}{\nu} + \left|\lambda_n^{-1}\cdot\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}{\nu^x}\right|.$$

Ich bestimme nun die Abhängigkeit von x und n genauer dahin, dass ich setze

$$n = \left[e^{\left|\frac{1}{x}\right|}\right], \tag{38}$$

woraus

$$e^{\left|\frac{1}{x}\right|} = n + \vartheta \qquad (0 \leq \vartheta < 1)$$

$$\left|\frac{1}{x}\right| = \log(n + \vartheta)$$

$$|x| = \frac{1}{\log(n+\vartheta)} \leq \frac{1}{\log n};$$

und n soll im Folgenden die durch (38) wohlbestimmte Zahl $n(x)$ sein. Dann ist zunächst

$$\lim_{x=0}|x|\log n = \lim_{n=\infty}|x|\log n = 1 \tag{39}$$

und also

$$\lim_{x=0}\left|\lambda_n^{-1}F(x) - 1\right| \leq \lim_{x=0}\left\{\frac{2}{\lambda_n\log n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\varepsilon_\nu\lambda_\nu}{\nu} + \left|\frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}{\nu^x}\right|\right\}$$

$$< \lim_{x=0} 2\cdot\frac{\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\varepsilon_\nu\lambda_\nu}{\nu}}{\lambda_n\log n} + \lim_{x=0}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu\lambda_\nu}{\nu\log\nu}\cdot\frac{1}{\nu^{R(x)}}$$

$$= \lim_{x=0}(A) + \lim_{x=0}(B).$$

Nun ist aber

$$\lim_{x=0}(A) = 2\lim_{n=\infty}\frac{\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\varepsilon_\nu\lambda_\nu}{\nu}}{\lambda_n\log n} \qquad 2\lim_{n=\infty}\frac{\frac{\varepsilon_n\lambda_n}{n}}{\lambda_n\log n-\lambda_{n-1}\log(n-1)}$$

$$=2\lim_{n=\infty}\frac{\frac{\varepsilon_n}{n}}{\log(n-1)\left(\frac{\log n}{\log(n-1)}-\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)}$$

Da aber für grosse n

$$\frac{\log n}{\log(n-1)} < 1 + \frac{1}{2(n-1)\log(n-1)}$$

und

$$\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} = 1 - \frac{\varepsilon_n}{n\log n}$$

ist, so hat man

$$\lim_{x=0}(A) < 2\lim_{n=\infty}\frac{\frac{\varepsilon_n}{n}}{\log(n-1)\left(\frac{1}{2(n-1)\log(n-1)}+\frac{\varepsilon_n}{n\log n}\right)} \qquad 4\lim_{n=\infty}\varepsilon_n$$

d. h.

$$\lim_{x=0}(A) = 0.$$

Ebenso findet man

$$\lim_{x=0}(B) = \lim_{x=0}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu\lambda_\nu}{\nu\log\nu}\cdot\frac{1}{\nu^{R(x)}}$$

$$< \lim_{x=0}\frac{1}{\lambda_n}\cdot\frac{\lambda_n}{\log n}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu}{\nu^{1+R(x)}},$$

da ja für alle hinreichend grossen ν neben

$$\frac{\lambda_\nu}{\lambda_{\nu-1}} < \frac{\log\nu}{\log(\nu-1)}$$

auch

$$\frac{\lambda_\nu}{\log\nu} < \frac{\lambda_{\nu-1}}{\log(\nu-1)}$$

ist. Folglich ist unter Berücksichtigung von (39):

$$\lim_{x=0}(B) \leq \lim_{x=0}|x|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu}{\nu^{1+R(x)}}.$$

Wegen

$$\lim_{n=\infty}\varepsilon_n = 0$$

ist aber dieser letzte Wert nach (25) gleich 0. Also folgt:

$$\lim_{x=0}\left\{\lambda_n^{-1}F(x)\right\}=1$$

oder

$$\lim_{x=0}\frac{F(x)}{\lambda\left(e^{\left|\frac{1}{x}\right|}\right)}=1. \tag{40}$$

Dann ist aber auch speziell

$$\lim_{x=0}\frac{F(R(x))}{\lambda\left(e^{R(x)}\right)}=1, \tag{41}$$

und es folgt aus (40) und (41) zusammen, dass

$$\lim_{x=0}\frac{F(x)}{F(R(x))}=\lim_{x=0}\frac{\lambda\left(e^{\left|\frac{1}{x}\right|}\right)}{\lambda\left(e^{R(x)}\right)}.$$

Dieser letzte Grenzwert ist aber, da sich $\left|\frac{1}{x}\right|$ und $\frac{1}{R(x)}$ nur um einen endlichen und von 0 verschiedenen Faktor unterscheiden, nach (36) gleich 1. Folglich hat man auch

$$\lim_{x=0}\frac{F(x)}{F(R(x))}=1,$$

d. h. aber dass

$$\lim_{x=0}\frac{\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1}}{\nu^x}\right|}{\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1}}{\nu^x}\right|}=1 \tag{42}$$

ist. Da dann der linksstehende Quotient für alle hinreichend nahe an 0 innerhalb Δ gelegenen Werte von x sicher $>\frac{1}{2}$ ist, so besagt (42) zugleich, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1}}{\nu^x}$$

bei $x=0$ gleichmässig divergiert, w. z. b. w. —

Reihen von diesem Typus können also in den Sätzen II, III und (19) als Vergleichsreihen $\sum\frac{d_\nu}{\nu^x}$ benutzt werden, was dann für spezielle λ_ν (z. B. $\log\log^p\nu$ u. s. w.) spezielle Sätze liefert.

§ 4.

Analoge Betrachtungen lassen sich nun auch für die verallgemeinerten Dirichlet'schen Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu e^{-\gamma_\nu x} \tag{43}$$

durchführen, in denen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n, \ldots$ irgend eine monoton mit n ins Unendliche wachsende Folge positiver Zahlen bedeutet. Diese Reihe habe die Grenzgerade $R(x) = \lambda$, und es sei

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |d_\nu e^{-\gamma_\nu \lambda}|$$

divergent. Wenn dann für alle hinreichend nahe an λ gelegenen Werte von x des Winkelraumes Δ

$$\frac{\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu e^{-\gamma_\nu x}\right|}{\sum_{\nu=1}^{\infty} |d_\nu e^{-\gamma_\nu x}|} \geq \alpha > 0 \tag{44}$$

bleibt, so soll die Reihe (43) wieder als gleichmässig divergent bei $x = \lambda$ bezeichnet werden.

Es gilt dann auch hier der

Satz IV: »Sind $\Sigma a_\nu e^{-\gamma_\nu x}$ und $\Sigma d_\nu e^{-\gamma_\nu x}$ zwei Dirichlet'sche Reihen, deren zweite die Grenzgerade $R(x) = \lambda$ hat und bei $x = \lambda$ gleichmässig divergiert, und ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{d_n} = g,$$

so ist auch

$$\lim_{x=\lambda} \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\gamma_\nu x}}{\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu e^{-\gamma_\nu x}} = g; \tag{45}$$

es konvergiert auch die zweite Reihe für $R(x) > \lambda$ und, falls nur $g \neq 0$, divergiert auch sie gleichmässig bei $x = \lambda$.

Beweis: Es sei

$$\frac{a_\nu}{d_\nu} = g + \varepsilon$$

so dass

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$$

ist. Dann hat man wieder:

$$\left| \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\gamma_\nu x}}{\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu e^{-\gamma_\nu x}} - g \right| \leq \frac{\left| \sum_{\nu=1}^{n} d_\nu \varepsilon_\nu e^{-\gamma_\nu x} \right| + \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} d_\nu \varepsilon_\nu e^{-\gamma_\nu x} \right|}{\left| \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu e^{-\gamma_\nu x} \right|}$$

Wähle ich hierbei n so gross, dass für alle $\nu > n$

$$|\varepsilon_\nu| < \varepsilon$$

ist, so folgt mit Berücksichtigung von (44)

$$\left| \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\gamma_\nu x}}{\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu e^{-\gamma_\nu x}} - g \right| \leq \frac{\left| \sum_{\nu=1}^{n} d_\nu \varepsilon_\nu e^{-\gamma_\nu x} \right|}{\left| \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu \varepsilon_\nu e^{-\gamma_\nu x} \right|} + \frac{\varepsilon}{\alpha}. \tag{46}$$

Da nun aber

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |d_\nu e^{-\gamma_\nu x}|$$

divergieren sollte, so ist, wie man in Analogie zu (4) sehr leicht zeigt,

$$\lim_{x=\lambda} \sum_{\nu=1}^{\infty} |d_\nu e^{-\gamma_\nu x}| = \infty;$$

wegen der Bedingung (44) ist dann aber auch

$$\lim_{x=\lambda} \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu e^{-\gamma_\nu x} \right| = +\infty.$$

Folglich kann ich x innerhalb $\mathcal{J}$ auf eine so kleine Umgebung von $x = \lambda$ beschränken, dass für alle diese Punkte

$$\frac{\left| \sum_{\nu=1}^{n} d_\nu \varepsilon_\nu e^{-\gamma_\nu x} \right|}{\left| \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu e^{-\gamma_\nu x} \right|} < \varepsilon$$

bleibt. Dann ist aber die rechte Seite von (46)

$$\cdot \varepsilon\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$$

d. h. man hat

$$\lim_{x=\lambda} \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\gamma_\nu x}}{\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu e^{-\gamma_\nu x}} = g,$$

Dass auch die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\gamma_\nu x}$, falls nur $g \neq 0$ ist, bei $x=\lambda$ gleichmässig divergiert, folgt nun ähnlich wie oben folgendermassen:

Es ist

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\gamma_\nu x}\right| \geq |g| \cdot \left|\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu e^{-\gamma_\nu x}\right| - \left|\sum_{\nu=1}^{n} d_\nu \varepsilon_\nu e^{-\gamma_\nu x}\right| - \left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} d_\nu \varepsilon_\nu e^{-\gamma_\nu x}\right|$$

und

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu e^{-\gamma_\nu x}| \leq |g| \sum_{\nu=1}^{\infty} |d_\nu e^{-\gamma_\nu x}| + \sum_{\nu=1}^{n} |d_\nu \varepsilon_\nu e^{-\gamma_\nu x}| + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |d_\nu \varepsilon_\nu e^{-\gamma_\nu x}|.$$

Also ist

$$\frac{\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\gamma_\nu x}\right|}{\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu e^{-\gamma_\nu x}|} \leq \frac{\alpha - A - B}{1 + A' + B'}$$

wo A, B, A', B' Grössen bedeuten, die durch geeignete Wahl von n und x beliebig klein gemacht werden können. Man hat also sicher für eine passend gewählte Umgebung von $x=\lambda$ innerhalb Δ:

$$\frac{\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\gamma_\nu x}\right|}{\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu e^{-\gamma_\nu x}|} \geq \frac{\alpha}{2} > 0$$

d. h. auch die Reihe $\Sigma a_\nu e^{-\gamma_\nu x}$ divergiert gleichmässig bei $x=\lambda$.

Einen Übergang von der Reihe $\Sigma a_\nu e^{-\gamma_\nu x}$ zur Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu e^{-\gamma_\nu x} \qquad (A_\nu = a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu)$$

wird man hier natürlich nicht ohne besondere Annahmen über das Verhalten der γ_ν machen können.

Wie im vorigen Fall besteht auch hier die Schwierigkeit darin, geeignete Vergleichsreihen vom Typus

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu e^{-\gamma_\nu x}$$

aufzustellen, die bei $x=\lambda$ gleichmässig divergieren. Es lassen sich, wie oben, zwei Gruppen solcher Reihen bilden.

Zur Bildung der ersten Gruppe benutze ich folgenden kürzlich von Herrn SCHNEE[1] aufgestellten

Satz: »Genügen in der Reihe

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu e^{-\gamma_\nu x} \tag{43}$$

die Exponenten γ_ν von einer gewissen Stelle an der Bedingung

$$\gamma_\nu-\gamma_{\nu-1}=\alpha_\nu<e^{-k\gamma_\nu} \qquad (k>0) \tag{47}$$

und die Koeffizienten d_ν der Bedingung

$$D_\nu=d_1+\cdots+d_\nu=e^{\gamma_\nu}\gamma_\nu^{p-1}+O(e^{(1-q)\gamma_\nu}), \qquad \begin{pmatrix} p \text{ beliebig,} \\ q>0 \end{pmatrix} \tag{48}$$

so ist die Reihe $f(x)$ für $R(x)>1$ konvergent; und für

$$R(x)>\operatorname{Max}(1-k,\ 1-q)$$

ist die Funktion

$$f(x)-\Gamma(p)\left\{\frac{1}{(x-1)^p}+\frac{1}{(x-1)^{p-1}}\right\} \tag{49}$$

regulär, ausser wenn p eine negative ganze Zahl oder 0 ist; in diesem Falle ist aber die Funktion

$$f(x)-\frac{(-1)^{p-1}}{(-p)!}\left\{(x-1)^{p+1}\log(x-1)+(x-1)^{-p}\log(x-1)\right\}$$

in demselben Gebiete regulär.»

[1] Über Dirichlet'sche Reihen [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXVII (1. Semester 1909) S. 87—116], S. 91.

Aus diesem Satze folgt offenbar, dass die Reihe (43), unter den Annahmen (47) und (48), bei $x = 1$ gleichmässig divergiert, wenn nur $R(p) > 0$ oder $p = 0$ ist. Durch die Substitution $x' = x + \lambda$ kann man natürlich den Satz statt für den Grenzpunkt $x = +1$ für jeden andern Punkt aussprechen. Ich will im folgenden einen elementaren Beweis dieses wichtigen Satzes geben.

Beweis: Der Satz braucht offenbar nur für eine spezielle, den Voraussetzungen des Satzes genügende Funktion $f(x)$ bewiesen zu werden. Genügt nämlich eine zweite Funktion

$$f_1(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} d'_\nu e^{-\gamma_\nu x}$$

denselben Bedingungen, so ist

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (d_\nu - d'_\nu) = O(e^{(1-q)\gamma_n})$$

und $f(x) - f_1(x)$ erweist sich somit als mindestens für $R(x) > 1 - q$ konvergent. Bis zu dieser Geraden müssen also $f(x)$ und $f_1(x)$ gleichsingulär sein.

Ich wähle nun

$$d_\nu = e^{\gamma_\nu} \gamma_\nu^{p-1} \quad e^{-\gamma_\nu} \gamma_\nu^{p-1}, \qquad (\nu = 2, 3, \ldots; \; d_1 = e^{\gamma_1} \gamma_1^{p-1})$$

so dass

$$D_\nu = e^{\gamma_\nu} \gamma_\nu^{p-1}$$

wird und behaupte zunächst, dass, welchen Wert auch p haben mag, die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ d_\nu e^{-\gamma_\nu x} - \int_{\gamma_{\nu-1}}^{\gamma_\nu} e^{-u(x-1)} u^{p-1} du - (p-1) \int_{\gamma_{\nu-1}}^{\gamma_\nu} e^{-u(x-1)} u^{p-2} du \right\} \tag{50}$$

für $R(x) > 1 - p$ konvergiert. Es ist nämlich, wenn ich mir x zunächst reell denke,

$$\int_{\gamma_{\nu-1}}^{\gamma_\nu} e^{-u(x-1)} u^{p-1} du - (\gamma_\nu - \vartheta\alpha_\nu)^{p-1} \int_{\gamma_{\nu-1}}^{\gamma_\nu} e^{-u(x-1)} du = \frac{(\gamma_\nu - \vartheta\alpha_\nu)^{p-1}}{x-1} - (e^{-\gamma_{\nu-1}(x-1)} - e^{-\gamma_\nu(x-1)})$$

$$(0 < \vartheta < 1)$$

oder da

$$e^{-\gamma_{\nu-1}(x-1)} - e^{-\gamma_\nu(x-1)} = e^{-\gamma_\nu(x-1)} (-1 + e^{(\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1})(x-1)}) =$$

$$= (x-1)\alpha_\nu e^{-\gamma_\nu(x-1)} + e^{-\gamma_\nu(x-1)} O(\alpha_\nu^2),$$

so ist

$$\int_{\gamma_{\nu-1}}^{\gamma_\nu} e^{-u(x-1)}\, u^{p-1}\, du = \alpha_\nu(\gamma_\nu - \vartheta\alpha_\nu)^{p-1}\, e^{-\gamma_\nu(x-1)} + e^{-\gamma_\nu(x-1-\varepsilon)}\, O(\alpha_\nu^2) \qquad (51)$$

für jedes $\varepsilon > 0$.

Da ebenso

$$\begin{aligned} d_\nu &= e^{\gamma_\nu}\gamma_\nu^{p-1}\left[1 - e^{-\alpha_\nu + O(\alpha_\nu^2)}\left(\frac{\gamma_\nu - 1}{\gamma_\nu}\right)^{p-1}\right] \\ &= e^{\gamma_\nu}\gamma_\nu^{p-1}\left[1 - (1 - \alpha_\nu + O(\alpha_\nu^2))\left(1 - \frac{(p-1)\alpha_\nu}{\gamma_\nu} + O(\alpha_\nu^2)\right)\right] \\ &= e^{\gamma_\nu}\gamma_\nu^{p-1}\left[\alpha_\nu + \frac{(p-1)\alpha_\nu}{\gamma_\nu} + O(\alpha_\nu^2)\right] \end{aligned}$$

ist, so erhält man für das allgemeine Glied der Reihe (50), nachdem man die Relation (51) noch für $p-2$ statt $p-1$ angesetzt hat,

$$a_\nu(x) = e^{-\gamma_\nu(x-1)}\{\alpha_\nu[\gamma_\nu^{p-1} - (\gamma_\nu - \vartheta\alpha_\nu)^{p-1}] + (p-1)\alpha_\nu[\gamma_\nu^{p-2} - (\gamma_\nu - \vartheta\alpha_\nu)^{p-2}] + O(e^{\gamma_\nu\varepsilon}\alpha_\nu^2)\}$$

Da nun ersichtlich

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (e^{\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}})\, e^{-\gamma_\nu x}$$

und also auch

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu e^{-\gamma_\nu(x-1)}$$

für $R(x) > 1$ konvergiert, so konvergiert wegen der Annahme (47) die Reihe $\Sigma\alpha_\nu^2 e^{-\gamma_\nu(x-1)}$ für $R(x) > 1-k$ und es genügt nun, das gleiche von

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu[\gamma_\nu^{p-1} - (\gamma_\nu - \vartheta\alpha_\nu)^{p-1}]\, e^{-\gamma_\nu(x-1)}$$

zu beweisen; da aber die in der Klammer stehende Differenz von kleinerer Grössenordnung ist als $\alpha_\nu\gamma_\nu^{p-1}$, so erhellt dies unmittelbar. Die Reihe (50) erweist sich also für alle reellen Werte von $x > 1-k$ mit einer Reihe identisch, die für alle Werte von $R(x) > 1-k$ konvergiert und dort eine reguläre analytische Funktion darstellt. Demnach ist also die durch die Reihe (50) selbst dargestellte Funktion mindestens bis zur Geraden $R(x) = 1-k$ regulär, und also die durch die Reihe $\Sigma d_\nu e^{-\gamma_\nu x}$ dargestellte Funktion $f(x)$ bis zu dieser Geraden mit der Funktion

$$\int_a^\infty e^{-u(x-1)}\,u^{p-1} + (p-1)\int_a^x e^{-u(x-1)}\,u^{p-2}\,du$$

gleichsingulär; hierbei ist die untere Grenze a eine beliebige positive Zahl. Zur Untersuchung des Verhaltens von $f(x)$ genügt es also dasjenige der Funktionen

$$\varphi_1(x) = \int_a^x e^{-u(x-1)}\,u^{p-1}\,du$$

und

$$\varphi_2(x) = (p-1)\int_a^x e^{-u(x-1)}\,u^{p-2}\,du$$

festzustellen. Differenziere ich zu diesem Zweck $\varphi_1(x)$ r-mal — was hier gestattet — unter dem Integralreichen nach x

$$\varphi_1^{(r)}(x) = (-1)^r \int_a^x e^{-u(x-1)}\,u^{p-1+r}\,du,$$

so kann ich mir r so gross gewählt denken, dass $R(p+r) \geq 1$ ist (r ist ev. $= 0$). Dann ist aber

$$\varphi^{(r)}(x) = \frac{(-1)^r}{(x-1)^{p+r}}\int_{a(x-1)}^\infty e^{-u}\,u^{p+r-1}\,du = \frac{(-1)^r}{(x-1)^{p+r}}\left\{\int_0^\infty e^{-u}\,u^{p+r-1}\,du - \int_0^{a(x-1)} e^{-u}\,u^{p+r-1}\,du\right\}$$

also

$$\varphi^{(r)}x = \frac{(-1)^r}{(x-1)^{p+r}}\,\Gamma(p-r) + g(x),$$

wo $g(x)$, und ebenso im Folgenden $g_1(x)$, $g_2(x)$, . . ., ganze Funktionen von x bedeuten; durch r-malige Integration erhält man nun, wofern p keine negative ganze Zahl oder 0 ist,

$$\varphi_1(x) = \frac{\Gamma(p)}{(x-1)^p} + g_1(x).$$

Analog ist

$$\varphi_2(x) = (p-1)\frac{\Gamma(p-1)}{(x-1)^{p-1}} + g_2(x),$$

so dass

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \Gamma(p)\left(\frac{1}{(x-1)^p} + \frac{1}{(x-1)^{p-1}}\right) + g_3(x).$$

Ist aber p eine negative ganze Zahl oder 0, so wähle ich $r = -p+1$ und finde

$$\varphi_1^{(r)}(x) = (-1)^r \cdot \frac{1}{x-1} + g_4(x)$$

und die r-malige Integration liefert nun

$$\varphi_1(x) = \frac{(-1)^{p-1}}{(-p)!}(x-1)^{-p}\log(x-1) + g_5(x).$$

Analog ist in diesem Fall

$$\varphi_2(x) = \frac{(-1)^{p-1}}{(-p)!}(x-1)^{-p+1}\log(x-1) + g_6(x),$$

so dass jetzt

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \frac{(-1)^{p-1}}{(-p)!}\{(x-1)^{-p+1}\log(x-1) + (x-1)^{-p}\log(x-1)\} + g_7(x);$$

und in beiden Fällen ist die Funktion

$$f(x) - [\varphi_1(x) + \varphi_2(x)]$$

für $R(x) > 1-k$ regulär. Da $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ genau die im Satze angegebene Zusatzfunktion ist, so ist nach den eingangs gemachten Bemerkungen der Satz vollständig bewiesen, und es sind somit Typen von Reihen hergestellt, die bei $x = 1$ gleichmässig divergieren. Eine zweite Gruppe solcher Reihen erhält man wieder ähnlich wie oben auf die folgende Weise:

Es sei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$ eine mit n monoton ins Unendliche wachsende Folge positiver Zahlen; doch sei ihr Wachstum derart an das der γ_n gebunden, dass für jedes positive ε die Beziehung

$$1 < \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} < \left(\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}\right)^{\varepsilon}$$

mindestens von einer gewissen Stelle ab erfüllt ist. Dann ist auch

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} < \left(1 + \frac{\gamma_n - \gamma_{n-1}}{\gamma_{n-1}}\right)^{\varepsilon} < 1 + \frac{\varepsilon(\gamma_n - \gamma_{n-1})}{\gamma_{n-1}}$$

für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$, mindestens von einer gewissen Stelle ab.

Man kann daher setzen

$$\lambda_n - \lambda_{n-1} = \frac{\varepsilon_n(\gamma_n - \gamma_{n-1})\lambda_{n-1}}{\gamma_{n-1}}, \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{52}$$

wo dann wieder

$$\lim \varepsilon_n = 0$$

sein muss.

Neben den λ_n und γ_n betrachte ich dann weiter die stetigen und monotonen Funktionen $\lambda(r)$ und $\gamma(r)$, die im Übrigen nur der Bedingung

$$\lambda(n) = \lambda_n \quad \text{und} \quad \gamma(n) = \gamma_n$$

zu genügen haben. Neben $\gamma(r)$ führe ich endlich noch die dazu inverse Funktion

$$\gamma(r)$$

ein, die dann auch stetig und monoton verläuft, und für die

$$\gamma[\gamma'(r)] = r$$

ist. Dann behaupte ich zunächst, dass für jedes positive α

$$\lim_{r=\infty} \frac{\lambda[\gamma'(\alpha \cdot \gamma(r))]}{\lambda(r)} = 1 \tag{53}$$

ist. Die Bedeutung dieser vorbereitenden Ausführungen erkennt man am besten, wenn man die entsprechenden Ausführungen bei dem Spezialfalle $\gamma_n = \log n$ vergleicht.

Da aus (52) hervorgeht, dass

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} = 1,$$

also auch

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda_{n+a}}{\lambda_n} = 1$$

ist, wenn a eine feste Zahl bedeutet, wofern nur

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\gamma_n - \gamma_{n-1}}{\gamma_{n-1}}$$

als endlich vorausgesetzt wird, so genügt es offenbar, zu zeigen, dass

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda[\gamma(\alpha\gamma_n)]}{\lambda_n} = 1$$

ist für jedes $\alpha > 0$. Hat man vorerst $\alpha \geq 1$, so ist

$$\lambda[\gamma(\alpha\gamma_n)] - \lambda_n = \sum_{\nu=n+1}^{[\gamma(\alpha\gamma_n)]} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})$$

$$\sum_{\nu=n+1}^{[\gamma(\alpha\gamma_n)]} \varepsilon_\nu \frac{\lambda_{\nu-1}(\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1})}{\gamma_{\nu-1}}$$

also

$$\frac{\lambda[\bar{\gamma}(\alpha\gamma_n)]}{\lambda_n} - 1 \leq \frac{1}{\lambda_n} \cdot \frac{\lambda_n}{\gamma_n} \varepsilon_{n+1} \cdot \sum_{\nu=n+1}^{[\bar{\gamma}(\alpha\gamma_n)]} (\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1})$$

$$\leq \frac{\varepsilon_{n+1}}{\gamma_n} (\alpha\gamma_n - \gamma_n) \leq \varepsilon_{n+1}(\alpha - 1),$$

woraus sich

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda[\gamma(\alpha\gamma_n)]}{\lambda_n} = 1$$

ergibt. Durch die Substitution $\bar{\gamma}\left(\frac{1}{\alpha}\gamma(r)\right)$ für r ergibt sich das gleiche für $\alpha < 1$. Aus beiden folgt die Behauptung (53).

Bezeichnet nun $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ eine Folge der eben bezeichneten Art, so behaupte ich, dass die Reihe

$$F(x) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) e^{-\gamma_\nu x} \qquad (\lambda_0 = 0) \qquad (54)$$

bei $x = 0$ gleichmässig divergiert. Dass sie für $R(x) > 0$ konvergiert, erkennt man unmittelbar.

Es ist wieder

$$F(x) - \lambda_n = \sum_{\nu=1}^{n} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})(e^{-\gamma_\nu x} - 1) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) e^{-\gamma_\nu x},$$

und zwar denke ich mir hierbei n so gewählt, dass

$$|x| < \frac{1}{\gamma_n}$$

oder

$$\gamma_n \left| \frac{1}{x} \right|$$

$$n \gamma \left(\left| \frac{1}{x} \right| \right)$$

ist, also etwa

$$n \left[\gamma \left(\left| \frac{1}{x} \right| \right) \right]. \tag{55}$$

Diese durch x wohlbestimmte Zahl soll $n = n(x)$ im Folgenden bedeuten. Dann ist aber für $\nu < n$

$$|1 - e^{-\gamma_\nu x}| < \left| \gamma_\nu x + \frac{\gamma_\nu^2 x^2}{2!} + \cdots \right| \leq |x| \gamma_\nu \left(1 + \frac{1}{2!} + \cdots \right) < 2 |x| \gamma_\nu$$

und also

$$|F(x) - \lambda_n| \leq 2 |x| \sum_{\nu=1}^{n} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) \cdot \gamma_\nu + \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) e^{-\gamma_\nu x} \right|$$

$$< 2 |x| \lambda_1 \gamma_1 + \frac{2}{\gamma_2} |x| \sum_{\nu=2}^{n} \varepsilon_\nu \lambda_{\nu-1} (\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}) + \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu \lambda_{\nu-1} (\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1})}{\gamma_{\nu-1}} e^{-\gamma_\nu x} \right|$$

$$\left| \frac{F(x)}{\lambda_{n(x)}} - 1 \right| < 2 |x| \frac{\lambda_1 \gamma_1}{\lambda_n} + \frac{2}{\gamma_2} |x| \gamma_n \frac{\sum_{\nu=2}^{n} \varepsilon_\nu \lambda_{\nu-1} (\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1})}{\lambda_n \gamma_n} + \frac{1}{\lambda_n} \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu \lambda_{\nu-1} (\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}) e^{-\gamma_\nu x}}{\gamma_{\nu-1}} \right|$$

$$= A(x) + B(x). \tag{56}$$

Wegen der Festsetzung (55) und wegen $\lim \lambda_n = \infty$ ist zunächst

$$\lim_{x=0} |x| \gamma_n = 1 \text{ und } \lim_{n=\infty} \frac{2 |x| \lambda_1 \gamma_1}{\lambda_n} = 0 \tag{57}$$

und also

$$\lim_{x=0} A(x) \leq \frac{2}{\gamma_2} \lim_{n=\infty} \frac{\varepsilon_n \lambda_{n-1} (\gamma_n - \gamma_{n-1})}{\lambda_n \gamma_n - \lambda_{n-1} \gamma_{n-1}}$$

$$= \frac{2}{\gamma_2} \lim_{n=\infty} \frac{\varepsilon_n (\gamma_n - \gamma_{n-1})}{\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \gamma_n - \gamma_{n-1}}.$$

Da nun nach (52)

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} > 1 + \frac{\varepsilon_n (\gamma_n - \gamma_{n-1})}{\gamma_{n-1}}$$

ist, so hat man

$$\lim_{x=0} A(x) = \frac{2}{\gamma_2} \lim_{n=\infty} \frac{\varepsilon_n(\gamma_n - \gamma_{n-1})}{\gamma_n - \gamma_{n-1} + \frac{\varepsilon_n \gamma_n}{\gamma_{n-1}}(\gamma_n - \gamma_{n-1})}$$

$$= \frac{2}{\gamma_2} \lim_{n=\infty} \frac{\varepsilon_n}{1 + \frac{\varepsilon_n \gamma_n}{\gamma_{n-1}}} = 0. \tag{58}$$

Ähnlich findet man

$$B(x) \leq \frac{1}{\lambda_n} \varepsilon_{n+1} \frac{\lambda_n}{\gamma_n} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} (\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}) e^{-\gamma_\nu R(x)}$$

$$\leq \frac{\varepsilon_{n+1}}{|x| \gamma_n} \cdot k_0 \cdot R(x) \sum_{\nu=1}^{\infty} (\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}) e^{-\gamma_\nu R(x)},$$

so dass wegen (57) und

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_{n+1} = 0$$

auch

$$\lim_{x=0} B(x) = 0 \tag{59}$$

wäre, wenn nur

$$\varrho \sum_{\nu=1}^{\infty} (\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}) e^{-\gamma_\nu \varrho}$$

endlich bleibt, wenn ϱ durch reelle Werte abnehmend sich dem Werte 0 nähert. Ich behaupte, dass der Ausdruck stets ≤ 1 bleibt. Da nämlich

$$(\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}) e^{-\gamma_\nu \varrho} = e^{-\gamma_\nu \varrho} \int_{\gamma_{\nu-1}}^{\gamma_\nu} du \leq \int_{\gamma_{\nu-1}}^{\gamma_\nu} e^{-u\varrho} du$$

und also

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}) e^{-\gamma_\nu \varrho} \leq \int_0^{\infty} e^{-u\varrho} du$$

$$= \frac{1}{\varrho} \int_0^{\infty} e^{-u} du = \frac{1}{\varrho}$$

ist, so hat man

$$\varrho \sum_{\nu=1}^{\infty} (\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}) e^{-\gamma_\nu \varrho} \leq 1.$$

Dadurch ist aber die Beziehung (59) bewiesen. Aus ihr folgt aber in Verbindung mit (58) nach (56), dass

$$\lim_{x=0} \frac{F(x)}{\lambda_{n(x)}} = 1 \tag{60}$$

ist. Speziell ist dann auch für reelle Annäherung

$$\lim_{R(x)=0} \frac{F(R(x))}{\lambda_{n(R(x))}} = 1$$

und also

$$\lim_{x=0} \frac{F(x)}{F(R(x))} = \lim_{x=0} \frac{\lambda(n(x))}{\lambda(n(Rx))} . \tag{61}$$

Die Argumente von λ sind aber hier gemäss (55)

$$n(x) \quad \gamma\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right)$$

und

$$n(R(x)) \quad \gamma\left(\frac{1}{R(x)}\right)$$

und da sich $R(x)$ und $|x|$ nur um einen endlichen und von o verschieden bleibenden Faktor unterscheiden, so hat man nach (53) (durch zweimalige Anwendung):

$$\lim_{x=0} \frac{\lambda(n(x))}{\lambda(n(Rx))} = 1 .$$

Folglich ist auch

$$\lim_{x=0} \frac{F(x)}{F(R(x))} = \lim_{x=0} \frac{\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) e^{-\gamma_\nu x}\right|}{\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|(\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) e^{-\gamma_\nu x}\right|} = 1 .$$

Diese Beziehung besagt aber zugleich, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) e^{-\gamma_\nu x}$$

bei $x = 0$ gleichmässig divergiert, womit die ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

Diese letzte Tatsache enthält die oben für die Reihen $\sum_{\gamma^x} d_\nu$ bewiesenen Beziehungen als den Spezialfall $\gamma_n = \log n$ und den entsprechenden von Herrn Pringsheim a. a. O. für Potenzreihen bewiesenen Satz für $\gamma_n = n$.

Durch Wahl spezieller γ_ν und λ_ν erhält man dann auch hier eine Anzahl spezieller Sätze.

Nagasaki (Japan), den 14. Dez. 1908.

SUR LES FORMULES DE GREEN GÉNÉRALISÉES QUI SE PRÉSENTENT DANS L'HYDRODYNAMIQUE ET SUR QUELQUES-UNES DE LEURS APPLICATIONS.

PAR

C. W. OSEEN

À UPSAL.

Les méthodes de Green, si fécondes dans les différentes parties de la physique mathématique, ont été employées il y a déjà longtemps dans la théorie du mouvement d'un fluide idéal. Il était à attendre qu'elles ne seraient pas moins fructueuses dans la théorie d'un fluide visqueux, et en effet, M. H. A. LORENTZ a montré dans un mémoire intéressant quel profit on peut en tirer pour l'étude du mouvement permanent d'un fluide visqueux et incompressible.

Le mémoire present est consacré à l'étude des formules de Green généralisées qui se présentent dans la théorie générale du mouvement d'un fluide visqueux. Il est divisé en deux parties. Dans la première, nous appliquerons les méthodes de Green au problème du mouvement d'un fluide visqueux et incompressible dans trois ou deux dimensions. Dans la seconde, nous étudierons le mouvement d'un fluide visqueux et compressible.

Quelques-uns de nos résultats ont été publiés précédemment dans l'Arkiv för matematik, astronomi och fysik 1906—1907.

[1] Abhandlungen über theoretische Physik Bd 1 p. 23.

Première partie. Sur les formules de Green généralisées dans la théorie d'un fluide visqueux et incompressible.

I.

Les formules de Green généralisées dans le problème général à trois dimensions.

1. Les équations bien connues de Navier, de Poisson et de de St.-Venant donnent, si l'on néglige en première approximation les termes quadratiques en $u, \ldots \frac{\partial u}{\partial x} \ldots$:

$$\left.\begin{aligned} \varrho \frac{\partial u}{\partial t} &= X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u, \\ \varrho \frac{\partial v}{\partial t} &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v, \\ \varrho \frac{\partial w}{\partial t} &= Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Nous supposons que u, v, w, les composantes de la vitesse, soient des fonctions uniformes et continues de x, y, z, t dans l'intérieur du fluide considéré, ainsi que leurs dérivées, qui figurent dans le système 1. Quant à X, Y, Z, les composantes de la force extérieure, nous supposons qu'elles soient des fonctions uniformes et continues de x, y, z, t et qu'elles admettent des dérivées continues par rapport à x, y, z, cette dernière hypothèse cependant n'étant pas indispensable.

Le système adjoint du système 1 est:

$$\left.\begin{aligned} -\varrho \frac{\partial u'}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial x} + \mu \Delta u', \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ce système admet les systèmes de solutions suivants:

$$u'_x(r') = -\frac{\partial^2 P(r')}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P(r')}{\partial z^2}, \quad v'_x(r') = \frac{\partial^2 P(r')}{\partial x \partial y},$$

$$w'_x(r') = \frac{\partial^2 P(r')}{\partial x \partial z}, \quad p'_x(r') = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho \frac{\partial P(r')}{\partial t} + \mu \Delta P(r')\right);$$

$$u'_y(r') = \frac{\partial^2 P(r')}{\partial y \partial x}, \quad v'_y(r') = -\frac{\partial^2 P(r')}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P(r')}{\partial z^2},$$

etc., où:

$$P(r') = -\frac{1}{r\sqrt{t_0 - t}} \int_{r'}^{r} e^{-\frac{\varrho \xi^2}{4\mu(t_0-t)}} d\xi,$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

$P(r')$ satisfait à l'équation:

$$\Delta\left(\varrho \frac{\partial P(r')}{\partial t} + \mu \Delta P(r')\right) = 0.$$

Ces systèmes serviront à établir les formules de Green généralisées.

Pour les calculs, les expressions suivantes pour $u'_x(r')$, $v'_x(r')$, $w'_x(r')$, $p'_x(r')$ sont utiles:

$$u'_x(r') = -\frac{\partial^2 P(r')}{\partial r^2}\left(1 - \frac{(x-x_0)^2}{r^2}\right) - \frac{\partial P(r')}{\partial r}\left(\frac{1}{r} + \frac{(x-x_0)^2}{r^3}\right)$$

$$\frac{1}{r^2}\left(3\frac{(x-x_0)^2}{r^2} - 1\right)(P(r') - E(r,t)) + \frac{\varrho}{2\mu}\left(1 - \frac{(x-x_0)^2}{r^2}\right)\frac{E(r,t)}{t_0 - t},$$

$$v'_x(r') = \frac{\partial^2 P(r')}{\partial r^2}\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r^2} - \frac{\partial P(r')}{\partial r}\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r^3} -$$

$$\frac{3(x-x_0)(y-y_0)}{r^4}(P(r') - E(r,t)) - \frac{\varrho}{2\mu}\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r^2}\frac{E(r,t)}{t_0 - t},$$

$$w'_x(r') = \frac{\partial^2 P(r')}{\partial r^2}\frac{(x-x_0)(z-z_0)}{r^2} - \frac{\partial P(r')}{\partial r}\frac{(x-x_0)(z-z_0)}{r^3} =$$

$$3\frac{(x-x_0)(z-z_0)}{r^4}(P(r') - E(r,t)) - \frac{\varrho}{2\mu}\frac{(x-x_0)(z-z_0)}{r^2}\frac{E(r,t)}{t_0 - t},$$

$$p'_x(r') = \frac{x-x_0}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\varrho\frac{\partial P(r')}{\partial t} + \mu\Delta P(r')\right) = \frac{\varrho r'(x-x_0)}{2r^3}\frac{E(r',t)}{t_0 - t}.$$

On a posé ici:

$$E(r,t) = \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t_0-t)}}}{\sqrt{t_0 - t}}.$$

De ces formules on déduit aisément les expressions correspondantes pour $u'_y(r')$ etc.

Soit maintenant pour $t \geq 0$ dans l'intérieur du fluide une surface fermée $S(t)$, en général variable avec le temps. Nous supposons que, dans le voisinage de chaque point de cette surface, on puisse exprimer les coordonnées d'un point

de la surface en fonction de deux paramètres s_1, s_2 et de t par des fonctions $x(s_1, s_2, t)$ etc., continues et douées des dérivées continues par rapport à s_1, s_2 et t. Il existe alors dans chaque point de la surface une normale intérieure déterminée et une vitesse normale correspondante, u_n, de la surface. Désignons par ω la partie du fluide qui se trouve à l'intérieur de $S(t)$ et par $\omega(r')$ la partie de ω qui se trouve à l'exterieur de la surface $r = r'$.

Des systèmes 1 et 2, on obtient l'équation suivante:

$$\varrho \frac{\partial}{\partial t}[u u'_x(r') + v v'_x(r') + w w'_x(r')] = X u'_x(r') + \cdots -$$

$$- u'_x(r') \frac{\partial p}{\partial x} - \cdots + u \frac{\partial p'_x(r')}{\partial x} + \cdots + \mu [u'_x(r') \Delta u + \cdots - u \Delta u'_x(r') - \cdots],$$

valable dans le domaine $\omega(r')$. En appliquant les méthodes de Green, on trouve dans le cas où la sphère $r = r'$ dans l'intervalle $0 \leq t \leq t_0$ est situé dans l'intérieur du domaine ω:

$$\varrho \left\{ \int_{\omega(r')} [u u'_x(r') + v v'_x(r') + w w'_x(r')] d\omega \right\}_{t=t_0} - \varrho \left\{ \int_{\omega(r')} [u u'_x(r') + v v'_x(r') + w w'_x(r')] d\omega \right\}_{t=0} +$$

$$+ \varrho \int_0^{t_0} dt \int_{S(t)} [u u'_x(r') + v v'_x(r') + w w'_x(r')] u_n dS = \int_0^{t_0} dt \int_{\omega(r')} [u'_x(r') X + v'_x(r') Y + w'_x(r') Z] d\omega -$$

$$- \int_0^{t_0} dt \int_{S(t)} \left[u'_x(r') \left(\mu \frac{du}{dn} - p \cos nx \right) + \cdots \right] dS + \int_0^{t_0} dt \int_{S(t)} \left[u \left(\mu \frac{du'_x(r')}{dn} - p'_x(r') \cos nx \right) + \cdots \right] dS -$$

$$- \int_0^{t_0} dt \int_{r=r'} \left[u'_x(r') \left(\mu \frac{du}{dn} - p \cos nx \right) + \cdots \right] dS + \int_0^{t_0} dt \int_{r=r'} \left[u \left(\mu \frac{du'_x(r')}{dn} - p'_x(r') \cos nx \right) + \cdots \right] dS.$$

Cette formule est valable dans tous les cas, si l'on convient à donner à $u'_x(r')$, $v'_x(r')$, $w'_x(r')$, $p'_x(r')$ la valeur zéro à l'extérieur de $S(t)$.

Remarquons que, pour $t = t_0$, $u'_x(r') = v'_x(r') = w'_x(r') = 0$ dans $\omega(r')$. Donc la première intégrale à gauche disparaît.

Supposons maintenant que le point x_0, y_0, z_0 soit pour $t = t_0$ situé à l'intérieur du domaine ω et cherchons dans ce cas la limite des deux dernières intégrales à droite, quand r' tend vers zéro. Soient t_1 une valeur de t (> 0) et $\bar{r}'$ une valeur de r', telles que la sphère $r = r'$ dans l'intervalle $t_1 \leq t \leq t_0$ est située dans l'intérieur de ω et cherchons d'abord la valeur limite des intégrales prises entre les limites t_1 et t_0. On a dans cet intervalle sur la sphère $r = r'$:

$$u'_x(r') = -\frac{1}{r'^2}\left(\frac{3(x-x_0)^2}{r'^2}-1\right)E(r',t)+\frac{\varrho}{2\mu}\left(1-\frac{(x-x_0)^2}{r'^2}\right)\frac{E(r',t)}{t_0-t},$$

$$v'_x(r') = -\frac{3(x-x_0)(y-y_0)}{r'^4}E(r',t)-\frac{\varrho}{2\mu}\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r'^2}\frac{E(r',t)}{t_0-t},$$

$$w'_x(r') = -\frac{3(x-x_0)(z-z_0)}{r'^4}E(r',t)-\frac{\varrho}{2\mu}\frac{(x-x_0)(z-z_0)}{r'^2}\frac{E(r',t)}{t_0-t};$$

puis:

$$\frac{du}{dn}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos nx+\frac{\partial u}{\partial y}\cos ny+\frac{\partial u}{\partial z}\cos nz=\frac{x-x_0}{r'}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{y-y_0}{r'}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{z-z_0}{r'}\frac{\partial u}{\partial z}$$

etc., ou si l'on désigne par $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0$ etc. la valeur de $\frac{\partial u}{\partial x}$ etc. au point x_0, y_0, z_0 et par φ une fonction quelconque de x, y, z, t dont la valeur numérique reste pour $r\leqq r'$, $t_1\leqq t\leqq t_0$ inférieur à un nombre positif, arbitraire, mais fixe, a:

$$\frac{du}{dn}=\frac{x-x_0}{r'}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+\frac{y-y_0}{r'}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0+\frac{z-z_0}{r'}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0+r'\varphi$$

etc.,

$$p=p_0+r'\varphi.$$

Considérons maintenant l'intégrale:

$$\int_{r=r'}\left[u'_x(r')\left(\mu\frac{du}{dn}-p\cos nx\right)+\cdots\right]dS.$$

On voit immédiatement que tous les termes qui contiennent les facteurs $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0$ etc. disparaissent, et l'on obtient une somme de termes des deux types suivants:

$$r'\varphi(r')E(r',t),\quad \frac{r'^3\varphi(r')E(r',t)}{t_0-t}$$

en désignant par $\varphi(r')$ une fonction de r' et t, dont la valeur numérique reste pour $r'\leqq r'$, $t_1\leqq t\leqq t_0$ inférieur à un certain nombre positif a'. On a donc:

$$\int_{t_1}^{t_0}dt\int_{r=r'}\left[u'_x(r')\left(\mu\frac{du}{dn}-p\cos nx\right)+\cdots\right]dS=$$

somme de termes des types suivants:

$$r' \int_{t_1}^{t_0} \varphi(r') E(r', t)\, dt, \quad r'^3 \int_{t_1}^{t_0} \varphi(r') E(r', t) \frac{dt}{t_0 - t}.$$

Je dis que la valeur limite de ces termes est zéro. En effet, on a pour $r' \leqq r'$, $t_1 \leqq t \leqq t_0$:

$$|\varphi(r')| < a'.$$

On a de plus:

$$\int_{t_1}^{t_0} E(r', t)\, dt < \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{\sqrt{t_0 - t}} = 2\sqrt{t_0 - t_1},$$

$$\int_{t_1}^{t_0} E(r', t) \frac{dt}{t_0 - t} = \int_{t_1}^{t_0} e^{-\frac{\varrho r'^2}{4\mu(t_0 - t)}} \frac{dt}{\sqrt{(t_0 - t)^3}} = \frac{1}{r'} \int_0^{t_0 - t_1} e^{-\frac{\varrho r'^2}{4\mu\xi}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3}} < \frac{1}{r'} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\varrho}{4\mu\xi}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3}}.$$

Donc:

$$\lim_{r'=0} r' \int_{t_1}^{t_0} \varphi(r') E(r', t)\, dt = \lim_{r'=0} r'^3 \int_{t_1}^{t_0} \varphi(r') E(r', t) \frac{dt}{t_0 - t} = 0.$$

Par conséquent:

$$\lim_{r'=0} \int_{t_1}^{t_0} dt \int_{r=r'} \left[u'_x(r') \left(\mu \frac{du}{dn} - p \cos nx \right) + \cdots \right] dS = 0.$$

Pour évaluer la valeur limite de l'intégrale:

$$\int_{t_1}^{t_0} dt \int_{r=r'} \left[u \left(\mu \frac{du'_x(r')}{dn} - p'_x(r') \cos nx \right) + \cdots \right] dS$$

nous remarquons que l'on a dans l'intervalle $t_1 \leqq t \leqq t_0$ sur la sphère $r = r'$:

$$\frac{du'_x(r')}{dn} = \frac{\partial u'_x(r')}{\partial r} + \frac{x - x_0}{r'} \frac{\partial u'_x(r')}{\partial x} = \frac{3}{r'^3} \left(\frac{3(x - x_0)^2}{r'^2} - 1 \right) E(r', t) +$$

$$+ \frac{\varrho}{2\mu r'} \left(\frac{3(x - x_0)^2}{r'^2} - 1 \right) \frac{E(r', t)}{t_0 - t} - \frac{\varrho^2 r'}{4\mu^2} \left(1 - \frac{(x - x_0)^2}{r'^2} \right) \frac{E(r', t)}{(t_0 - t)^2},$$

$$\frac{dv'_x(r')}{dn} = \frac{\varrho(x-x_0)(y-y_0)}{r'^5} E(r', t) + \frac{3\varrho(x-x_0)(y-y_0)}{2\mu r'^3} \frac{E(r', t)}{t_0 - t} +$$

$$+ \frac{\varrho^2(x-x_0)(y-y_0)}{4\mu^2 r'} \frac{E(r', t)}{(t_0-t)^2},$$

$$\frac{dw'_x(r')}{dn} = \frac{\varrho(x-x_0)(z-z_0)}{r'^5} E(r', t) + \frac{3\varrho(x-x_0)(z-z_0)}{2\mu r'^3} \frac{E(r', t)}{t_0 - t} +$$

$$+ \frac{\varrho^2(x-x_0)(z-z_0)}{4\mu^2 r'} \frac{E(r', t)}{(t_0-t)^2},$$

$$p'_x(r') = \frac{\varrho(x-x_0)}{2r'^2} \frac{E(r', t)}{t_0 - t},$$

$$u = u_0 + (x-x_0)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + (y-y_0)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + (z-z_0)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 + r'^2 q$$

etc. Tous les termes de l'intégrale:

$$\int_{r=r'} \left[u\left(\mu \frac{du'_x(r')}{dn} - p'_x(r') \cos nx\right) + \cdots \right] dS$$

provenant de ces expressions et contenant les facteurs v_0, w_0 ou $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0$ etc. disparaissent, comme on le voit sans peine en observant que

$$\int_{r=r'} (x-x_0)^2 dS = \int_{r=r'} (y-y_0)^2 dS = \int_{r=r'} (z-z_0)^2 dS = \frac{r'^2}{3} \int_{r=r'} dS,$$

$$\int_{r=r'} (x-x_0)(y-y_0) dS = 0, \quad \int_{r=r'} (x-x_0)^2 (y-y_0) dS = 0 \text{ etc.}$$

Les termes qui contiennent u_0 donnent:

$$-\frac{\varrho^2 r' u_0}{4\mu} \frac{E(r', t)}{(t_0-t)^2} \int_{r=r'} \left(1 - \frac{(x-x_0)^2}{r'^2}\right) dS - \frac{\varrho u_0}{2r'^3} \frac{E(r', t)}{t_0 - t} \int_{r=r'} (x-x_0)^2 dS =$$

$$\frac{2\pi\varrho^2 r'^3 u_0}{3\mu} \frac{E(r', t)}{(t_0-t)^2} - \frac{2\pi\varrho r' u_0}{3} \frac{E(r', t)}{t_0 - t}.$$

Nous avons donc:

$$\int_{r'}\left[u\left(\mu\frac{d\,u'_x(r')}{dn}-p'_x(r')\cos nx\right)+\cdots\right]dS=$$

$$-\frac{2\pi\varrho^2 r'^3 u_0 E(r',t)}{3\mu(t_0-t)^2}-\frac{2\pi\varrho r' u_0 E(r',t)}{3(t_0-t)},$$

somme de termes des types:

$$r'\varphi(r')E(r',t),\quad \frac{r'^3\varphi(r')E(r',t)}{t_0-t},\quad \frac{r'^5\varphi(r')E(r',t)}{(t_0-t)^2}.$$

Cherchons maintenant la valeur limite de l'intégrale:

$$\int_{t_1}^{t_0}dt\int_{r'}\left[u\left(\mu\frac{d\,u'_x(r')}{dn}-p'_x(r')\cos nx\right)+\cdots\right]dS.$$

Les termes du type:

$$r'\varphi(r')E(r',t)\ \text{etc.}$$

de notre intégrale de surface donnent des termes, s'évanouissant avec r'. Les deux premiers termes de cette intégrale convergent dans l'intervalle $t_1\leq t\leq t_0-\varepsilon$ (ε arbitrairement petit, plus grand que zéro) uniformément vers zéro. Donc:

$$\lim_{r'=0}\int_{t_1}^{t_0}dt\int_{r=r'}\left[u\left(\mu\frac{d\,u'_x(r')}{dn}-p'_x(r')\cos nx\right)+\cdots\right]dS=$$

$$-\frac{2\pi\varrho}{3}\lim_{r'=0}\left[\frac{\varrho r'^3}{\mu}\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0}\frac{u_0E(r',t)\,dt}{(t_0-t)^2}+r'\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0}\frac{u_0E(r',t)\,dt}{t_0-t}\right]=$$

$$-\frac{2\pi\varrho}{3}u(x_0,y_0,z_0,t_0)\lim_{r'=0}\left[\frac{\varrho r'^3}{\mu}\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0}E(r',t)\frac{dt}{(t_0-t)^2}+r'\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0}E(r',t)\frac{dt}{t_0-t}\right]+$$

$$+\frac{2\pi\varrho}{3}\lim_{r'=0}\left[\frac{\varrho r'^3}{\mu}\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0}(u(x_0,y_0,z_0,t_0)-u_0)E(r',t)\frac{dt}{(t_0-t)^2}+\right.$$

$$\left.+r'\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0}(u(x_0,y_0,z_0,t_0)-u_0)E(r',t)\frac{dt}{t_0-t}\right].$$

Un calcul facile montre que:

$$\frac{2\pi\varrho}{3}\lim_{r'=0}\left[\varrho r'^3\int_{t_0-t}^{t_0}E(r',t)\frac{dt}{(t_0-t)^2}+r'\int_{t_0-t}^{t_0}E(r',t)\frac{dt}{t_0-t}\right]=4\pi V\mu\varrho\pi.$$

On a donc:

$$\left|\lim_{r'=0}\int_{t_1}^{t_0}dt\int_{r=r'}\left[u\left(\mu\frac{du'_x(r')}{dn}-p'_x(r')\cos nx\right)+\cdots\right]dS+4\pi V\mu\varrho\pi\,u(x_0,y_0,z_0,t_0)\right|$$

$$4\pi V\mu\varrho\pi\delta$$

δ désignant la plus grande valeur de $|u(x_0,y_0,z_0,t_0)-u_0|$ dans l'intervalle $t_0-\varepsilon\leqq t\leqq t_0$. ε et par conséquent δ étant aussi petits que l'on voudra on voit que:

$$\lim_{r'=0}\int_{t_1}^{t_0}dt\int_{r=r'}\left[u\left(\mu\frac{du'_x(r')}{dn}-p'_x(r')\cos nx\right)+\cdots\right]dS=$$

$$-4\pi V\mu\varrho\pi\,u(x_0,y_0,z_0,t_0).$$

Des calculs précédents, on conclut aussi que la valeur limite de nos intégrales prises entre les limites o et t_1 est zéro. Nous avons donc obtenu la formule suivante:

$$\left.\begin{aligned}4\pi V\mu\varrho\pi\,u(x_0,y_0,z_0,t_0)=\lim_{r'=0}\Bigg[&\varrho\left\{\int_{\omega(r')}[u\,u'_x(r')+v\,v'_x(r')+\right.\\&\left.+w\,w'_x(r')]d\omega\right\}_{t=0}-\varrho\int_0^{t_0}dt\int_{S(t)}[u\,u'_x(r')+v\,v'_x(r')+w\,w'_x(r')]u_n dS+\\&+\int_0^{t_0}dt\int_{\omega(r')}[u'_x(r')X+v'_x(r')Y+w'_x(r')Z]d\omega-\int_0^{t_0}dt\int_{S(t)}\left[u'_x(r')\left(\mu\frac{du}{dn}-\right.\right.\\&\left.\left.-p\cos nx\right)+\cdots\right]dS+\int_0^{t_0}dt\int_{S(t)}\left[u\left(\mu\frac{du'_x(r')}{dn}-p'_x(r')\cos nx\right)+\cdots\right]dS\Bigg].\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Pour plus de simplicité, nous désignons par u'_x, v'_x etc. les valeurs limites de $u'_x(r')$ etc., quand r' tend vers zéro. Nous remarquons que la conver-

gence vers ces limites est uniforme dans la partie de ω, définie par les inégalités:

$$t_0 - t > \delta, \quad r > r' \quad (\delta > 0,\ r' > 0).$$

On peut d'ailleurs déterminer deux nombres positifs a_1 et a_2 tels que l'on ait pour $r' > 0$, $t_0 - t \geq 0$, $\frac{\varrho r^2}{4\mu} + t_0 - t > 0$:

$$|u'_x(r')|,\ |v'_x(r')|,\ |w'_x(r')| < \frac{a_1}{r^2\sqrt{t_0 - t}} + \frac{a_2 E(r,t)}{t_0 - t}.$$

Comme:

$$\frac{r^2}{t_0 - t}\, e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t_0 - t)}}$$

reste pour $r > 0$, $t_0 - t \geq 0$ inférieur à une certaine quantité positive, on conclut que l'on peut trouver une quantité positive a_3 telle que l'on ait pour $r' \geq 0$, $t_0 - t \geq 0$, $\frac{\varrho r^2}{4\mu} + t_0 - t > 0$:

$$|u'_x(r')|,\ |v'_x(r')|,\ |w'_x(r')| < \frac{a_3}{r^2\sqrt{t_0 - t}}. \tag{4}$$

Il résulte de ces inégalités qu'on peut déterminer une quantité positive a_4 telle que l'on ait pour $r' \geq 0$:

$$\left| \int_{r'' < r < r'} u'_x(r') X\, d\omega \right| < \frac{a_4 r'}{\sqrt{t_0 - t}} \operatorname*{Max}_{0 < r < r'} |X|.$$

etc. Ces remarques suffisent pour montrer que l'on a:

$$\lim_{r'=0} \varrho \left\{ \int_{\omega(r')} [u u'_x(r') + \cdots]\, d\omega \right\}_{t=0} = \varrho \left\{ \int_{\omega} (u u'_x + \cdots)\, d\omega \right\}_{t=0}.$$

Considérons maintenant l'intégrale:

$$\int_{t_0 - t}^{t_0} dt \int_{\omega(r')} [u'_x(r') X + v'_x(r')\, Y + w'_x(r')\, Z]\, d\omega.$$

Des inégalités précédentes, on conclut que cette intégrale a pour $r' \geq 0$ une valeur déterminée et qu'on peut trouver une quantité positive a_5 telle que la

valeur absolue de l'intégrale soit pour $r' > 0$ plus petite que $a_5 \sqrt{\varepsilon}$. Cela posé, je dis que:

$$\lim_{r'=0} \int_0^{t_0} dt \int_{\omega(r')} (u'_x(r')\,X + v'_x(r')\,Y + w'_x(r')\,Z)\,d\omega = \int_0^{t_0} dt \int_{\omega} (u'_x X + v'_x Y + w'_x Z)\,d\omega .$$

En d'autres termes, δ étant une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, je dis que l'on peut déterminer un nombre positif r'', tel que l'inégalité $r' < r''$ entraîne l'inégalité:

$$\left| \int_0^{t_0} dt \int_{\omega(r')} (u'_x(r')\,X + \cdots)\,d\omega - \int_0^{t_0} dt \int_{\omega} (u'_x X + \cdots)\,d\omega \right| < \delta .$$

Choisissons à cet effet une quantité positive $\varepsilon < t_0$ et $< \dfrac{\delta^2}{25\,a_5^{\,2}}$. Déterminons une quantité positive r' telle que:

$$24\,\pi\,a_3 \sqrt{t_0 - \varepsilon}\,\overline{r'} \operatorname*{Max}_{\omega} \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} < \frac{\delta}{5} .$$

Déterminons enfin la quantité positive $r'' \leq r'$ telle que l'inégalité $r' < r''$ entraîne l'inégalité suivante:

$$\left| \int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{\omega(r')} (u'_x(r')\,X + \cdots)\,d\omega - \int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{\omega(r')} (u'_x X + \cdots)\,d\omega \right| < \frac{\delta}{5} .$$

Comme on a pour $r' < \overline{r'}$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_0} dt \int_{\omega(r')} (u'_x(r')\,X + \cdots)\,d\omega - \int_0^{t_0} dt \int_{\omega} (u'_x X + \cdots)\,d\omega = \\
&\int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{\omega(r')} (u'_x(r')\,X + \cdots)\,d\omega - \int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{\omega(\overline{r'})} (u'_x X + \cdots)\,d\omega + \\
&+ \int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{r'<r<\overline{r'}} (u'_x(r')\,X + \cdots)\,d\omega - \int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{0\leq r\leq \overline{r'}} (u'_x X + \cdots)\,d\omega + \\
&+ \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} dt \int_{\omega(r')} (u'_x(r')\,X + \cdots)\,d\omega - \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} dt \int_{\omega} (u'_x X + \cdots)\,d\omega
\end{aligned}$$

et comme pour $0 \leq r' < r''$:

$$\left| \int_0^{t_0-t} dt \int_{r'<r<r''} (u'_x(r')\,X + \cdots)\,d\omega \right| < 24\pi a_3 \sqrt{t_0 - t}\, \varepsilon\, r'' \operatorname{Max} \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} < \frac{\delta}{5},$$

$$\left| \int_{t_0-t}^{t_0} dt \int_{\omega(r')} (u'_x(r')\,X + \cdots)\,d\omega \right| < a_5 \sqrt{\varepsilon} < \frac{\delta}{5},$$

on conclut que:

$$\left| \int_0^{t_0} dt \int_{\omega(r')} (u'_x(r')\,X + \cdots)\,d\omega - \int_0^{t_0} dt \int_{\omega} (u'_x X + \cdots)\,d\omega \right| < \delta$$

si $r' < r''$.

Passons aux intégrales de surface de notre formule 3.

On a, ε étant une quantité positive $< t_0$, à cause de la convergence uniforme de $u'_x(r')$ etc. vers u'_x etc. dans le domaine, défini par les inégalités: $t_0 - t > \delta$, $r > r'$, $\delta > 0$, $r' > 0$:

$$\lim_{r'=0} \Big\{ -\varrho \int_0^{t_0-t} dt \int_{S(t)} [u\,u'_x(r') + v\,v'_x(r') + w\,w'_x(r')]\,u_n\,dS -$$

$$- \mu \int_0^{t_0-t} dt \int_{S(t)} \left[u'_x(r') \left(\mu \frac{du}{dn} - p\cos nx \right) + \cdots \right] dS + \mu \int_0^{t_0-t} dt \int_{S(t)} \left(u \frac{du'_x(r')}{dn} + \cdots \right) dS \Big\} =$$

$$- \int_0^{t_0-t} dt \int_{S(t)} \left[u'_x \left(\mu \frac{du}{dn} - p\cos nx + \varrho\, u\, u_n \right) + \cdots \right] dS + \mu \int_0^{t_0-t} dt \int_{S(t)} \left(u \frac{du'_x}{dn} + \cdots \right) dS.$$

Les inégalités 4 montrent de plus que, δ étant une quantité positive, aussi petite que l'on veut, on peut toujours prendre ε assez petit pour que:

$$\left| \varrho \int_{t_0-t}^{t_0} dt \int_{S(t)} (u\,u'_x(r') + \cdots)\,u_n\,dS + \int_{t_0-t}^{t_0} dt \int_{S(t)} \left[u'_x(r') \left(\mu \frac{du}{dn} - p\cos nx \right) + \cdots \right] dS - \right.$$

$$\left. - \mu \int_{t_0-t}^{t_0} dt \int_{S(t)} \left(u \frac{du'_x(r')}{dn} + \cdots \right) dS \right| < \delta$$

pour $r' > 0$. Donc:

$$\lim_{r'=0} \Big\{ -\varrho \int_0^{t_0} dt \int_{S(t)} (u u'_x(r') + \cdots) u_n dS - \int_0^{t_0} dt \int_{S(t)} \Big[u'_x(r') \Big(\mu \frac{du}{dn} - p \cos nx \Big) + \cdots \Big] dS + \mu \int_0^{t_0} dt \int_{S(t)} \Big(u \frac{du'_x(r')}{dn} + \cdots \Big) dS \Big\} =$$

$$- \int_0^{t_0} dt \int_{S(t)} \Big[u'_x \Big(\mu \frac{du}{dn} - p \cos nx + \varrho u u_n \Big) + \cdots \Big] dS + \mu \int_0^{t_0} dt \int_{S(t)} \Big(u \frac{du'_x}{dn} + \cdots \Big) dS.$$

Pour calculer la valeur limite de la dernière intégrale de notre formule 3, nous considérons d'abord l'intégrale suivante:

$$r' \int_0^{t_0} f(t) E(r', t) \frac{dt}{t_0 - t},$$

où l'on suppose que $f(t)$ soit une fonction continue de t. La fonction:

$$\frac{r' E(r', t)}{t_0 - t} = \frac{r' e^{-\frac{\varrho r'^2}{4\mu(t_0 - t)}}}{\sqrt{(t_0 - t)^3}}$$

converge pour $t_0 - t > \delta$ ($\delta > 0$) uniformément vers zéro avec r'. Nous avons donc:

$$\lim_{r'=0} r' \int_0^{t_0} f(t) E(r', t) \frac{dt}{t_0 - t} = \lim_{r'=0} r' \int_{t_0 - \delta}^{t_0} f(t) E(r', t) \frac{dt}{t_0 - t}$$

$$\lim_{r'=0} \Big\{ f(t_0) r' \int_{t_0 - \delta}^{t_0} E(r', t) \frac{dt}{t_0 - t} + r' \int_{t_0 - \delta}^{t_0} (f(t) - f(t_0)) E(r', t) \frac{dt}{t_0 - t} \Big\}.$$

Comme on a:

$$r' \int_{t_0 - \delta}^{t_0} E(r', t) \frac{dt}{t_0 - t} = \int_{t_0 - \delta}^{t_0} \frac{r' e^{-\frac{\varrho r'^2}{4\mu(t_0 - t)}}}{\sqrt{(t_0 - t)^3}} dt = 2 \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} \int_{r' \sqrt{\frac{\varrho}{\mu \delta}}}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}} d\xi$$

et comme la valeur maximum de $|f(t) - f(t_0)|$ dans l'intervalle $t_0 - \delta \leq t < t_0$ tend vers zéro avec δ, nous avons:

$$\left| \lim_{r'=0} r' \int_0^{t_0} f(t)\, E(r', t) \frac{dt}{t_0 - t} - 2 \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} f(t_0) \int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}} d\xi \right| < \varepsilon(\delta),$$

$\varepsilon(\delta)$ tendant vers zéro avec δ. Donc, enfin:

$$\lim_{r'=0} r' \int_0^{t_0} f(t)\, E(r', t) \frac{dt}{t_0 - t} = 2 \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} f(t_0) \int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}} d\xi = 2 \sqrt{\frac{\mu \pi}{\varrho}} \cdot f(t_0).$$

En appliquant cette formule à l'intégrale:

$$-\int_0^{t_0} dt \int_{S(t)} p'_x(r')\,(u \cos nx + \cdots)\, dS = -\frac{\varrho r'}{2} \int_0^{t_0} E(r', t) \frac{dt}{t_0 - t} \int_{S(t)} (u \cos nx + \cdots) \frac{x - x_0}{r^3} dS$$

nous obtenons:

$$\lim_{r'=0} -\int_0^{t_0} dt \int_{S(t)} p'_x(r')\,(u \cos nx + \cdots)\, dS =$$

$$-\sqrt{\mu \varrho \pi} \int_{S(t_0)} (u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz) \frac{x - x_0}{r^3} dS.$$

Nous avons donc:

$$4\pi \sqrt{\mu \varrho \pi}\, u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \varrho \left\{ \int_\omega (u u'_x + v v'_x + w w'_x)\, u_n dS \right\}_{t=0} +$$

$$+ \int_0^{t_0} dt \int_\omega (u'_x X + v'_x Y + w'_x Z)\, d\omega - \int_0^{t_0} dt \int_{S(t)} \left[u'_x \left(\mu \frac{du}{dn} - p \cos nx + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \varrho u u_n \right) + \cdots \right] dS + \mu \int_0^{t_0} dt \int_{S(t)} \left(u \frac{du'_x}{dn} + v \frac{dv'_x}{dn} + w \frac{dw'_x}{dn} \right) dS -$$

$$- \sqrt{\mu \varrho \pi} \int_{S(t_0)} (u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz) \frac{x - x_0}{r^3} dS.$$

On obtient par des permutations des lettres deux formules analogues, exprimant $v(x_0, y_0, z_0, t_0)$ et $w(x_0, y_0, z_0, t_0)$ par les valeurs de u, v, w pour $t = 0$ et par les valeurs de $u, \ldots, \frac{du}{dn}, \ldots, p$ sur la frontière $S(t)$.

Pour compléter notre système de formules, il faut exprimer $p(x_0, y_0, z_0, t_0)$ par les mêmes quantités. On parvient à ce but par une application nouvelle de la formule:

$$\varrho\left\{\int_{\omega(r')}(u u'_{r'}+\cdots)\,d\omega\right\}_{t=t_0}-\varrho\left\{\int_{\omega(r')}(u u'_{r'}+\cdots)\,d\omega\right\}_{t=0}+$$

$$+\varrho\int_0^{t_0}dt\int_{S(t)}(u u'_{r'}+\cdots)\,u_n\,dS=\int_0^{t_0}dt\int_{\omega(r')}(u'_{r'}X+\cdots)\,d\omega-$$

$$-\int_0^{t_0}dt\int_{S(t)}\left[u'_{r'}\left(\mu\frac{du}{dn}-p\cos nx\right)+\cdots\right]dS+\int_0^{t_0}dt\int_{S(t)}\left[u\left(\mu\frac{du'_{r'}}{dn}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-p'_{r'}\cos nx\right)+\cdots\right]dS-\int_0^{t_0}dt\int_{r=r'}\left[u'_{r'}\left(\mu\frac{du}{dn}-p\cos nx\right)+\cdots\right]dS+$$

$$+\int_0^{t_0}dt\int_{r=r'}\left[u\left(\mu\frac{du'_{r'}}{dn}-p'_{r'}\cos nx\right)+\cdots\right]dS,$$

valable si $u'_{r'}$, $v'_{r'}$, $w'_{r'}$, $p'_{r'}$ sont des fonctions de x, y, z, t, régulières (dans le sens indiqué p. 206) dans le domaine $\omega(r')$ et y satisfaisant au système 2.

Posons:

$$u'_{r'}=\frac{\varrho r' E(r',t)}{2(t_0-t)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right),\quad v'_{r'}=\frac{\varrho r' E(r',t)}{2(t_0-t)}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$w'_{r'}=\frac{\varrho r' E(r',t)}{2(t_0-t)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right),\quad p'_{r'}=\frac{\varrho^2 r'}{2r}\frac{\partial E(r',t)}{\partial t}\Big|_{t=t_0},$$

et faisons dans notre équation r' tendre vers zéro. Commençons de nouveau par l'évaluation de la valeur limite des deux dernières intégrales.

En posant comme plus haut:

$$\frac{du}{dn}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0\cos nx+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\cos ny+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0\cos nz+r'\varphi$$

etc.,

$$p=p_0+r'\varphi$$

nous voyons d'abord que, dans la première de ces intégrales, tous les termes contenant $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0$, $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0$, $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0$, $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0$ disparaissent. Des autres termes,

nous obtenons dans le cas le plus simple, où le point x_0, y_0, z_0 est situé dans ω dans l'intervalle $0 \leq t \leq t_0$ tout entier:

$$\frac{2\pi\varrho\mu}{3}\int_0^{t_0}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0\right\}\frac{E(r',t)}{t_0-t}\,dt-$$

$$-2\pi\varrho r'\int_0^{t_0}p_0\,E(r',t)\frac{dt}{t_0-t}+r'^2\int_0^{t_0}\varphi(r')\,E(r',t)\frac{dt}{t_0-t}.$$

Comme:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0=0$$

la valeur limite de cette expression est:

$$-4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}\,p(x_0,y_0,z_0,t_0),$$

resultat, valable évidemment aussi dans le cas général où l'on suppose seulement que le point x_0, y_0, z_0 soit situé, pour $t=t_0$, dans l'intérieur de ω. On trouve de la même manière que la dernière intégrale à droite s'évanouit avec r'. Donc:

$$4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}\,p(x_0,y_0,z_0,t_0)=\lim_{r'=0}\left[\varrho\left\{\int_{\omega(r')}(u\,u'_{r'}+\cdots)\,d\omega\right\}_{t=0}-\right.$$

$$-\varrho\int_0^{t_0}dt\int_{S(t)}(u\,u'_{r'}+\cdots)\,u_n\,dS+\int_0^{t_0}dt\int_{\omega(r')}(u'_{r'}X+\cdots)\,d\omega-$$

$$\left.-\int_0^{t_0}dt\int_{S(t)}\left[u'_{r'}\left(\mu\frac{du}{dn}-p\cos nx\right)+\cdots\right]dS+\int_0^{t_0}dt\int_{S(t)}\left[u\left(\mu\frac{du'_{r'}}{dn}-p'_{r'}\cos nx\right)+\cdots\right]dS\right].$$

Pour calculer le membre droit de cette équation, nous remarquons d'abord que $u'_{r'}$, $v'_{r'}$, $w'_{r'}$, $p'_{r'}$ dans l'intervalle $0\leq t\leq t_0-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ et pour $r>r'$ $(r'>0)$ convergent uniformément vers zéro avec r' et qu'il existe un nombre positif a_6 tel que pour $r>0$, $r'\geq 0$, $t_0-t\geq 0$:

$$|u'_{r'}|,\ |v'_{r'}|,\ |w'_{r'}|<\frac{a_6}{r^2\sqrt{(t_0-t)^3}}.$$

On conclut de ces remarques que:

$$\lim_{r'=0} \varrho \left| \int_{\omega(r')} (u u'_{r'} + \cdots) d\omega \right|_{t=0} = 0.$$

Pour trouver la valeur limite de:

$$-\varrho \int_0^{t_0} dt \int_{S(t)} (u u'_{r'} + \cdots) u_n dS + \int_0^{t_0} dt \int_{\omega(r')} (u'_{r'} X + \cdots) d\omega$$

$$-\int_0^{t_0} dt \int_{S(t)} \left[u'_{r'} \left(\mu \frac{du}{dn} - p \cos nx \right) + \cdots \right] dS + \mu \int_0^{t_0} dt \int_{S(t)} \left(u \frac{du'_{r'}}{dn} + \cdots \right) dS$$

nous nous appuyons sur l'égalité:

$$\lim_{r'=0} \frac{\varrho r'}{2} \int_0^{t_0} f(t) E(r', t) \frac{dt}{t_0 - t} = V_{\mu \varrho \pi} f(t_0)$$

et nous obtenons:

$$V_{\mu \varrho \pi} \left[\int_{\omega} \left(X \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) + Y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) + Z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \right) d\omega - \int_{S(t)} \left[\left(\mu \frac{du}{dn} - \right. \right. \right.$$

$$\left. - p \cos nx + \varrho u u_n \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) + \cdots \Big] dS + \mu \int_{S(t)} \left(u \frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) + \right.$$

$$\left. + v \frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) + w \frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \right) dS \Big]_{t=t_0}.$$

Enfin, pour calculer:

$$\lim_{r'=0} - \int_0^{t_0} dt \int_{S(t)} (u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz) p'_{r'} dS =$$

$$\lim_{r'=0} - \frac{\varrho^2 r'}{2} \int_0^{t_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E(r', t)}{t_0 - t} \right) dt \int_{S(t)} (u \cos nx + \cdots) \frac{dS}{r}$$

nous faisons une intégration par parties, ce qui donne:

$$\varrho^2 r' \frac{E(r', 0)}{2 t_0} \int_{S(0)} (u \cos nx + \cdots) \frac{dS}{r} + \frac{\varrho^2 r'}{2} \int_0^{t_0} E(r', t) \frac{dt}{t_0 - t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_{S(t)} (u \cos nx + \cdots) \frac{dS}{r}.$$

La valeur limite est donc:

$$\varrho V_{\mu\varrho\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S(t)}(u\cos nx+\cdots)\frac{dS}{r}\right\}_{t=t_0}.$$

Nous avons donc obtenu la formule suivante:

$$\begin{aligned}4\pi p(x_0,y_0,z_0,t_0)=&\Big[\int\limits_{\omega}\Big(X\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{r}\Big)+\cdots\Big)d\omega-\int\limits_{S(t)}\Big[\Big(\mu\frac{du}{dn}-\\&-p\cos nx+\varrho u u_n\Big)\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{r}\Big)+\cdots\Big]dS+\mu\int\limits_{S(t)}\Big(u\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{r}\Big)+\\&+\cdots\Big)dS+\varrho\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S(t)}(u\cos nx+\cdots)\frac{dS}{r}\Big]_{t=t_0}.\end{aligned}$$

En changeant un peu nos notations, nous pouvons résumer nos resultats dans le théorème suivant:

Si, dans un domaine $\omega(t)$ borné par la surface $S(t)$, u, v, w, p sont des fonctions uniformes et continues de x, y, z, t ainsi que leurs dérivées qui figurent dans le système 1 et s'ils satisfont à ce système, où X, Y, Z désignent des fonctions uniformes et continues de x, y, z, t, alors on a, x, y, z étant les coordonnées d'un point situé au moment t $(t_0<t)$ dans l'intérieur du domaine $\omega(t)$:

$$\left.\begin{aligned}4\pi V_{\mu\overline{\varrho\pi}}u(x,y,z,t)=&\varrho\int\limits_{\omega(t_0)}(u(\xi,\eta,\zeta,t_0)u'_\xi+v(\xi,\eta,\zeta,t_0)v'_\xi+\\&+w(\xi,\eta,\zeta,t_0)w'_\xi)_{\tau=t_0}d\omega+\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\int\limits_{\omega(\tau)}(u'_\xi X(\xi,\eta,\zeta,\tau)+\\&+v'_\xi Y(\xi,\eta,\zeta,\tau)+w'_\xi Z(\xi,\eta,\zeta,\tau))d\omega-\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\int\limits_{S(\tau)}\Big[u'_\xi\Big(\mu\frac{du}{dn}-\\&-p\cos nx+\varrho u u_n\Big)+\cdots\Big]dS+\mu\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\int\limits_{S(\tau)}\Big(u\frac{du'_\xi}{dn}+\cdots\Big)dS-\\&-V_{\overline{\mu\varrho\pi}}\int\limits_{S(t)}(u\cos nx+\cdots)\frac{\xi-x}{r^3}dS,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right|\qquad(5)$$

$$\left.\begin{aligned} 4\pi p(x,y,z,t) &= \int_{\omega(t)} \left(X(\xi,\eta,\zeta,t)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right)+\cdots\right)d\omega - \\ &- \int_{S(t)} \left[\left(\mu\frac{du}{dn}-p\cos nx+\varrho u u_n\right)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right)+\cdots\right]dS + \\ &+ \mu\int_{S(t)}\left[u\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right)+\cdots\right]dS+\varrho\frac{\partial}{\partial t}\int_{S(t)}(u\cos nx+\cdots)\frac{dS}{r}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

On a dans ces formules:

$$u'_\xi = -\frac{\partial^2 P}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial\zeta^2},\quad v'_\xi=\frac{\partial^2 P}{\partial\xi\,\partial\eta},\quad w'_\xi=\frac{\partial^2 P}{\partial\xi\,\partial\zeta},\quad u'_\eta=\frac{\partial^2 P}{\partial\xi\,\partial\eta}\ \text{etc.}$$

$$P=\frac{1}{r}\int_0^r E(\alpha,\tau,t)\,d\alpha,$$

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},\quad E(\alpha,\tau,t)=\frac{e^{-\frac{\varrho\alpha^2}{4\mu(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}},$$

$$d\omega=d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

$$\frac{d}{dn}=\cos nx\frac{\partial}{\partial\xi}+\cos ny\frac{\partial}{\partial\eta}+\cos nz\frac{\partial}{\partial\zeta},$$

n étant la normale intérieure de la surface $S(t)$. Dans les intégrales de surface, u, v, w, p doivent être pris pour les arguments ξ, η, ζ, τ, ξ, η, ζ désignant les coordonnées d'un point de la surface $S(t)$, dont dS est un élement. P et par conséquent u'_ξ etc. satisfont à l'équation:

$$\varrho\frac{\partial P}{\partial t}+\mu\left(\frac{\partial^2 P}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial\zeta^2}\right)=0.$$

2. Nous nous proposons dans ce paragraphe de montrer que, $u(\xi,\eta,\zeta,t_0)$, $v(\xi,\eta,\zeta,t_0)$, $w(\xi,\eta,\zeta,t_0)$ étant des fonctions données et continues de ξ, η, ζ dans le domaine $\omega(t_0)$ et $u, v, w, \frac{du}{dn}, \frac{dv}{dn}, \frac{dw}{dn}, p$, étant des fonctions données et continues des points de la surface $S(\tau)$ et de τ, les fonctions u, v, w, p de x, y, z, t, définies par les formules 5, dans l'intérieur du domaine $\omega(t)$ et pour $t>t_0$ satisfont au système 1. Nous montrerons de plus que:

$$\lim_{r=0,\,t=t_0} u(x,y,z,t)=u(\xi,\eta,\zeta,t_0)$$

etc., pourvu que $u(\xi, \eta, \zeta, t_0)$ etc. admettent des dérivées continues (à l'exception, peut-être, d'un certain nombre de surfaces de discontinuité) par rapport à ξ, η, ζ, satisfaisant à l'équation:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0.$$

Nous démontrerons ces théorèmes par une étude successive des différents termes des membres droits de nos formules.

$u'_\xi, u'_\eta, u'_\zeta; v'_\xi, v'_\eta, v'_\zeta; w'_\xi, w'_\eta, w'_\zeta$, considérés comme des fonctions de x, y, z, t satisfont au système 1, si l'on y pose $X = Y = Z = 0$, $p = 0$. Les fonctions:

$$\varrho \int_{\omega(t_0)} (u(\xi, \eta, \zeta, t_0)\, u'_\xi + \cdots)\, d\omega, \quad \varrho \int_{\omega(t_0)} (u(\xi, \eta, \zeta, t_0)\, u'_\eta + \cdots)\, d\omega,$$

$$\varrho \int_{\omega(t_0)} (u(\xi, \eta, \zeta, t_0)\, u'_\zeta + \cdots)\, d\omega$$

ont donc la même propriété, du moins dans le cas considéré jusqu'ici, où le domaine désigné par $\omega(t)$ est une partie finie de l'espace. Si les fonctions $u(\xi, \eta, \zeta, t_0)$ etc. sont douées des dérivées continues par rapport à ξ, η, ζ, on peut transformer ces expressions par des intégrations par parties. On a:

$$u'_\xi = -\frac{\varrho}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2}, \quad v'_\xi = \frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial \eta}, \quad w'_\xi = \frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial \zeta}.$$

On obtient donc:

$$\frac{\varrho^2}{\mu} \int_{\omega(t_0)} u(\xi, \eta, \zeta, t_0) \frac{\partial P}{\partial x}\, d\omega - \varrho \int_{\omega(t_0)} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta}\right) \frac{\partial P}{\partial \xi}\, d\omega - \varrho \int_{S(t_0)} (u \cos nx + \cdots) \frac{\partial P}{\partial \xi}\, dS$$

etc. Cela se réduit, si:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0,$$

à:

$$\frac{\varrho^2}{\mu} \int_{\omega(t_0)} u(\xi, \eta, \zeta, t_0) \frac{\partial P}{\partial x}\, d\omega - \varrho \int_{S(t_0)} (u \cos nx + \cdots) \frac{\partial P}{\partial \xi}\, dS$$

etc.

Nous calculons les valeurs limites de ces fonctions quand t tend vers t_0 et le point x, y, z en même temps vers le point ξ', η', ζ', situé dans l'intérieur du domaine $\omega(t_0)$. On a dans la première intégrale:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{E(r, t_0, t)}{2(t-t_0)} = \frac{1}{2}\frac{e^{-\frac{\mu r^2}{4\mu(t-t_0)}}}{\sqrt{(t-t_0)^3}}.$$

En s'appuyant sur les propriétés connues de cette fonction, on trouve:

$$\lim \int_{\omega(t_0)} u(\xi, \eta, \zeta, t_0) \frac{\partial P}{\partial t}\, d\omega = 4\pi \sqrt{\mu\varrho\, r}\, u(\xi', \eta', \zeta', t_0)$$

Dans la seconde intégrale on a:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \int_0^t E(\alpha, t_0, t)\, d\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{E(r, t_0, t)}{t-t_0}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right)$$

t tendant vers t_0, l'intégrale:

$$\int_0^t E(\alpha, t_0, t)\, d\alpha,$$

pour $r > \delta$ ($\delta > 0$), tend uniformément vers la valeur $\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}$. La fonction

$$\frac{E(r, t_0, t)}{r(t-t_0)}$$

tend sous les mêmes conditions uniformément vers zéro. La valeur limite de notre intégrale est donc:

$$-\sqrt{\mu\varrho\, r} \int_{S(t_0)} (u\cos nx + \cdots) \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) dS \qquad r = r'$$

et les valeurs limites de nos trois fonctions sont:

$$4\pi\sqrt{\mu\varrho\, r}\, u(\xi', \eta', \zeta', t_0) - \sqrt{\mu\varrho\, r} \int_{S(t_0)} (u\cos nx + \cdots) \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) dS$$

etc. Cherchons maintenant quelles conditions restrictives on est amené à introduire dans le cas où le domaine de l'intégration est l'espace entier au lieu d'une partie finie de l'espace. On voit, en se reportant aux expressions de u'_ξ etc. et en remarquant que l'intégrale:

$$\int_\omega E(a, r, t)\, d\omega$$

reste pour $r > 0$, $t - \tau \geq 0$ inférieure à un certain nombre fini, que l'on peut trouver un nombre positif a_7, tel que l'on ait pour $r > 0$, $t - \tau \geq 0$:

$$|u'_\xi|, |v'_\xi|, \ldots < \frac{a_7}{r^3} + \frac{a_7 E(r, \tau, t)}{r^2} + \frac{a_7 E(r, \tau, t)}{t - \tau}.$$

Comme les fonctions:

$$\xi r^{-2}, \quad \xi^2 r^{-2}$$

restent, elles-aussi, inférieures à un certain nombre positif, on peut trouver un nombre a_8 tel que:

$$E(r, \tau, t) \quad \frac{a_8}{r}, \quad \frac{E(r, \tau, t)}{t} \quad \frac{a_8}{t}.$$

On a donc:

$$|u'|, |v'|, \ldots \frac{a_9}{r^2}. \tag{6}$$

a_9 étant un certain nombre positif.

On voit à l'aide de ces inégalités que les expressions:

$$\varrho \int_\omega [u(\xi, \eta, \zeta, t_0)\, u'_\xi + \cdots]\, d\omega, \quad \text{etc.}$$

ont un sens déterminé, pourvu que l'on peut trouver deux nombres positifs, α et k_1, tels que l'on ait pour des valeurs de $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ suffisamment grandes:

$$|u(\xi, \eta, \zeta, t_0)|, |v(\xi, \eta, \zeta, t_0)|, |w(\xi, \eta, \zeta, t_0)| < \frac{k_1}{r^\alpha}. \tag{7}$$

Elles définissent dans ce cas des fonctions de x, y, z, t, continues pour $t \geq t_0$ et douées des dérivées de tous les ordres pour $t > t_0$.

Supposons maintenant que les dérivées:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} u(\xi, \eta, \zeta, t_0), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} v(\xi, \eta, \zeta, t_0), \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} w(\xi, \eta, \zeta, t_0),$$

existent, qu'elles soient continues et qu'elles remplissent la condition:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0.$$

On peut dans ce cas transformer nos expressions par des intégrations par parties et l'on obtient, les intégrales de surface s'évanouisssant à cause des inégalités (7):

$$\frac{\varrho^2}{2\mu} \int u(\xi, \eta, \zeta, t_0) E(r, t, t) \int_t^{t_1} d\omega \cdots$$

Si le point x, y, z tend vers le point ξ', η', ζ' en même temps que t vers t_0, ces fonctions tendent vers les limites:

$$4\pi V \mu \varrho \pi\, u(\xi', \eta', \zeta', t_0), \; 4\pi V \mu \varrho \pi\, v(\xi', \eta', \zeta', t_0), \; 4\pi V \mu \varrho \pi\, w(\xi', \eta', \zeta', t_0).$$

Pour l'étude des termes:

$$\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\omega(\tau)} [u'_\xi X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots] d\omega, \; \ldots \; V \mu \varrho \pi \int_{\omega(t)} \left[X(\xi, \eta, \zeta, t) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r}\right) + \cdots \right] d\omega$$

de $4\pi V \mu \varrho \pi\, u, \ldots, 4\pi V \mu \varrho \pi\, p$, nous avons besoin de quelques inégalités que nous dévolopperons ici. Nous avons:

$$u'_\xi = -\left(\frac{3(x-\xi)^2}{r^2} - 1\right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r E(\alpha, \tau, t)\, d\alpha \right\} + \frac{\varrho}{2\mu} \left(1 - \frac{(x-\xi)^2}{r^2}\right) \frac{E(r, \tau, t)}{t-\tau},$$

$$v'_\xi = -\frac{3(x-\xi)(y-\eta)}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r E(\alpha, \tau, t)\, d\alpha \right\} - \frac{\varrho}{2\mu} \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{r^2} \frac{E(r, \tau, t)}{t-\tau},$$

etc. Considérons maintenant la fonction $E(\alpha, \beta, t)$. Elle satisfait à l'équation:

$$\varrho \frac{\partial E}{\partial \beta} + \mu \frac{\partial^2 E}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Multiplions cette équation par $d\alpha d\beta$ et intégrons entre les limites $\alpha = 0$, $\alpha = r$, $\beta = t_0$, $\beta = \tau$ $(t_0 < \tau < t)$. On obtient:

$$\varrho \int_0^r E(\alpha, \tau, t)\, d\alpha - \varrho \int_0^r E(\alpha, t_0, t)\, d\alpha + \mu \int_{t_0}^{\tau} \frac{\partial E(r, \beta, t)}{\partial r} d\beta - \mu \int_{t_0}^{\tau} \left(\frac{\partial E(\alpha, \beta, t)}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\beta = 0.$$

Or:

$$\left(\frac{\partial E(\alpha, \beta, t)}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = 0.$$

Donc:

$$\int_0^r E(\alpha, \tau, t)\, d\alpha - \int_0^r E(\alpha, t_0, t)\, d\alpha = -\frac{\mu}{\varrho} \int_{t_0}^{\tau} \frac{\partial E(r, \beta, t)}{\partial r} d\beta = \frac{r}{2} \int_{t_0}^{\tau} E(r, \beta, t) \frac{d\beta}{t-\beta}.$$

Faisons dans cette équation t_0 tendre vers $-\infty$. Nous aurons, puisque:

$$\lim_{t_0 = -\infty} E(\alpha, t_0, t) = 0,$$

la convergence étant uniforme pour toutes valeurs de α:

$$\int_0^r E(\alpha, \tau, t)\, d\alpha = \frac{r}{2} \int_{-\infty}^{\tau} E(r, \beta, t) \frac{d\beta}{t-\beta}.$$

Donc:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r E(\alpha, \tau, t)\, d\alpha \right\} = \frac{1}{2r} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial E(r, \beta, t)}{\partial r} \frac{d\beta}{t-\beta} = -\frac{\varrho}{4\mu} \int_{-\infty}^{\tau} E(r, \beta, t) \frac{d\beta}{(t-\beta)^2}.$$

Pour les fonctions u'^{ξ} etc. nous obtenons maintenant des expressions de la forme suivante:

$$\frac{\varrho}{4\mu} \left(\frac{3(x-\xi)^2}{r^2} - 1 \right) \int_{\tau}^{\tau} E(r, \beta, t) \frac{d\beta}{(t-\beta)^2} + \frac{\varrho}{2\mu} \left(1 - \frac{(x-\xi)^2}{r^2} \right) \frac{E(r, \tau, t)}{t-\tau}$$

etc. Les dérivées $\frac{\partial u'^{\xi}}{\partial x}$ etc. obtiennent la forme:

$$\frac{\psi}{r} \int_{\tau}^{\tau} E(r, \beta, t) \frac{d\beta}{(t-\beta)^2} + \psi r \int_{-\tau}^{\tau} E(r, \beta, t) \frac{d\beta}{(t-\beta)^3} + \frac{\psi}{r} \frac{E(r, \tau, t)}{t-\tau} + \psi r \frac{E(r, \tau, t)}{(t-\tau)^2},$$

ψ désignant une fonction quelconque de x, y, z, t; ξ, η, ζ, τ, dont la valeur absolue ne dépasse pas une certaine valeur finie pour des valeurs réelles de x, y, z; ξ, η, ζ et pour $t > \tau > t_0$.

Soit maintenant a_{10} un nombre positif tel que l'on ait:

$$(1 + x^2)^n e^{-x^2} < a_{10}$$

pour toutes les valeurs réelles de x et pour $n = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$. On a alors:

$$e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t-\beta)}} < \frac{a_{10}}{\left[1 + \frac{\varrho r^2}{4\mu(t-\beta)}\right]^n} \qquad \left(n = \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, \tfrac{7}{2}\right)$$

si $t \geqq \beta$. Donc, pour $t \geqq \tau$

$$\int_{-\infty}^{\tau} E(r, \beta, t) \frac{d\beta}{(t-\beta)^2} = \int_{-\infty}^{\tau} \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t-\beta)}}}{\sqrt{(t-\beta)^5}} d\beta < a_{10} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{d\beta}{\left(t-\beta+\frac{\varrho r^2}{4\mu}\right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2a_{10}}{3\left(t-\tau+\frac{\varrho r^2}{4\mu}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

et, de la même manière:

$$\int_{\tau}^{t} E(r, \beta, t) \frac{d\beta}{(t-\beta)^2} < \frac{2a_{10}}{3\left(t-\tau+\frac{\varrho r^2}{4\mu}\right)^{\frac{3}{2}}} < \frac{2\mu a_{10}}{\varrho r^2 \left(t-\tau+\frac{\varrho r^2}{4\mu}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

On a de plus:

$$\frac{E(r, \tau, t)}{t-\tau} < \frac{a_{10}}{\left(t-\tau+\frac{\varrho r^2}{4\mu}\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{E(r, \tau, t)}{(t-\tau)^2} < \frac{a_{11}}{\left(t-\tau+\frac{\varrho r^2}{4\mu}\right)^{\frac{3}{2}}} < \frac{2\mu a_{10}}{\varrho r^2 \left(t-\tau+\frac{\varrho r^2}{4\mu}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

On conclut de ces inégalités qu'il est possible de déterminer un nombre positif a_{11}, tel que l'on ait pour $r > 0$, $t - \tau \geqq 0$:

$$\left|\frac{\partial w'_\xi}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial w'_\xi}{\partial y}\right|, \ldots \left|\frac{\partial w'_\xi}{\partial z}\right| < \frac{a_{11}}{r\left(t-\tau+\frac{\varrho r^2}{4\mu}\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{8}$$

Revenons maintenant aux termes:

$$\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\omega(\tau)} (u'_\xi X + \cdots)\, d\omega = U_1, \quad \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\omega(\tau)} (u'_\eta X + \cdots)\, d\omega = V_1,$$

$$\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\omega(\tau)} (u'_\zeta X + \cdots)\, d\omega = W_1$$

de $4\pi\, V\mu\varrho\pi\, u$, $4\pi\, V\mu\varrho\pi\, v$, $4\pi\, V\mu\varrho\pi\, w$. Considérons les intégrales:

$$\int_{t-\varepsilon}^{t} d\tau \int_{\omega(t)} \left(\frac{\partial u'_\xi}{\partial x} X + \cdots\right) d\omega \ldots,$$

où $0 < \varepsilon < t - t_0$. On voit à l'aide des inégalités 8 que l'on peut trouver une constante positive a_{12}, telle que les valeurs absolues de ces intégrales soient plus petites que:

$$a_{12} V\varepsilon \,.\, \text{Max.}\, V X^2 + Y^2 + Z^2 \,.$$

On conclut de là que, les fonctions X, Y, Z étant finies et continues, les intégrales:

$$\int_{t_0}^{t-\varepsilon} d\tau \int_{\omega(\tau)} \left(\frac{\partial u'_\xi}{\partial x} X + \cdots\right) d\omega, \ldots \qquad (t > t_0)$$

si ε tend vers zéro, tendent uniformément vers les limites:

$$\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\omega(t)} \left(\frac{\partial u'_\xi}{\partial x} X + \cdots\right) d\omega, \ldots$$

dans l'intérieur de $S(t)$.

Dans les fonctions U_1, V_1, W_1 il est donc permis de dériver une fois sous le signe d'intégration par rapport à x, y, z. Comme on a:

$$\frac{\partial u'_\xi}{\partial x} + \frac{\partial u'_\eta}{\partial y} + \frac{\partial u'_\zeta}{\partial z} = 0$$

etc., il s'ensuit que les fonctions U_1, V_1, W_1 satisfont à la condition de continuité:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z} = 0.$$

Les fonctions u'_ξ etc. ne contiennent x, y, z que dans les combinaisons $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\zeta$. On a donc:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = -\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\omega(\tau)} \left(\frac{\partial u'_\xi}{\partial x} X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots \right) d\omega$$

etc. Donc:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \int_{t_0}^{t} dt \int_{S(\tau)} (u'_\xi X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots) \cos nx \, dS + \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\omega(\tau)} \left(u'_\xi \frac{\partial X}{\partial \xi} + \cdots \right) d\omega$$

etc. Prenons maintenant dans l'intérieur de $\omega(t)$ un domaine $\omega'(t)$ dont la frontière n'a aucun point commun avec $S(t)$. Il suit des égalités précédentes que les dérivées secondes de U_1, V_1, W_1 par rapport à x, y, z existent et sont des fonctions continues de x, y, z dans le domaine $\omega'(t)$. Il suit aussi que l'on a dans ce domaine et pour $t > t_0$:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \lim_{\varepsilon=0} \int_{t_0}^{t-\varepsilon} d\tau \int_{\omega'(\tau)} \left(\frac{\partial^2 u'_\xi}{\partial x^2} X + \frac{\partial^2 v'_\xi}{\partial x^2} Y + \frac{\partial^2 w'_\xi}{\partial x^2} Z \right) d\omega$$

etc. Calculons maintenant $\frac{\partial U_1}{\partial t}$, $\frac{\partial V_1}{\partial t}$, $\frac{\partial W_1}{\partial t}$. Posons:

$$U_1(x, y, z, t, \varepsilon) = \int_{t_0}^{t-\varepsilon} d\tau \int_{\omega(\tau)} (u'_\xi X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots) d\omega$$

etc. Nous aurons:

$$\lim_{\varepsilon=0} U_1(x, y, z, t, \varepsilon) = U_1(x, y, z, t) \quad \text{etc.}$$

Puis

$$\frac{\partial U_1(x, y, z, t, \varepsilon)}{\partial t} = \int_{\omega(t-\varepsilon)} (u'_\xi X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots)_{\tau=t-\varepsilon} d\omega +$$

$$+ \int_{t_0}^{t-\varepsilon} d\tau \int_{\omega(\tau)} \left(\frac{\partial u'_\xi}{\partial t} X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots \right) d\omega = \int_{\omega(t-\varepsilon)} (u'_\xi X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots)_{\tau=t-\varepsilon} d\omega +$$

$$+ \frac{\mu}{\varrho} \int_{t_0}^{t-\varepsilon} d\tau \int_{\omega(\tau)} (\Delta u'_\xi \cdot X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots) d\omega.$$

Si maintenant, x, y, z étant un point du domaine $\omega'(t)$ et $t_0 + \delta < t \leq t_0$ $(\delta > 0)$, ε tend vers zero, nos deux termes convergeront uniformément vers leurs limites et nous aurons:

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\omega(t-\varepsilon)} [u'_\xi X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots] d\omega = \lim_{\varepsilon=0} \frac{\varrho}{\mu} \int_{\omega(t-\varepsilon)} \left[\frac{\partial P}{\partial \tau} X(\xi, \eta, \zeta, \tau)\right]_{\tau=t-\varepsilon} d\omega -$$

$$- \lim_{\varepsilon=0} \int_{\omega(t-\varepsilon)} \left[\left(\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Z}{\partial \zeta}\right) \frac{\partial P}{\partial \xi}\right]_{\tau=t-\varepsilon} d\omega - \lim_{\varepsilon=0} \int_{S(t-\varepsilon)} \left[\left(X \cos nx + \cdots\right) \frac{\partial P}{\partial \xi}\right]_{\tau=t-\varepsilon} dS =$$

$$- 4\pi \sqrt{\frac{\mu \varkappa}{\varrho}}\, X(x, y, z, t) - \sqrt{\frac{\mu \varkappa}{\varrho}} \int_{\omega(t)} \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Z}{\partial \zeta}\right) \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) d\omega -$$

$$- \sqrt{\frac{\mu \varkappa}{\varrho}} \int_{S(t)} (X \cos nx + \cdots) \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) dS,$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\mu}{\varrho} \int_{t_0}^{t-\varepsilon} d\tau \int_{\omega(\tau)} (\Delta u'_\xi X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots) d\omega = \frac{\mu}{\varrho} \Delta U_1.$$

La convergence étant uniforme, il s'ensuit (pour $t > t_0$):

$$\varrho \frac{\partial U_1}{\partial t} = \mu \Delta U_1 + 4\pi \sqrt{\mu \varrho \varkappa}\, X - \sqrt{\mu \varrho \varkappa} \int_{\omega(t)} \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Z}{\partial \zeta}\right) \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) d\omega -$$

$$- \sqrt{\mu \varrho \varkappa} \int_{S(t)} (X \cos nx + \cdots) \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) dS.$$

On obtient de la même manière deux formules analogues pour $\frac{\partial V_1}{\partial t}$ et $\frac{\partial W_1}{\partial t}$.

Désignons par H_1 le terme de $4\pi \sqrt{\mu \varrho \varkappa}\, p$ correspondant à U_1, V_1, W_1. Nous aurons:

$$H_1 = \sqrt{\mu \varrho \varkappa} \int_{\omega(t)} \left(X(\xi, \eta, \zeta, t) \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots\right) d\omega =$$

$$- \sqrt{\mu \varrho \varkappa} \int_{S(t)} (X \cos nx + \cdots) \frac{dS}{r} - \sqrt{\mu \varrho \varkappa} \int_{\omega(t)} \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Z}{\partial \zeta}\right) \frac{d\omega}{r}.$$

Par conséquent:

$$\varrho \frac{\partial U_1}{\partial t} = -\frac{\partial H_1}{\partial x} + 4\pi V\mu\varrho x\, X + \mu \Delta U_1$$

etc. Les fonctions:

$$\frac{U_1}{4\pi V\mu\varrho x}, \quad \frac{V_1}{4\pi V\mu\varrho x}, \quad \frac{W_1}{4\pi V\mu\varrho x}, \quad \frac{H_1}{4\pi V\mu\varrho x}$$

satisfont donc au système 1. On a de plus:

$$\lim_{t=t_0} U_1 = \lim_{t=t_0} V_1 = \lim_{t=t_0} W_1 = 0.$$

Dans notre étude de $U_1, \ldots$ nous nous sommes jusqu'ici bornés au cas où le domaine d'intégration est une partie finie de l'espace. Dans le cas contraire, il suffit de supposer qu'il soit possible de déterminer deux nombres positifs, β, l_1, tels que l'on ait pour des valeurs de $r = V\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ suffisamment grandes:

$$V X^2 + Y^2 + Z^2 < \frac{l_1}{r^\beta}.$$

Soit en effet x, y, z un point quelconque. Soit S une surface fermée qui enferme ce point, ω_i la partie de l'espace qui se trouve à l'intérieur de S et ω_e la partie extérieure. A ω_i et ω_e correspondent des intégrales U_{1i} et U_{1e}, V_{1i} et V_{1e}, W_{1i} et W_{1e}. Seulement l'intégrale H_{1e} n'a pas un sens déterminé. L'étude des fonctions U_{1i}, V_{1i}, W_{1i} et H_{1i} se fait comme plus haut. Reste à étudier les fonctions U_{1e}, V_{1e}, W_{1e} et à faire voir qu'elle sera l'expression correspondante pour la pression.

Nous avons en vertu des inégalités 6:

$$|u'_\xi|, \ |v'_\xi|, \ldots |w'_\xi| < \frac{a_0}{r^3}.$$

On démontre de la même manière qu'il existe un nombre positif a_{12} tel que

$$\left.\begin{aligned} &\left|\frac{\partial u'_\xi}{\partial x}\right|, \ \left|\frac{\partial u'_\xi}{\partial y}\right|, \ldots \left|\frac{\partial w'_\xi}{\partial z}\right| < \frac{a_{12}}{r^4}, \\ &\left|\frac{\partial^2 u'_\xi}{\partial x^2}\right|, \ \left|\frac{\partial^2 u'_\xi}{\partial x\,\partial y}\right|, \ldots \left|\frac{\partial^2 w'_\xi}{\partial z^2}\right|, \ \left|\frac{\partial u'_\xi}{\partial t}\right| \ldots < \frac{a_{12}}{r^5} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Les inégalités 9 et 10 montrent que les intégrales que l'on obtient en dérivant U_{1e}, V_{1e}, W_{1e} sous le signe d'intégration une ou deux fois par rapport à x, y, z ou une fois par rapport à t sont uniformément convergentes dans tout domaine ω' intérieur à ω_i et pour $t \geq t_0 + \delta$ ($\delta > 0$). On obtient donc pour $t > t_0$:

$$\varrho\frac{\partial U_{1e}}{\partial t} = \mu\Delta U_{1e} + V\overline{\mu\varrho\varkappa}\int_{\omega_e}\left(X(\xi,\eta,\zeta,t)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\cdots\right)d\omega$$

etc. Posons:

$$H'_{1e} = V\overline{\mu\varrho\varkappa}\int_{\omega_e}\left(X(\xi,\eta,\zeta,t)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\right)+\cdots\right)d\omega -$$

$$-V\mu\varrho\varkappa\int_{\omega_1}\left(X(\xi,\eta,\zeta,t)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right)+\cdots\right)d\omega$$

Nous aurons

$$\frac{\partial H'_{1e}}{\partial x} = -V\mu\varrho\varkappa\int_{\omega_e}\left(X(\xi,\eta,\zeta,t)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\cdots\right)d\omega.$$

Donc:

$$\varrho\frac{\partial U_{1e}}{\partial t} = -\frac{\partial H'_{1e}}{\partial x}+\mu\Delta U_{1e}$$

etc. On a d'ailleurs:

$$\lim_{t=t_0} U_{1e} = \lim_{t=t_0} V_{1e} = \lim_{t=t_0} W_{1e} = 0.$$

Donc les fonctions:

$$\frac{U_1}{4\pi V\mu\varrho\varkappa},\quad \frac{V_1}{4\pi V\mu\varrho\varkappa},\quad \frac{W_1}{4\pi V\mu\varrho\varkappa},\quad \frac{H_{1i}+H'_{1e}}{4\pi V\mu\varrho\varkappa}$$

pour $t>t_0$ satisfont au système 1. U_1, V_1 et W_1 tendent vers zéro avec $t-t_0$.

Passons aux intégrales de surface dans nos formules 5. Posons

$$U_2 = -\int_{t_0}^{t}d\tau\int_{S(\tau)}\left[u'_\xi\left(\mu\frac{du}{dn}-p\cos nx+\varrho u u_n\right)+\cdots\right]dS+\mu\int_{t_0}^{t}d\tau\int_{S(\tau)}\left(u\frac{du'_\xi}{dn}+\cdots\right)dS$$

et désignons par V_2, W_2 et H_2 les termes correspondants de u, v, w, p. On voit immédiatement que les fonctinns U_2, V_2, W_2 dans le domaine $\omega'(t)$ et pour $t>t_0+\delta$ ($\delta>0$) admettent des dérivées continues du premier ordre par rapport à t et des deux premiers ordres par rapport à x, y, z et que l'on a:

$$\varrho\frac{\partial U_2}{\partial t}-\mu\Delta U_2 = -\int_{S(t)}\left[u'_\xi\left(\mu\frac{du}{dn}-p\cos nx+\varrho u u_n\right)+\cdots\right]dS+$$

$$+\mu\int_{S(t)}\left(u\frac{du'_\xi}{dn}+\cdots\right)dS = -\int_{S(t)}\left[\left(\mu\frac{du}{dn}-p\cos nx+\varrho u u_n\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\cdots\right]dS+$$

$$+\mu\int_{S(t)}\left(u\frac{d}{dn}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\cdots\right)dS$$

etc. Comme on a:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)$$

etc., il s'ensuit:

$$\varrho \frac{\partial U_2}{\partial t} - \mu \Delta U_2 = -\frac{\partial H_2}{\partial x}$$

etc. On a aussi:

$$\lim_{t=t_0} U_2 = \lim_{t=t_0} V_2 = \lim_{t=t_0} W_2 = 0.$$

Enfin, les derniers termes de u, v, w, p: U_3, V_3, W_3, H_3 satisfont dans le domaine $\omega'(t)$ et pour $t > t_0$ aux équations:

$$\varrho \frac{\partial U_3}{\partial t} = -\frac{\partial H_3}{\partial x}, \text{ etc.}$$

$$\Delta U_3 = 0, \text{ etc.}$$

Elles satisfont donc au système 1 en y posant $X = Y = Z = 0$. Leurs valeurs limites pour $t = t_0$ sont;

$$V\mu\varrho\pi \int (u \cos nx + \cdots) \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) dS$$

etc.

Les resultats trouvés montrent la légitimité des théorèmes que nous avons énoncés au commencement de ce paragraphe.

II.

Applications des formules de Green généralisées au problème du mouvement d'un fluide indéfini.

1. Dans ce premier paragraphe nous établirons quelques inégalités dont nous aurons à faire un usage constant dans ce chapitre.

Nous avons démontré plus haut que l'on a, a_3 étant une certaine quantité positive:

$$|u'_1|, \ldots < \frac{a_3}{r^2 \sqrt{t-\tau}}.$$

Nous allons maintenant démontrer que, b étant une quantité positive quelconque (qui a la dimension de la racine carrée d'un temps divisée par une longueur), on peut trouver une constante positive a_{13}, telle que l'on a pour $r > 0$, $t - \tau \geq 0$:

$$|u'_\xi|, \ldots < \frac{a_{13}}{r^2(\sqrt{t-\tau}+br)} \cdot \cdot \qquad (11)$$

Nous avons par exemple:

$$u'_\xi = \frac{1}{r^2}\left(\frac{3(x-\xi)^2}{r^2}-1\right)\left(\frac{1}{r}\int_0^r E(\alpha,\tau,t)\,d\alpha - E(r,\tau,t)\right)+\frac{\varrho}{2\mu}\left(1-\frac{(x-\xi)^2}{r^2}\right)\frac{E(r,\tau,t)}{t-\tau}.$$

Prenons la quantité positive a_{13} assez grande pour que l'on ait pour toute valeur réelle de x:

$$5\left|\left(1+2b\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}x\right)^n e^{-x^2}\right| < a_{13}, \qquad (n=1,2,3)$$

$$10\left|x^2\left(1+2b\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}x\right)e^{-x^2}\right| < a_{13}.$$

On a alors:

$$e^{-\frac{\varrho\alpha^2}{4\mu(t-\tau)}} < \frac{a_{13}}{5\left(1+\frac{b\alpha}{\sqrt{t-\tau}}\right)^2}.$$

Par conséquent:

$$\int_0^r e^{-\frac{\varrho\alpha^2}{4\mu(t-\tau)}}d\alpha < \frac{a_{13}}{5}\int_0^r \frac{d\alpha}{\left(1+\frac{b\alpha}{\sqrt{t-\tau}}\right)^2} = \frac{a_{13}\sqrt{t-\tau}}{5b}\left(1-\frac{1}{1+\frac{br}{\sqrt{t-\tau}}}\right) = \frac{a_{13}r}{5\left(1+\frac{br}{\sqrt{t-\tau}}\right)}.$$

Donc:

$$\frac{1}{r^3}\int_0^r E(\alpha,\tau,t)\,d\alpha < \frac{a_{13}}{5r^2(\sqrt{t-\tau}+br)}.$$

On a de même:

$$\frac{E(r,\tau,t)}{r^2} < \frac{a_{13}}{5r^2(\sqrt{t-\tau}+br)},$$

$$\frac{\varrho E(r,\tau,t)}{2\mu(t-\tau)} < \frac{a_{13}}{5r^2(\sqrt{t-\tau}+br)}.$$

Comme:

$$\left|\frac{3(x-\xi)^2}{r^2}-1\right| \leq 2, \quad \left|1-\frac{(x-\xi)^2}{r^2}\right| \leq 1,$$

la première des inégalités 11 est démontrée. Les autres se démontrent de la même manière.

Considérons maintenant les fonctions u, v, w de x, y, z, t, définies par les équations suivantes:

$$u = \int_{t_0}^{t} d\tau \int [u'_\xi X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + v'_\xi Y(\xi, \eta, \zeta, \tau) + w'_\xi Z(\xi, \eta, \zeta, \tau)] d\omega,$$

$$v = \int_{t_0}^{t} d\tau \int [u'_\eta X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots] d\omega,$$

$$w = \int_{t_0}^{t} d\tau \int [u'_\zeta X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots] d\omega,$$

le domaine d'intégration étant l'espace entier. Supposons qu'il soit possible de déterminer deux nombres positifs δ et m_1, tels que l'on ait dans l'intervalle $t_0 \leq \tau \leq T$:

$$|X(\xi, \eta, \zeta, \tau)|, \ |Y(\xi, \eta, \zeta, \tau)|, \ |Z(\xi, \eta, \zeta, \tau)| < \frac{m_1 (\tau - t_0)^n}{(1 + r)^\delta},$$

$$n \geq 0, \quad r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Nous supposons d'ailleurs, ce qui est toujours permis, que δ ne soit pas plus grand que 1. Nous démontrerons que l'on peut alors trouver un nombre positif n_1, tel que pour $t_0 \leq t \leq T$:

$$|u(x, y, z, t)|, \ |v(x, y, z, t)|, \ |w(x, y, z, t)| < n_1 m_1 (t - t_0)^{n+\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

Pour la démonstration, il suffit de montrer que l'on peut déterminer un nombre positif a_{14} tel que:

$$\int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^n d\tau \int \frac{d\omega}{r^2 (\sqrt{t - \tau} + br)(1 + r)^\delta} < a_{14} (t - t_0)^{n+\frac{1}{2}}$$

dans l'intervalle $t_0 \leq t \leq T$. Posons:

$$\bar{r} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi}, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$d\omega = r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi \, d\psi.$$

Notre intégrale devient alors:

$$\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^n\,d\tau\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{\infty}\frac{dr}{(\sqrt{t-\tau}+b\,r)\,(1+r)^{\delta}}\,.$$

La valeur de cette intégrale est inférieure à

$$4\pi\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^n\,d\tau\int_0^{\infty}\frac{dr}{(\sqrt{t-\tau}+br)\,(1+|r-R|)^{\delta}}\,.$$

Or:

$$\int_0^{\infty}\frac{dr}{(\sqrt{t-\tau}+br)\,(1+|r-R|)^{\delta}}=\int_0^{\frac{R}{2}}\frac{dr}{(\sqrt{t-\tau}+br)\,(1+R-r)^{\delta}}+$$

$$+\int_{\frac{R}{2}}^{R}\frac{dr}{(\sqrt{t-\tau}+br)\,(1+R-r)^{\delta}}+\int_R^{\infty}\frac{dr}{(\sqrt{t-\tau}+br)\,(1+r-R)^{\delta}}=I_1+I_2+I_3.$$

$$I_1<\frac{1}{\left(1+\frac{R}{2}\right)^{\delta}}\int_0^{\frac{R}{2}}\frac{dr}{\sqrt{t-\tau}+br}=\frac{1}{b\left(1+\frac{R}{2}\right)^{\delta}}\log\left(1+\frac{bR}{2\sqrt{t-\tau}}\right).$$

Soit a_{15} un nombre positif tel que:

$$\operatorname*{Max}_{x\geq 0}\frac{\log(1+x)}{x^{\delta}}<a_{15}\,.$$

On a alors:

$$I_1<\frac{R^{\delta}a_{15}}{b^{1-\delta}(2+R)^{\delta}(t-\tau)^{\frac{\delta}{2}}}<\frac{a_{15}}{b^{1-\delta}(t-\tau)^{\frac{\delta}{2}}}.$$

Donc:

$$4\pi\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^n I_1\,d\tau<\frac{4\pi a_{15}(t-t_0)^n}{b^{1-\delta}}\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{\delta}{2}}}=\frac{8\pi a_{15}(t-t_0)^{n+1-\frac{\delta}{2}}}{b^{1-\delta}(2-\delta)}<$$

$$\frac{8\pi a_{15}(T-t_0)^{\frac{1-\delta}{2}}(t-t_0)^{n+\frac{1}{2}}}{b^{1-\delta}(2-\delta)}.$$

D'autre part:

$$I_2 < \int_{\frac{R}{2}}^{R} \frac{dr}{\sqrt{t-r}+br} = \frac{1}{b}\log\frac{1+\dfrac{bR}{\sqrt{t-r}}}{1+\dfrac{bR}{2\sqrt{t-r}}} < \frac{\log 2}{b}.$$

Donc:

$$\int_{t_0}^{t}(r-t_0)^n I_2\,dr < \frac{\log 2\,(t-t_0)^{n+1}}{b(n+1)} < \frac{\log 2\,(T-t_0)^{\frac{1}{2}}}{b(n+1)}(t-t_0)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Enfin:

$$I_3 = \int_0^{\infty}\frac{dr}{(\sqrt{t-r}+bR+p\xi)(1+\xi)^{\delta}} < \int_0^{\infty}\frac{d\xi}{(\sqrt{t-r}+b\xi)(1+\xi)^{\delta}} <$$

$$\frac{1}{\sqrt{t-r}}\int_0^{\infty}\frac{d\xi}{\left(1+\dfrac{p\xi}{\sqrt{T-t_0}}\right)(1+\xi)^{\delta}} = \frac{a_{16}}{\sqrt{t-r}}.$$

Donc:

$$\int_{t_0}^{t}(r-t_0)^n I_3\,dr < 2a_{16}(t-t_0)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Notre théorème est donc démontré.

On peut sous les mêmes conditions démontrer les inégalités:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial w}{\partial z}\right| < \frac{n_2 m_1 (t-t_0)^{n+\frac{1}{2}}}{(1+R)^{\delta}}, \tag{13}$$

où n_2 désigne un certain nombre positif. Pour la démonstration, nous remarquons d'abord que l'on peut trouver un nombre positif a_{17} tel que l'on ait:

$$\left|\frac{\partial u'_{\xi}}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial w'_{\xi}}{\partial z}\right| < \frac{a_{17}}{r(\sqrt{t-r}+br)^{\delta}}.$$

En effet, nous avons démontré plus haut que l'on a des inégalités de la forme:

$$\left|\frac{\partial u'_{\xi}}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial w'_{\xi}}{\partial z}\right| < \frac{a_{11}}{r\left(t-r+\dfrac{\varrho r^2}{4\mu}\right)^{\frac{\delta}{2}}}.$$

En modifiant légèrement la démonstration on voit que l'on peut remplacer le membre droit par:

$$\frac{a_{17}}{r(\sqrt{t-\tau}+b\tau)^3}.$$

Cela étant, nous considérons une des dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$ etc., par exemple la première. Nous avons:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < 3\,m_1 a_{17}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^n d\tau \int \frac{d\omega}{r(\sqrt{t-\tau}+b\tau)^3(1+r)^\delta} <$$

$$12\pi m_1 a_{17}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^n d\tau \int_0^\infty \frac{r\,dr}{(\sqrt{t-\tau}+b\tau)^3(1+|r-R|)^\delta}$$

$$< \frac{12\pi m_1 a_{17}}{b}\left\{\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^n d\tau \int_0^{\frac{R}{2}} \frac{dr}{(\sqrt{t-\tau}+b\tau)^2(1+R-r)^\delta} + \right.$$

$$\left. \int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^n d\tau \int_{\frac{R}{2}}^\infty \frac{dr}{(\sqrt{t-\tau}+b\tau)^2(1+|r-R|)^\delta}\right\}$$

$$< \frac{12\pi m_1 a_{17}}{b}\left\{\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^n d\tau \int_0^{\frac{R}{2}} \frac{dr}{(\sqrt{t-\tau}+b\tau)^2\left(1+\frac{R}{2}\right)^\delta} + \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^n d\tau \int_{\frac{R}{2}}^\infty \frac{dr}{(\sqrt{t-\tau}+b\tau)^2}\right\}$$

$$< \frac{12\pi m_1 a_{17}}{b}\left\{b(1+R)^\delta \int_{t_0}^{t}\frac{(\tau-t_0)^n}{\sqrt{t-\tau}}d\tau + \int_{t_0}^{t}\frac{(\tau-t_0)^n dt}{b\left(\sqrt{t-\tau}+\frac{bR}{2}\right)}\right\}$$

$$< \frac{12\cdot 2^\delta \pi m_1 a_{17}}{b^2}\left\{\frac{1}{(1+R)^\delta} + \frac{2^{1-\delta}}{1+\frac{bR}{2}T^{t_0}}\right\}\int_{t_0}^{t}\frac{(\tau-t_0)^n}{\sqrt{t-\tau}}d\tau.$$

Or, si $\frac{b}{\sqrt{T-t_0}}<1$, on a:

$$\frac{1}{1+\frac{bR}{\sqrt{T-t_0}}}<\frac{\sqrt{T-t_0}}{b(1+R)},$$

si $\frac{b}{\sqrt{T-t_0}}>1$:

$$\frac{1}{1+\frac{bR}{\sqrt{T-t_0}}}<\frac{1}{1+R}.$$

Donc, dans tout les cas:

$$\frac{1}{1+\frac{bR}{\sqrt{T-t_0}}}<\frac{b+\sqrt{T-t_0}}{b(1+R)}\leq\frac{b+\sqrt{T-t_0}}{b(1+R)^0}.$$

Donc:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|<\frac{24\pi m_1 a_{17}}{b^3}(b(2^\delta+2)+2\sqrt{T-t_0})\frac{(t-t_0)^{n+\frac{1}{2}}}{(1+R)^\delta}.$$

Les inégalités 13 sont donc vraies pourvu que;

$$n_2\geq\frac{24\pi a_{17}}{b^3}(b(2^\delta+2)+2\sqrt{T-t_0}).$$

Démontrons enfin un dernier système d'inégalités. Nous désignons par u, v, $\overline{w}$ les composantes de la rotation du vecteur u, v, w. En d'autres termes nous posons:

$$\overline{u}=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z},\quad \overline{v}=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x},\quad \overline{w}=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Nous supposons toujours que l'on ait:

$$|X(\xi,\eta,\zeta,\tau)|,\ldots<\frac{m_1(\tau-t_0)^n}{(1+r)^\delta}$$

et nous supposons de plus que l'on peut déterminer un nombre positif, m_2, tel que pour $t_0\leq\tau\leq T$:

$$\left|\frac{\partial Z}{\partial\eta}-\frac{\partial Y}{\partial\zeta}\right|,\ \left|\frac{\partial X}{\partial\zeta}-\frac{\partial Z}{\partial\xi}\right|,\ \left|\frac{\partial Y}{\partial\xi}-\frac{\partial X}{\partial\eta}\right|<m_2(\tau-t_0)^n(1+\bar{r})^{n'},$$

où n' désigne un nombre entier positif ou nul. Nous nous proposons de déterminer dans ce cas des limites supérieures pour les valeurs absolues de $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y},\ldots\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}$.

Nous avons:

$$\bar{u} = \int_{t_0}^{t} d\tau \int \Big[X(\xi, \eta_1, \zeta, \tau) \Big(\frac{\partial u'_\zeta}{\partial y} - \frac{\partial u'_\eta}{\partial z} \Big) + \cdots \Big] d\omega$$

etc. Or:

$$\frac{\partial u'_\zeta}{\partial y} - \frac{\partial u'_\eta}{\partial z} = \frac{\partial u'_\eta}{\partial \zeta} - \frac{\partial u'_\zeta}{\partial \eta_1} = 0$$

$$\frac{\partial v'_\zeta}{\partial y} - \frac{\partial v'_\eta}{\partial z} = \frac{\partial v'_\eta}{\partial \zeta} - \frac{\partial v'_\zeta}{\partial \eta_1} = \frac{\varrho}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial \tau \, \partial \zeta},$$

$$\frac{\partial w'_\zeta}{\partial y} - \frac{\partial w'_\eta}{\partial z} = \frac{\partial w'_\eta}{\partial \zeta} - \frac{\partial w'_\zeta}{\partial \eta_1} = -\frac{\varrho}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial \tau \, \partial \eta_1}.$$

etc. donc:

$$\bar{u} = \frac{\varrho}{\mu} \int_{t_0}^{t} d\tau \int \Big[Y(\xi, \eta_1, \zeta, \tau) \frac{\partial^2 P}{\partial \tau \, \partial \zeta} - Z(\xi, \eta_1, \zeta, \tau) \frac{\partial^2 P}{\partial \tau \, \partial \eta_1} \Big] d\omega.$$

Donc, pour $t_0 \leq t \leq T$:

$$u = \frac{\varrho}{\mu} \int_{t_0}^{t} d\tau \int \Big(\frac{\partial Z}{\partial \eta_1} - \frac{\partial Y}{\partial \zeta} \Big) \frac{\partial P}{\partial \tau} \, d\omega = \frac{\varrho}{2\mu} \int_{t_0}^{t} d\tau \int \Big(\frac{\partial Z}{\partial \eta_1} - \frac{\partial Y}{\partial \zeta} \Big) \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t-\tau)}}}{\sqrt{(t-\tau)^3}} d\omega$$

etc. Par conséquent:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\varrho^2}{4\mu^2} \int_{t_0}^{t} d\tau \int \Big(\frac{\partial Z}{\partial \eta_1} - \frac{\partial Y}{\partial \zeta} \Big) (\xi - x) \, E(r, \tau, t) \frac{d\omega}{(t-\tau)^2}$$

etc. Nous avons donc:

$$\Big| \frac{\partial u}{\partial x} \Big|, \ldots \Big| \frac{\partial w}{\partial z} \Big| < \frac{\pi \varrho^2 m_2}{\mu^2} \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^n \, d\tau \int_0^\infty r^3 (1 + R + r)^{n'} E(r, \tau, t) \frac{dr}{(t-\tau)^2}.$$

Or on a:

$$\int_0^\infty r^3 (1 + R + r)^{n'} E(r, \tau, t) \frac{dr}{(t-\tau)^2} = \int_0^\infty r^3 (1 + R + r)^{n'} e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t-\tau)}} \frac{dr}{\sqrt{(t-\tau)^5}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \sum \frac{n'!}{(n'-i)!} (1 + R)^i \, (t-\tau)^{\frac{n'-i}{2}} \int_0^\infty \alpha^{3+n'-i} e^{-\frac{\varrho \alpha^2}{4\mu}} d\alpha.$$

Donc, puisque:

$$(t-r)^{\frac{n'-i}{2}} < (T-t_0)^{\frac{n'-i}{2}},$$

$$(1+R)^i \leq (1+R)^{n'} \qquad (i \leq n')$$

$$\int_0^t r^3 (1+R+r)^{n'} E(r, r, t) \frac{dr}{(t-r)^2} < a_{18} (1+R)^{n'}.$$

a_{18} étant un certain nombre positif. On conclut de cette inégalité qu'il est possible de déterminer n_3 tel que:

$$\left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right| < n_3 m_2 (t-t_0)^{n+\frac{1}{2}} (1+R)^{n'} \tag{14}$$

dans l'intervalle $t_0 \leq t \leq T$.

2. Il s'agit dans ce paragraphe du problème de calculer pour un fluide visqueux et incompressible les composantes de vitesse d'un mouvement infiniment lent, superposé sur un mouvement connu. — Les équations du mouvement peuvent s'écrire, en posant:

$$p + \frac{\varrho}{2}(u^2+v^2+w^2) = q:$$

$$\varrho \frac{\partial u}{\partial t} + \varrho(wv - v\bar{w}) = X - \frac{\partial q}{\partial x} + \mu \Delta u,$$

$$\varrho \frac{\partial v}{\partial t} + \varrho(u\bar{w} - wu) = Y - \frac{\partial q}{\partial y} + \mu \Delta v,$$

$$\varrho \frac{\partial w}{\partial t} + \varrho(v\bar{u} - uv) = Z - \frac{\partial q}{\partial z} + \mu \Delta w,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Dans ces équations, nous remplaçons u, v, w, q, X, Y, Z par $u_0 + u$, $v_0 + v$, $w_0 + w$, $q_0 + q$, $X_0 + X$, $Y_0 + Y$, $Z_0 + Z$, u_0, v_0, ... se rapportant au mouvement connu et u, v, w, ... étant des quantités très petites ainsi que les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}, \cdots \frac{\partial w}{\partial z}$. Nous obtenons de cette manière, puisque les fonctions u_0, v_0, ... selon notre hypothèse satisfont à notre système différentiel et puisqu'il est permis de négliger les termes $wv - vw$, $uw - wu$, $vu - uv$, petits du second ordre:

$$\left.\begin{aligned}
\varrho\frac{\partial u}{\partial t} + \varrho(\bar{w}_0 v + w\bar{v}_0 - \bar{v}_0 w - v\bar{w}_0) &= X - \frac{\partial q}{\partial x} + \mu\Delta u,\\
\varrho\frac{\partial v}{\partial t} + \varrho(u_0\bar{w} + \bar{u}\bar{w}_0 - \bar{w}_0\bar{u} - w\bar{u}_0) &= Y - \frac{\partial q}{\partial y} + \mu\Delta v,\\
\varrho\frac{\partial w}{\partial t} + \varrho(\bar{v}_0\bar{u} + \bar{v}u_0 - u_0\bar{v} - u\bar{v}_0) &= Z - \frac{\partial q}{\partial z} + \mu\Delta w,\\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Nous nous proposons de montrer comment on peut de ces équations calculer les fonctions u, v, w pour $t > t_0$, les valeurs de ces fonctions pour $t = t_0$ étant connues. Pour que notre méthode soit applicable, il faut cependant introduire quelques hypothèses restrictives. Nous supposons que u_0, v_0, w_0, $\bar{u}_0$, $\bar{v}_0$, $\bar{w}_0$, X, Y, Z soient des fonctions uniformes et continues de x, y, z, t dans tout l'espace et pour $t_0 \leq t \leq T$ et qu'elles soient douées des dérivées continues par rapport à x, y, z. Nous supposons que l'on puisse trouver trois nombres positifs M, N et a ($a \leq 1$) tels que l'on ait dans l'intervalle $t_0 \leq t \leq T$:

$$|u_0(x,y,z,t)|,\ |v_0(x,y,z,t)|,\ |w_0(x,y,z,t)| < M,$$

$$|u_0(x,y,z,t)|,\ |\bar{v}_0(x,y,z,t)|,\ |\bar{w}_0(x,y,z,t)| < \frac{M}{(1+R)^a},$$

$$|X(x,y,z,t)|,\ |Y(x,y,z,t)|,\ |Z(x,y,z,t)| < \frac{N}{(1+R)^a}.$$

Nous supposons de plus que l'on puisse choisir M, N et le nombre entier positif m tels que:

$$\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial w_0}{\partial z}\right|,\ \left|\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial z}\right| < M(1+R)^m,$$

$$\left|\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right|, \ldots < N(1+R)^m$$

dans l'intervalle $t_0 \leq t \leq T$. Quant aux valeurs initiales de u, v, w, nous supposons qu'elles soient des fonctions continues de x, y, z, douées des dérivées continues du premier ordre, qui remplissent l'équation:

$$\frac{\partial u_{t=t_0}}{\partial x} + \frac{\partial v_{t=t_0}}{\partial y} + \frac{\partial w_{t=t_0}}{\partial z} = 0.$$

Nous supposons de plus que $u_{t=t_0}$, $v_{t=t_0}$, $w_{t=t_0}$ admettent des dérivées continues par rapport à x, y, z et que l'on puisse choisir les nombres N, α et m tels que:

$$|u(x, y, z, t_0)|, \ |v(x, y, z, t_0)|, \ |w(x, y, z, t_0)| < N,$$

$$|u(x, y, z, t_0)|, \ |v(x, y, z, t_0)|, \ |w(x, y, z, t_0)| < \frac{N}{(1+R)^{\alpha}},$$

$$\left|\frac{\partial u_{t=t_0}}{\partial x}\right|, \dots \left|\frac{\partial w_{t=t_0}}{\partial z}\right|, \ \left|\frac{\partial u_{t=t_0}}{\partial x}\right|, \dots \left|\frac{\partial w_{t=t_0}}{\partial z}\right| < N(1+R)^{m}.$$

Pour intégrer dans ce cas le système 15, nous commençons par chercher des valeurs approchées u_1, v_1, w_1 de u, v, w. A cet effet, nous omettons les termes $\varrho(w_0\bar{v} + w\bar{v}_0 + \cdots)$ etc. dans le système 15. Le système ainsi obtenu est, aux notations près, identique au système 1 et peut donc s'intégrer par l'application des méthodes exposées dans le premier chapitre. On obtient, les valeurs initiales de u_1, v_1, w_1 étant les mêmes que celles de u, v, w:

$$4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}\,u_1(x, y, z, t) = \frac{\varrho^2}{2\mu}\int u(\xi, \eta, \zeta, t_0)\,E(r, t_0, t)\,\frac{d\omega}{t_0 - t} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} d\tau \int (u'_{\xi} X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + v'_{\xi} Y(\xi, \eta, \zeta, \tau) + w'_{\xi} Z(\xi, \eta, \zeta, \tau))\,d\omega$$

$$4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}\,v_1(x, y, z, t) = \frac{\varrho^2}{2\mu}\int v(\xi, \eta, \zeta, t_0)\,E(r, t_0, t)\,\frac{d\omega}{t_0 - t} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} d\tau \int (u'_{\eta} X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots)\,d\omega,$$

$$4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}\,w_1(x, y, z, t) = \frac{\varrho^2}{2\mu}\int w(\xi, \eta, \zeta, t_0)\,E(r, t_0, t)\,\frac{d\omega}{t_0 - t} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} d\tau \int (u'_{\zeta} X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots)\,d\omega.$$

Ces formules sont valables dans l'intervalle $t_0 \leq t \leq T$. Pour plus de simplicité nous écrirons:

$$u_1^{(1)} = \frac{\varrho^2}{2\mu}\int u(\xi, \eta, \zeta, t_0)\, E(r, t_0, t)\, \frac{d\omega}{t_0 - t}$$

etc.,

$$u_1^{(2)} = \int_{t_0}^{t} d\tau \int u'_\xi X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots)\, d\omega$$

etc., et nous aurons alors:

$$u_1 = u_1^{(1)} + u_1^{(2)},\ v_1 = v_1^{(1)} + v_1^{(2)},\ w_1 = w_1^{(1)} + w_1^{(2)}.$$

Cela posé, je dis que l'on peut trouver un nombre positif c assez grand pour que:

$$\left.\begin{array}{c} |u_1(x, y, z, t)|,\ |v_1(x, y, z, t)|,\ |w_1(x, y, z, t)| < cN, \\ |u_1(x, y, z, t)|,\ |v_1(x, y, z, t)|,\ |w_1(x, y, z, t)| < \dfrac{cN}{(1+R)^\alpha} \\ \left|\dfrac{\partial u_1(x, y, z, t)}{\partial x}\right|, \ldots \left|\dfrac{\partial w_1(x, y, z, t)}{\partial z}\right|,\ \left|\dfrac{\partial u_1(x, y, z, t)}{\partial x}\right|, \ldots \\ \left|\dfrac{\partial w_1(x, y, z, t)}{\partial z}\right| < cN(1+R)^m \end{array}\right\} \tag{16}$$

dans l'intervalle $t_0 \leq t < T$. En effet, les inégalités 12, 13, 14 montrent immédiatement que l'on peut déterminer un nombre positif c tel que:

$$|u_1^{(2)}(x, y, z, t)|, \ldots < \frac{cN}{2},$$

$$|u_1^{(2)}(x, y, z, t)|, \ldots < \frac{cN}{2(1+R)^\alpha},$$

$$\left|\frac{\partial u_1^{(2)}(x, y, z, t)}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial u_1^{(2)}(x, y, z, t)}{\partial x}\right|, \ldots < \frac{cN}{2}(1+R)^m$$

pour $t_0 \leq t \leq T$. Il suffit donc de démontrer que l'on peut choisir c tel que $u_1^{(1)}$ etc. satisfassent aux mêmes inégalités. C'est ce qu'on voit par un calcul analogue à ceux qui nous ont servi à démontrer les inégalités 12, 13 et 14. En effet:

$$\int E(r, t_0, t)\frac{d\omega}{(t-t_0)(1+r)^\alpha} < 4\pi\int_0^{\frac{R}{2}} r^2 E(r, t_0, t)\frac{dr}{(t_0-t)(1+R-r)^\alpha} +$$

$$+4\pi\int_{\frac{R}{2}}^{\infty} r^2 E(r,t_0,t)\frac{dr}{(t-t_0)(1+|R-r|)^\alpha} < \frac{4\cdot 2^\alpha\cdot\pi}{(1+R)^\alpha}\int_0^\infty \xi^2 e^{-\frac{a\xi^2}{4\mu}}d\xi +$$

$$+4\pi\int_{\frac{R}{2}}^{\infty}\xi^2 e^{-\frac{a\xi^2}{4\mu}}d\xi < \frac{4\pi(2^\alpha+1)a_{19}}{(1+R)^\alpha},$$

a_{19} étant un nombre positif, tel que:

$$\xi^2(1+2\sqrt{T-t_0}\,\xi)^{\alpha+2}e^{-\frac{a\xi^2}{4\mu}} < 2a_{19}\sqrt{T-t_0}(1+\alpha)$$

pour des valeurs positives de ξ.

D'autre part:

$$\int (1+r)^m E(r,t_0,t)\frac{d\omega}{t_0-t} < 4\pi\int_0^{\frac{R}{2}}\frac{(1+r+R)^m r^2 e^{-\frac{r^2}{4\mu(t-t_0)}}dr}{\sqrt{(t-t_0)^3}} =$$

$$4\pi\sum_{i=0}^{i=m}\frac{m!}{(m-i)!}(1+R)^i(t-t_0)^{\frac{m-i}{2}}\int_0^\infty \xi^{2+m-i}e^{-\frac{a\xi^2}{4\mu}}d\xi <$$

$$4\pi(1+R)^m\sum_{i=0}^{i=m}\frac{m!}{(m-i)!}(T-t_0)^{\frac{m-i}{2}}\int_0^\infty \xi^{2+m-i}e^{-\frac{a\xi^2}{4\mu}}d\xi.$$

Notre assertion est donc prouvée.

Nous sommes maintenant en état d'intégrer rigoureusement le système 15. A cet effet, nous y introduisons un paramètre auxiliaire λ et l'écrivons comme suit:

$$\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = X - \frac{\partial q}{\partial x} + \mu\Delta u + \lambda\varrho(w_0\bar{v} + w\bar{v}_0 - v_0\bar{w} - v\bar{w}_0),$$

$$\varrho\frac{\partial v}{\partial t} = Y - \frac{\partial q}{\partial y} + \mu\Delta v + \lambda\varrho(u_0\bar{w} + u\bar{w}_0 - w_0\bar{u} - w\bar{u}_0),$$

$$\varrho\frac{\partial w}{\partial t} = Z - \frac{\partial q}{\partial z} + \mu\Delta w + \lambda\varrho(v_0\bar{u} + v\bar{u}_0 - u_0\bar{v} - uv_0),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Pour $\lambda = -1$ ce système devient identique au système 15. Cherchons à y satisfaire par des séries procédant suivant les puissances de λ. Posons donc:

$$u(\lambda) = u_1 + \lambda u_2 + \cdots + \lambda^{n-1} u_n + \cdots$$
$$v(\lambda) = v_1 + \lambda v_2 + \cdots + \lambda^{n-1} v_n + \cdots$$
$$w(\lambda) = w_1 + \lambda w_2 + \cdots + \lambda^{n-1} w_n + \cdots$$
$$q(\lambda) = q_1 + \lambda q_2 + \cdots + \lambda^{n-1} q_n + \cdots$$

Pour déterminer u_1, v_1 etc. on obtient les équations suivantes:

$$\varrho \frac{\partial u_1}{\partial t} = X - \frac{\partial q_1}{\partial x} + \mu \Delta u_1,$$
$$\varrho \frac{\partial v_1}{\partial t} = Y - \frac{\partial q_1}{\partial y} + \mu \Delta v_1,$$
$$\varrho \frac{\partial w_1}{\partial t} = Z - \frac{\partial q_1}{\partial z} + \mu \Delta w_1,$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0$$

$$u_{1_{t=t_0}} = u(x, y, z, t_0),\ v_{1_{t=t_0}} = v(x, y, z, t_0),\ w_{1_{t=t_0}} = w(x, y, z, t_0);$$

$$\varrho \frac{\partial u_2}{\partial t} = -\frac{\partial q_2}{\partial x} + \mu \Delta u_2 + \varrho (w_0 \bar{v}_1 + w_1 \bar{v}_0 - v_0 \bar{w}_1 - v_1 \bar{w}_0)$$

. . . . . .

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0$$

$$u_{2_{t=t_0}} = v_{2_{t=t_0}} = w_{2_{t=t_0}} = 0,$$

et, en général:

$$\varrho \frac{\partial u_n}{\partial t} = -\frac{\partial q_n}{\partial x} + \mu \Delta u_n + \varrho (w_0 \bar{v}_{n-1} + w_{n-1} \bar{v}_0 - v_0 \bar{w}_{n-1} - v_{n-1} \bar{w}_0),$$

. . . . . .

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} + \frac{\partial w_n}{\partial z} = 0$$

$$u_{n_{t=t_0}} = v_{n_{t=t_0}} = w_{n_{t=t_0}} = 0.$$

On voit qu'il est loisible de choisir pour u_1, v_1, w_1 les fonctions que nous avons ainsi désignées plus haut et que l'on peut satisfaire aux équations différentielles pour $u_2, \ldots$ etc. par les fonctions définies par les équations suivantes:

$$4\pi \sqrt{\mu \varrho \pi}\, u_2(x, y, z, t) = \varrho \int_{t_0}^{t} d\tau \int (w_0 \bar{v}_1 + w_1 \bar{v}_0 - v_0 \bar{w}_1 - v_1 \bar{w}_0)_{\substack{x=\xi,\ldots \\ t=\tau}} u'_\xi + \cdots)\, d\omega$$

etc., et, en général:

$$4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}\, u_n(x, y, z, t) = \varrho \int_{t_0}^{t} d\tau \int (w_0 v_{n-1} + w_{n-1} v_0 - v_0 w_{n-1} - v_{n-1} \bar{w}_0)_{\substack{x=\xi,\ldots \\ t=\tau}} u'_\xi + \cdots) d\omega \quad (17)$$

etc., pourvu que les fonctions $w_0 v_1 + w_1 v_0 - v_0 w_1 - v_1 w_0$ etc., en général: $w_0 v_{n-1} + w_{n-1} v_0 - v_0 w_{n-1} - v_{n-1} w_0$ etc. soient continues ainsi que leurs dérivées du premier ordre par rapport à x, y, z et qu'elles remplissent des inégalités de la forme:

$$|w_0 v_{n-1} + w_{n-1} v_0 - v_0 w_{n-1} - v_{n-1} w_0|, \ldots < \frac{A}{(1+R)^\varepsilon}$$

$$(\varepsilon > 0).$$

Or nous savons que $u_0, \ldots u_0, \ldots u_1, \ldots u_1, \ldots$ sont des fonctions de x, y, z, t, continues ainsi que leurs dérivées du premier ordre par rapport à x, y, z dans l'intervalle $t_0 \leqq t \leqq T$ et que l'on a:

$$|w_0 v_1 + w_1 v_0 - v_0 w_1 - v_1 w_0|, \ldots < \frac{4cMN}{(1+R)^a}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(w_0 \bar{v}_1 + w_1 \bar{v}_0 - v_0 \bar{w}_1 - v_1 \bar{w}_0)\right|, \ldots < 8cMN(1+R)^m.$$

Il suit de là que les fonctions u_2, v_2, w_2, définies par les formules précédentes, sont des fonctions de x, y, z, t, continues dans l'intervalle $t_0 < t \leq T$ et douées des dérivées continues des deux premiers ordres par rapport à x, y, z dans le même intervalle. Les inégalités 12—14 montrent de plus que l'on peut déterminer un nombre positif c_1 tel que:

$$|u_2(x, y, z, t)|,\ |v_2(x, y, z, t)|,\ |w_2(x, y, z, t)| < cc_1 MN(t - t_0)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\frac{\partial u_2(x, y, z, t)}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial w_2(x, y, z, t)}{\partial z}\right| < \frac{cc_1 MN(t - t_0)^{\frac{1}{2}}}{2(1+R)^a},$$

$$\left|\frac{\partial u_2(x, y, z, t)}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial w_2(x, y, z, t)}{\partial z}\right| < cc_1 MN(1+R)^m (t - t_0)^{\frac{1}{2}}$$

dans l'intervalle $t_0 \leqq t \leqq T$. Il résulte de là que u_3, v_3, w_3, continues ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres par rapport à x, y, z dans l'intervalle $t_0 \leqq t \leqq T$, satisfont aux inégalités:

$$|u_2(x,y,z,t)|,\ |v_2(x,y,z,t)|,\ |w_3(x,y,z,t)| < cc_1^2 M^2 N (t-t_0),$$

$$\left|\frac{\partial u_3(x,y,z,t)}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial w_3(x,y,z,t)}{\partial z}\right| < \frac{cc_1^2 M^2 N (t-t_0)}{2(1+R)^a},$$

$$\left|\frac{\partial u_3(x,y,z,t)}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial w_3(x,y,z,t)}{\partial z}\right| < cc_1^2 M^2 N (1+R)^m (t-t_0)$$

et ainsi de suite. On voit donc que u_n, v_n, w_n pour toute valeur entière et positive de n sont des fonctions de x, y, z, t, continues ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres par rapport à x, y, z et du premier ordre par rapport à t pour $t_0 < t \leq T$ et que l'on a:

$$|u_n(x,y,z,t)|, \ldots < cN\left[c_1 M (t-t_0)^{\frac{1}{2}}\right]^{n-1},$$

$$\left|\frac{\partial u_n(x,y,z,t)}{\partial x}\right|, \ldots < \frac{cN\left[c_1 M (t-t_0)^{\frac{1}{2}}\right]^{n-1}}{2(1+R)^a},$$

$$\left|\frac{\partial u_n(x,y,z,t)}{\partial x}\right|, \ldots < cN(1+R)^m\left[c_1 M (t-t_0)^{\frac{1}{2}}\right]^{n-1}$$

dans l'intervalle $t_0 \leq t \leq T$.

Considérons maintenant les séries:

$$\sum_1^\infty \lambda^{n-1} u_n,\ \sum_1^\infty \lambda^{n-1} v_n,\ \sum_1^\infty \lambda^{n-1} w_n,\ \sum_1^\infty \lambda^{n-1}\frac{\partial u_n}{\partial x}, \ldots$$

$$\sum_1^\infty \lambda^{n-1}\frac{\partial w_n}{\partial z},\ \sum_1^\infty \lambda^{n-1}\frac{\partial u_n}{\partial x}, \ldots \sum_1^\infty \lambda^{n-1}\frac{\partial w_n}{\partial z}.$$

Les inégalités précédentes montrent qu'elles sont absolument et uniformément convergentes dans tout domaine fini de l'espace pourvu que:

$$|\lambda (t-t_0)^{\frac{1}{2}}| < \frac{1}{c_1 M}.$$

Posons donc:

$$u = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} u_n,\ v = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} v_n,\ w = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} w_n,$$

$$u' = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} u_n,\ v' = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} v_n,\ w' = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} w_n.$$

$u, v, w, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ sont alors des fonctions de x, y, z, t, continues dans l'intervalle $t_0 \leq t \leq t_1$ où $t_0 < t_1 < t_0 + \frac{1}{c_1^2 M^2}$. Elles admettent dans le même intervalle des dérivées continues par rapport à x, y, z, et on a:

$$u = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Les équations 17 etc. donnent maintenant:

$$4\pi \sqrt{\mu\varrho\iota}\, u(x,y,z,t) = 4\pi \sqrt{\mu\varrho\iota}\, u_1(x,y,z,t) - \varrho \int_{t_0}^{t} dt \int \Big[(w_0 \bar{v} + \\ + w v_0 - v_0 w - v w_0)_{\substack{x=\xi,\dots \\ t=\tau}} u' \xi + \cdots\Big] d\omega$$

etc. De ces équations, on conclut que u, v, w admettent des dérivées du second ordre par rapport à x, y, z et du premier ordre par rapport t, continues pour $t_0 < t \leq t_1$. Posons maintenant:

$$q = \sqrt{\mu\varrho\iota} \int \Big[X - \varrho(w_0 \bar{v} + w \bar{v}_0 - v_0 w - v \bar{w}_0)_{\substack{x=\xi,\dots \\ t=\tau}} \Big(\frac{\partial}{\partial \xi}\Big(\frac{1}{r}\Big) - \frac{\partial}{\partial \xi}\Big(\frac{1}{\bar{r}}\Big)\Big) + \cdots\Big] d\omega.$$

Nous aurons pour $t_0 < t \leq t_1$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \Delta u = X - \varrho(w_0 v + w v_0 - v_0 w - v w_0) - \frac{\partial q}{\partial x},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Nous avons d'ailleurs:

$$\lim_{t=t_0} u = \lim_{t=t_0} u_1, \ \lim_{t=t_0} v = \lim_{t=t_0} v_1, \ \lim_{t=t_0} w = \lim_{t=t_0} w_1.$$

Notre problème est donc résolu dans l'intervalle $t_0 \leq t \leq t_1$.

Pour aller plus loin nous observons que l'on a:

$$|u(x,y,z,t_1)|, \ |v(x,y,z,t_1)|, \ |w(x,y,z,t_1)| < \frac{cN}{1 - c_1 M (t_1 - t_0)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\Big|\frac{\partial u(x,y,z,t_1)}{\partial x}\Big|, \dots \Big|\frac{\partial w(x,y,z,t_1)}{\partial z}\Big| < \frac{cN}{2(1 - c_1 M (t_1 - t_0)^{\frac{1}{2}})(1+R)^a},$$

$$\Big|\frac{\partial \bar{u}(x,y,z,t_1)}{\partial x}\Big|, \dots \Big|\frac{\partial \bar{w}(x,y,z,t_1)}{\partial z}\Big| < \frac{cN(1+R)^m}{1 - c_1 M (t_1 - t_0)^{\frac{1}{2}}}.$$

Cherchons maintenant à calculer u, v, w pour $t > t_1$. Les inégalités obtenues montrent que l'on peut employer le même procédé qui nous a servi à calculer les valeurs de ces fonctions pour $t_0 < t \leq t_1$, en remplaçant seulement t_0 par t_1. On obtient de cette manière les valeurs de u, v, w pour $t_1 < t \leq t_1 + t$, en posant $t_1 - t_0 = t$. En continuant ainsi, on peut, du moins théoriquement, calculer les valeurs de u, v, w pour chaque point de l'espace et pour $t_0 < t \leq T$.

Nous avons construit un système de solutions de notre problème. Ce système, est il unique? La réponse est négative. Considérons pour le voir l'exemple suivant. Posons $X = Y = Z = 0$, $u_0 = v_0 = w_0 = 0$, $u(x, y, z, t_0) = v(x, y, z, t_0) = w(x, y, z, t_0) = 0$. Un système de solutions sera évidemment $u = v = w = 0$, $q = \text{const}$. Mais il existe une infinité d'autres systèmes. Par exemple: $u = t - t_0$, $v = w = 0$, $q = -\varrho x$.

Il faut donc, pour déterminer u, v, w sans ambiguïté, introduire des conditions supplémentaires. Convenons de nous borner aux systèmes de solutions pour lesquelles on peut trouver deux nombres positifs a' et M', tels que:

$$|u|, |v|, |w|, \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial w}{\partial z}\right| < \frac{M'}{(1 + R)^{a'}},$$

$$|p| < M'(1 + R)^{1-a'}$$

dans tout l'espace et dans l'intervalle considéré du temps. Je dis qu'il existe tout au plus un système de solutions de cette espèce correspondant aux conditions aux limites données. Soient en effet $u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)}, q^{(1)}$; $u^{(2)}, v^{(2)}, w^{(2)}, q^{(2)}$ deux systèmes différents, satisfaisant au système 15, $u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)}$ et $u^{(2)}, v^{(2)}, w^{(2)}$ d'ailleurs prenant les mêmes valeurs pour $t = t_0$. Les différences $u^{(1)} - u^{(2)} = U$, $v^{(1)} - v^{(2)} = V$, $w^{(1)} - w^{(2)} = W$, $q^{(1)} - q^{(2)} = Q$ forment alors un système de solutions du système:

$$\varrho \frac{\partial U}{\partial t} + \varrho(w_0 V + W v_0 - v_0 W - V w_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x} + \mu \Delta U,$$

. . . . . .

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0,$$

et on a $U = V = W = 0$ pour $t = t_0$. Soit $S(r')$ une sphère $r = r'$. Appliquons au problème précédent et à l'intérieur de cette sphère les formules 5 du chap. I. Nous aurons $(t > t_0)$:

$$4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}\,U(x,y,z,t) = -\varrho\int_{t_0}^{t} d\tau \int \Big[(w_0 V + W v_0 - v_0 W -$$

$$- V w_0)_{\substack{x=\xi,\dots \\ t=\tau}} u'_\xi + \cdots\Big] d\omega - \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{S(r')} \Big[u'_\xi \Big(\mu \frac{dU}{dn} - p\cos nx\Big)_{\substack{x=\xi,\dots \\ t=\tau}} + \cdots\Big] dS +$$

$$+ \mu \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{S(r')} \Big(U\frac{du'_\xi}{dn} + V\frac{dv'_\xi}{dn} + W\frac{dw'_\xi}{dn}\Big) dS - \sqrt{\mu\varrho\pi}\int_{S(r')} (U\cos nx + \cdots)_{\substack{x=\xi,\dots \\ t=\tau}} \frac{\xi - x}{r^3} dS$$

etc. Si maintenant r' tend vers l'infini, les intégrales de surface dans ces formules tendent vers zéro et nous obtenons:

$$4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}\,U(x,y,z,t) = -\varrho\int_{t_0}^{t} d\tau \int [(w_0 \overline{V} + W v_0 - v_0 W - V w_0)_{\substack{x=\\ t=\tau}} u'_\xi + \cdots] d\omega$$

etc. Les inégalités 12 et 13 montrent alors que l'on peut trouver un nombre positif c_2 tel que pour $t_0 < t \leq T$:

$$|U(x,y,z,t)|,\ |V(x,y,z,t)|,\ |W(x,y,z,t)|,\ |U(x,y,z,t)(1+R)^{\alpha'}|,$$

$$|V(x,y,z,t)(1+R)^{\alpha'}|,\ |W(x,y,z,t)(1+R)^{\alpha'}| <$$

$$c_2 M M' \sqrt{t - t_0}\ \operatorname*{Max}_{t_0 \leq \tau \leq t} \{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2 + (1+R)^{2\alpha'}(U^2 + V^2 + W^2)}\}_{t=\tau}$$

en désignant par $\operatorname{Max} f(x,y,z,\tau)$ la plus grande valeur de f aux différents point de l'espace dans l'intervalle du temps indiqué. Soit t' un nombre assujetti aux conditions:

$$t_0 < t' < t_0 + \frac{1}{16 c_2^2 M^2 M'^2}.$$

Nous aurons dans l'intervalle $t_0 \leq t \leq t'$:

$$|U|, \dots |\overline{U}(1+R)^{\alpha'}|, \dots < \frac{1}{4} \operatorname*{Max}_{t_0 \leq \tau \leq t'} \{\sqrt{U^2 + \cdots + (1+R)^{2\alpha'}(\overline{U}^2 + \cdots)}\}_{t=\tau}.$$

Donc pour $t_0 \leq t \leq t'$:

$$U^2 + V^2 + W^2 + (1+R)^{2\alpha'}(\overline{U}^2 + \overline{V}^2 + \overline{W}^2) < \frac{3}{8} \operatorname*{Max}_{t_0 \leq \tau \leq t'} (U^2 + V^2 +$$

$$+ W^2 + (1+R)^{2\alpha'}(U^2 + V^2 + W^2)).$$

Si U, V, W ne sont pas identiquement nuls dans l'intervalle $t_0 < t \leq t'$ on parvient donc à une contradiction. Il faut donc supposer $u^{(1)} = u^{(2)}$, $v^{(1)} = v^{(2)}$, $w^{(1)} = w^{(2)}$ dans cet intervalle. En continuant de la même manière, on voit que l'on a partout $u^{(1)} = u^{(2)}$, $v^{(1)} = v^{(2)}$, $w^{(1)} = w^{(2)}$.

3. Plus difficile que la question traitée dans le dernier paragraphe est le problème de calculer les composantes de la vitesse d'un mouvement fini dans un fluide indéfini. La méthode des approximations successives de M. Picard permet dans ce cas aussi de calculer u, v, w dans un intervalle $t_0 \leq t \leq t_0 + t$, ces fonctions étant connues pour $t = t_0$. Mais la longueur de cet intervalle dépend dans ce cas des fonctions données $u(x, y, z, t_0)$ etc. de sorte que, si l'on veut poursuivre le calcul, on obtiendra un nouvel intervalle $t_0 + t \leq t \leq t_0 + t + t_1$, où t_1 en général ne sera pas identique à t. Si les nombres t, t_1 etc. forment une série convergente, le calcul sera donc arrêté pour une valeur finie de t. D'après notre théorie, il paraît donc vraisemblable que des irrégularités peuvent naître dans l'intérieur d'un fluide visqueux et incompressible, même dans le cas où les forces extérieures et le mouvement initial sont complètement réguliers.

Nous supposons de nouveau que les fonctions données $u(x, y, z, t_0)$ etc. soient des fonctions continues de x, y, z, douées des dérivées continues du premier ordre et remplissant l'équation:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Nous supposons de plus que les fonctions $u(x, y, z, t_0)$ etc. admettent des dérivées continues par rapport à x, y, z et que l'on peut trouver deux nombres positifs α et N ($\alpha \leq 1$) et un entier m tels que:

$$|u(x, y, z, t_0)|, \ldots < M,$$

$$|u(x, y, z, t_0)|, \ldots < \frac{M}{(1 + R)^{\alpha}}$$

$$\left|\frac{\partial u(x, y, z, t_0)}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial u(x, y, z, t_0)}{\partial x}\right|, \ldots < M(1 + R)^m$$

et que, pour $t_0 \leq t \leq T$:

$$|X(x, y, z, t)|, \ldots < \frac{M}{(1 + R)^{\alpha}},$$

$$\left|\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right|, \ldots < M(1 + R)^m$$

Nous considérons alors le système:

$$\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = X - \frac{\partial q}{\partial x} + \mu\Delta u + \lambda\varrho(wv - vw),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

qui se réduit pour $\lambda = -1$ aux équations du mouvement d'un fluide visqueux et incompressible. Nous cherchons un système de solutions, correspondant aux fonctions données $u(x, y, z, t_0)$ etc. et procédant suivant les puissances de λ. Posons:

$$u(\lambda) = u_1 + u_2\lambda + \cdots$$

$$v(\lambda) = v_1 + v_2\lambda + \cdots$$

$$w(\lambda) = w_1 + w_2\lambda + \cdots$$

$$q(\lambda) = q_1 + q_2\lambda + \cdots$$

Nous aurons:

$$\varrho\frac{\partial u_1}{\partial t} = X - \frac{\partial q_1}{\partial x} + \mu\Delta u_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0,$$

$$u_1(x, y, z, t_0) = u(x, y, z, t_0) \text{ etc.},$$

et pour $n = 2, 3, \ldots$

$$\left.\begin{aligned} \varrho\frac{\partial u_n}{\partial t} &= -\frac{\partial q_n}{\partial x} + \mu\Delta u_n + \varrho\sum_{i=1}^{i=n-1}(u_i v_{n-i} - v_i w_{n-i}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} + \frac{\partial w_n}{\partial z} &= 0, \\ u_n(x, y, z, t_0) = v_n(x, y, z, t_0) &= w_n(x, y, z, t_0) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Nous pouvons donc poser, pour $t > t_0$:

$$4\pi\sqrt{\mu\varrho^3}\,u_1(x, y, z, t) = \frac{\varrho^2}{2\mu}\int u(\xi, \eta, \zeta, t_0)\,E(r, t_0, t)\,d\omega +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} d\tau \int [(u'_\xi X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots]\,d\omega$$

etc..

$$4\pi V\varrho_0 u_n(x,y,z,t) = \varrho \int_{t_0}^{t} dr \iint \left[u'_\xi \sum_{i=1}^{i=n-1} (w_i v_{n-i} - v_i w_{n-i})_{\substack{x=\xi,\dots \\ t=t}} + \cdots \right] d\omega \qquad (19)$$

etc. pourvu que les expressions:

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} (w_i \bar{v}_{n-i} - v_i \bar{w}_{n-i})$$

etc., remplissent les conditions nécessaires pour que les intégrales ci-dessus soient convergentes et admettent des dérivées satisfaisant au système 18.

Nous avons démontré dans le paragraphe dernier que l'on peut déterminer un nombre positif c tel que:

$$|u_1|,\ |v_1|,\ |w_1| < cM,$$

$$|u_1(x,y,z,t)|, \dots < \frac{cM}{(1+R)^\alpha},$$

$$\left|\frac{\partial u_1(x,y,z,t)}{\partial x}\right|, \dots \left|\frac{\partial w_1(x,y,z,t)}{\partial z}\right|, \left|\frac{\partial u_1(x,y,z,t)}{\partial x}\right|, \dots$$

$$\left|\frac{\partial w_1(x,y,z,t)}{\partial z}\right| < cM(1+R)^m$$

dans l'intervalle $t_0 \leq t < T$. Il résulte de ces inégalités que les formules 19 définissent des fonctions u_2, v_2, w_2, qui satisfont au système 18. Soit c' une quantité positive égale au plus grand des nombres $4n_1, 4n_2, 8n_3, n_1, n_2, n_3$ étant les nombres qui figurent dans les inégalités 12, 13, 14. Nous aurons pour $t_0 \leq t \leq T$:

$$|u_2|,\ |v_2|,\ |w_2| < \varrho c^2 c' M^2 (t-t_0)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\frac{\partial u_2(x,y,z,t)}{\partial x}\right|, \dots \left|\frac{\partial w_2(x,y,z,t)}{\partial z}\right| < \frac{\varrho c^2 c' M^2 (t-t_0)^{\frac{1}{2}}}{(1+R)^\alpha},$$

$$\left|\frac{\partial u_2(x,y,z,t)}{\partial x}\right|, \dots \left|\frac{\partial w_2(x,y,z,t)}{\partial z}\right| < \varrho c^2 c' M^2 (1+R)^m (t-t_0)^{\frac{1}{2}}.$$

Il suit de là que les formules 19 définissent des fonctions u_3, v_3, w_3, qui satisfont au système 18 et ainsi de suite.

Soit maintenant $a_1, a_2, a_3, \dots$ une suite de nombres positifs, définie par les égalités:

$$a_1 = 1,\ a_n = \sum_{i=1}^{i=n-1} a_i a_{n-i}.$$

Je dis que l'on a pour $t_0 < t < T$:

$$|u_n|,\ |v_n|,\ |w_n| < \frac{a_n}{\varrho c'(t-t_0)^{\frac{1}{2}}}(\varrho c c' M (t-t_0)^{\frac{1}{2}})^n,$$

$$\left|\frac{\partial u_n(x,y,z,t)}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial w_n(x,y,z,t)}{\partial z}\right| < \frac{a_n}{\varrho c'(1+R)^n (t-t_0)^{\frac{1}{2}}}(\varrho c c' M (t-t_0)^{\frac{1}{2}})^n.$$

$$\left|\frac{\partial u_n(x,y,z,t)}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial w_n(x,y,z,t)}{\partial z}\right| < \frac{a_n (1+R)^n}{\varrho c'(t-t_0)^{\frac{1}{2}}}(\varrho c c' M (t-t_0)^{\frac{1}{2}})^n$$

pour toute valeur entière et positive de n. En effet, ces inégalités sont vraies pour $n = 1$ et $n = 2$. Supposons qu'elles soient vraies pour $n = 1, 2, \ldots m-1$. On aura alors:

$$\left|\sum_{i=1}^{i=m-1}(w_i v_{m-i} - v_i w_{m-i})\right| < \frac{4(\varrho c c' M (t-t_0)^{\frac{1}{2}})^m}{\varrho^2 c^2 (t-t_0)} \sum_{i=1}^{i=m-1} a_i a_{m-i} < \frac{4 a_m (\varrho c c' M (t-t_0)^{\frac{1}{2}})^m}{\varrho^2 c'^2 (t-t_0)}.$$

Donc:

$$|u_m|,\ |v_m|,\ |w_m| < \frac{a_m}{\varrho c'(t-t_0)^{\frac{1}{2}}}(\varrho c c' M (t-t_0)^{\frac{1}{2}})^m$$

etc. Notre assertion est donc prouvée.

Considérons maintenant la série:

$$\sum_1^\infty a_n x^{n-1}. \tag{20}$$

Si cette série pour des valeurs suffisamment petites de $|x|$ est convergente, elle définit une fonction y de x qui doit satisfaire à l'équation algébrique:

$$y^2 \quad \frac{y-1}{x}.$$

Or cette équation admet la solution:

$$y \quad \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x} \quad 1 + x \ldots$$

Donc la série 20 est absolument et uniformément convergente pour $|x| < \frac{1}{4} - \delta$ ($\delta > 0$). Il suit de là que les séries:

$$\sum_1^\infty u_n x^{n-1}, \ldots \sum_1^\infty \frac{\partial u_n}{\partial x} x^{n-1}, \ldots \sum_1^\infty \frac{\partial w_n}{\partial x} x^{n-1}, \ldots$$

sont absolument et uniformément convergentes pour

$$|\lambda(t - t_0)^{\frac{1}{2}}| < \frac{1}{4\varrho c c' M} - \delta \qquad (\delta > 0).$$

Posons pour $t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{1}{16\varrho^2 c^2 c'^2 M^2} - \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$:

$$u = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} u_n, \quad v = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} v_n, \quad w = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} w_n.$$

Ces fonctions satisferont au système:

$$\varrho \frac{\partial u}{\partial t} + \varrho (wv - vw) = X - \frac{\partial q}{\partial x} + \mu \Delta u,$$

. . . . . .

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

La démonstration est analogue à celle que nous avons donnée dans le paragraphe précédent pour un théorème analogue. Pour $t = t_0$, u, v, w prennent d'ailleurs les valeurs données. Notre problème est donc résolu.

Dans certains cas, une autre forme de la méthode des approximations successives est plus favorable que celle que nous avons employée ici. Soit u_0, v_0, w_0 un système de solutions approchés du problème. Calculons les fonctions u_n, v_n, w_n, q_n qui satisfont aux systèmes différentiels:

$$\varrho \frac{\partial u_n}{\partial t} - \mu \Delta u_n + \frac{\partial q_n}{\partial x} = X - \varrho (w_{n-1} v_{n-1} - v_{n-1} w_{n-1}),$$

. . . . . .

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} + \frac{\partial w_n}{\partial z} = 0$$

et aux conditions aux limites:

$$u_{n\,t=t_0} = u(x, y, z, t_0) \text{ etc.}$$

On peut alors démontrer que l'on a dans un certain intervalle du temps et sous certaines conditions très générales:

$$u = \lim_{n=\infty} u_n, \quad v = \lim_{n=\infty} v_n, \quad w = \lim_{n=\infty} w_n.$$

Cette méthode est applicable si, pour $t = t_0$, le mouvement du fluide est irrotationel à l'exception d'un certain nombre de tubes tourbillonaires. On prend alors pour u_0, v_0, w_0 les solutions fournies par la théorie des tourbillons dans un fluide idéal.

Montrons enfin qu'il ne peut pas exister deux systèmes de solutions différents $u^{(1)}$, $v^{(1)}$, $w^{(1)}$, $q^{(1)}$ et $u^{(2)}$, $v^{(2)}$, $w^{(2)}$, $q^{(2)}$ correspondants aux mêmes fonctions données et assujettis aux conditions:

$$|u|, \ldots \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, \ldots < \frac{M'}{(1+R)^{\alpha'}},$$

$$|p| < M'(1+R)^{1-\alpha'},$$

$$\alpha' > 0.$$

En effet, dans ce cas les différences $u^{(1)} - u^{(2)} = U$ etc., satisferaient au système:

$$\varrho \frac{\partial U}{\partial t} + \varrho (W v^{(1)} + V w^{(2)} - V w^{(1)} - W v^{(2)}) \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} + u \Delta U,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \qquad 0,$$

que nous pouvons considérer comme un système linéaire, $u^{(1)}$, $v^{(1)}$, $w^{(1)}$, $u^{(2)}$, $v^{(2)}$, $w^{(2)}$ étant des fonctions connues. Or nous avons vu que ce système et les conditions aux limites:

$$U_{t=t_0} = V_{t=t_0} = W_{t=t_0} = 0$$

exigent que l'on a identiquement $U = V = W = 0$.

III.

Les formules de Green généralisées dans certains problèmes particuliers.

1. Le mouvement infiniment lent et permanent d'un fluide visqueux et incompressible est régi par le système différentiel:

$$\begin{aligned} \mu \Delta u - \frac{\partial p}{\partial x} + X &= 0, \\ \mu \Delta v - \frac{\partial p}{\partial y} + Y &= 0, \\ \mu \Delta w - \frac{\partial p}{\partial z} + Z &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Nous supposerons dans les recherches suivantes que les dérivées de u, v, w et p, qui figurent dans ces équations soient des fonctions continues de x, y, z dans l'intérieur du fluide considéré et que X, Y, Z dans le même domaine soient des fonctions uniformes de x, y, z, continues ainsi que leurs dérivées du premier ordre.

Soit S une surface fermée dans l'intérieur d'un fluide, ω_i la partie de l'espace qui se trouve à l'intérieur de S, x_0, y_0, z_0 un point quelconque de ω_i et $\omega_i(r')$ la partie de ω_i qui est située à l'extérieur de la sphère $r = r'$, où:

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Posons:

$$u'_x = \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}, \quad v'_x = -\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}, \quad w'_x = -\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z}, \quad p'_x = -2\mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Ces fonctions satisfont au système:

$$\begin{aligned} \mu \Delta u'_x - \frac{\partial p'_x}{\partial x} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_x}{\partial y} + \frac{\partial w'_x}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Formons l'équation:

$$\mu \iiint_{\omega_i (r')} [u'_x \Delta u + v'_x \Delta v + w'_x \Delta w - u \Delta u'_x - v \Delta v'_x - w \Delta w'_x] \, dx\, dy\, dz -$$

$$- \iiint_{\omega_i (r')} \left[u'_x \frac{\partial p}{\partial x} + \cdots - u \frac{\partial p'_x}{\partial x} - \cdots \right] dx\, dy\, dz +$$

$$+ \iiint_{\omega_i (r')} (X u'_x + Y v'_x + Z w'_x) \, dx\, dy\, dz = 0.$$

Elle nous donne:

$$-\mu\int_S\left[u'_x\frac{du}{dn}+\cdots-u\frac{du'_x}{dn}-\cdots\right]dS+\int_S[(u'_x\cos nx+\cdots)p-(u\cos nx+\cdots)p'_x]dS+$$

$$+\int_{\omega_i}\int_{(r')}(Xu'_x+Yv'_x+Zw'_x)\,dx\,dy\,dz=-\mu\int_{r=r'}\left(u\frac{du'_x}{dn}+\cdots-u'_x\frac{du}{dn}-\cdots\right)dS-$$

$$-\int_{r=r'}[(u'_x\cos nx+\cdots)p-(u\cos nx+\cdots)p'_x]dS,$$

où n désigne la normale intérieure du domaine $\omega(r')$. Faisons r' tendre vers zero. Nous obtiendrons:

$$8\pi\mu u(x_0,y_0,z_0)=-\mu\int_S\left(u'_x\frac{du}{dn}+\cdots-u\frac{du'_x}{dn}-\cdots\right)dS+$$

$$+\int_S[(u'_x\cos nx+\cdots)p-(u\cos nx+\cdots)p'_x]dS+\int_{\omega_i}\int\int(Xu'_x+\cdots)\,dx\,dy\,dz.$$

On a évidemment deux formules analogues pour $v(x_0,y_0,z_0)$ et $w(x_0,y_0,z_0)$. Pour obtenir la formule correspondante pour $p(x_0,y_0,z_0)$, nous posons:

$$u'=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{x-x_0}{r^3},\quad v'=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{y-y_0}{r^3},\quad w'=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{z-z_0}{r^3},\quad p'=0.$$

u', v', w' et p' satisfont au système 22. Nous avons donc:

$$-\mu\int_S\left[u'\frac{du}{dn}+\cdots-u\frac{du'}{dn}-\cdots\right]dS+\int_S(u'\cos nx+\cdots)\,p\,dS+$$

$$+\int_{\omega_i}\int_{(r')}(Xu'+Yv'+Zw')\,dx\,dy\,dz=\mu\int_{r=r'}\left[u'\frac{du}{dn}+\cdots\right.$$

$$\left.-u\frac{du'}{dn}-\cdots\right]dS-\int_{r=r'}(u'\cos nx+\cdots)\,p\,dS.$$

Le passage à la limite donne:

$$4\pi p(x_0,y_0,z_0)=-\mu\int_S\left[u'\frac{du}{dn}+\cdots-u\frac{du'}{dn}-\cdots\right]dS+$$

$$+\int_S(u'\cos nx+\cdots)\,p\,dS+\int_{\omega_i}\int\int(Xu'+Yv'+Zw')\,dx\,dy\,dz$$

En changeant nos notations, nous pouvons écrire nos formules de la manière suivante:

$$
\left.\begin{aligned}
&8\pi\mu\, u(x,y,z) = -\mu\int_S \left(u'_\xi \frac{du}{dn} + \cdots - u\frac{du'_\xi}{dn} - \cdots\right) dS + \\
&+ \int_S [u'_\xi \cos nx + \cdots)\, p - (u\cos nx + \cdots)\, p'_\xi]\, dS + \\
&+ \int_{\omega_i} (X(\xi,\eta,\zeta)\, u'_\xi + Y(\xi,\eta,\zeta)\, v'_\xi + Z(\xi,\eta,\zeta)\, w'_\xi)\, d\omega \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&4\pi p(x,y,z) = \mu\int_S \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{du}{dn} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dv}{dn} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dw}{dn} - \right. \\
&\left. - u\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) - v\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) - w\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS - \int_S \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) p\, dS + \\
&+ \int_{\omega_i} \left(X(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right) + Y(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{r}\right) + Z(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{r}\right)\right) d\omega.
\end{aligned}\right\} \quad (23)
$$

On a ici:

$$
r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},
$$

$$
u'_\xi = \frac{\partial^2 r}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial\zeta^2}, \quad v'_\xi = -\frac{\partial^2 r}{\partial\xi\,\partial\eta}, \quad w'_\xi = -\frac{\partial^2 r}{\partial\xi\,\partial\zeta},
$$

$$
u'_\eta = -\frac{\partial^2 r}{\partial\xi\,\partial\eta} \text{ etc.},
$$

$$
\frac{d}{dn} = \cos nx\frac{\partial}{\partial\xi} + \cos ny\frac{\partial}{\partial\eta} + \cos nz\frac{\partial}{\partial\zeta},
$$

$$
d\omega = d\xi\, d\eta\, d\zeta.
$$

Dans les intégrales de surface, ξ, η, ζ sont les coordonnées d'un point de la surface S.

Les formules 23 sont, aux notations près, identiques à celles que l'on doit à M. Lorentz.

On voit aisément que les fonctions $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$, $p(x,y,z)$, définies par les formules 23, si, sur la surface S, on y considère $u, v, w, \frac{du}{dn}, \frac{dv}{dn}, \frac{dw}{dn}$,

p comme des fonctions connues et continues, satisfont au système 21 dans l'intérieur du domaine ω_i, au moins dans le cas, où ω_i est une partie finie de l'espace et les fonctions X, Y, Z admettent des dérivées continues du premier ordre.

Envisageons maintenant les intégrales:

$$\int (X(\xi, \eta, \zeta)\, u' + \cdots)\, d\omega,$$

$$\int (X(\xi, \eta, \zeta)\, u'_\eta + \cdots)\, d\omega,$$

$$\int (X(\xi, \eta, \zeta)\, u'_\zeta + \cdots)\, d\omega,$$

l'intégration étant étendue à l'espace entier. Si X, Y, Z remplissent des inégalités de la forme:

$$|X(\xi, \eta, \zeta)|, \ldots < \frac{M}{(1 + r)^{2+\alpha}},$$

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \qquad \alpha > 0,$$

ces intégrales ont un sens déterminé et définissent des fonctions de x, y, z, continues et douées des dérivées continues du premier ordre. Elles admettent des dérivées continues du second ordre, si X, Y, Z en admettent du premier ordre et satisfont dans ce cas au système 21, si l'on y pose:

$$p = \frac{1}{4\pi} \int \left(X(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r} \right) + \cdots \right) d\omega.$$

2. Soit $A(\xi, \eta, \zeta)$ une fonction de ξ, η, ζ, continue dans chaque point de l'espace et remplissant l'inégalité:

$$|A(\xi, \eta, \zeta)| < \frac{M}{(1 + r)^{1+\beta}},$$

$$\alpha < \beta < 2.$$

Nous cherchons dans ce cas une limite supérieure pour la valeur absolue de l'intégrale:

$$I = \int \frac{A(\xi, \eta, \zeta)\, d\omega}{r^2},$$

l'intégration étendue à l'espace entier.

Divisons l'espace en trois parties, ω_1, ω_2, ω_3, par les sphères $\bar{r} = \frac{R}{2}$ et $\bar{r} = \frac{3R}{2}$ ($R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$), ω_1 étant la partie que se trouve à l'intérieur de la sphère $\bar{r} = \frac{R}{2}$ et ω_3 celle à l'extérieur de la sphère $\bar{r} = \frac{3R}{2}$. Soient I_1, I_2 et I_3 les parties correspondantes de notre intégrale. Nous aurons dans ω_1:

$$r \geq \frac{R}{2}.$$

Donc:

$$|I_1| < M \int_{\omega_1} \frac{d\omega}{r^2(1+r)^{1+\beta}} < \frac{16\pi M}{R^2} \int_0^{\frac{R}{2}} \frac{\bar{r}^2 d\bar{r}}{r^{1+\beta}} = \frac{16\pi M}{(2-\beta)2^{2-\beta}R^\beta}.$$

Dans ω_2 nous avons:

$$r \geq \frac{R}{2}.$$

Donc:

$$|I_2| < \frac{M}{\left(1+\frac{R}{2}\right)^{1+\beta}} \int \frac{d\omega}{r^2} < \frac{4\pi M}{\left(1+\frac{R}{2}\right)^{1+\beta}} \int_0^{\frac{5R}{2}} d\bar{r} < \frac{10\pi M R}{\left(1+\frac{R}{2}\right)^{1+\beta}} < \frac{10\pi 2^{1+\beta} M}{R^\beta}.$$

Enfin, dans ω_3:

$$r > r - R.$$

Donc:

$$|I_3| < 4\pi M \int_{\frac{3R}{2}}^{\infty} \frac{r^2 dr}{(1+r)^{1+\beta}(r-R)^2} < 4\pi M \int_{\frac{3R}{2}}^{\infty} \frac{\bar{r} d\bar{r}}{r^\beta (r-R)^2} = \frac{4\pi M}{R^\beta} \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} \frac{u\,du}{u^\beta (u-1)^2}.$$

Considérons maintenant la fonction:

$$(1+R)^\beta \left| \frac{I}{M} \right|.$$

Elle est finie et continue pour tout système de valeurs de x, y, z. Les inégalités ci-dessus montrent qu'elle reste toujours inférieure à une certaine limite finie, qui est d'ailleurs indépendante de M.

Comme d'autre part les fonctions:

$$R^2 \left| \frac{\partial u'_\xi}{\partial x} \right|, \quad \ldots \quad R^2 \left| \frac{\partial w'_\zeta}{\partial z} \right|$$

pour tout système de valeurs de $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ restent finies, il s'ensuit que l'on peut trouver un nombre positif c_3 assez grand pour que:

$$\left|\int A(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial u'_\xi}{\partial x}d\omega\right|, \ldots \left|\int A(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial w'_\zeta}{\partial z}d\omega\right| < \frac{c_3 M}{(1+R)^{\gamma}}. \tag{24}$$

3. Soit donné un fluide indéfini, sollicité d'une force extérieure dont les composantes soient $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$. Nous allons voir dans ce paragraphe que les formules de M. Lorentz permettent dans certains cas de trouver un mouvement permanent correspondant à cette force.

Nous supposons que X, Y, Z soient des fonctions uniformes et continues, douées des dérivées continues du premier ordre et qu'elles remplissent des inégalités de la forme:

$$|X(\xi,\eta,\zeta)|, \ldots < \frac{N}{(1+R)^{\gamma+\varepsilon}},$$

$$\gamma > 0.$$

D'autres conditions restrictives seront bientôt introduites.

Les équations du mouvement permanent peuvent s'écrire:

$$\mu\Delta u - \frac{\partial p}{\partial x} + X - \varrho\left\{\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z}\right\} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Négligeons d'abord les termes $\varrho\left\{\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z}\right\}$ etc. Le système différentiel ainsi obtenu admet le système de solutions:

$$u_1 = \frac{1}{8\pi\mu}\int [X(\xi,\eta,\zeta)u'_\xi + \cdots]d\omega,$$

$$v_1 = \frac{1}{8\pi\mu}\int [X(\xi,\eta,\zeta)u'_\eta + \cdots]d\omega,$$

$$w_1 = \frac{1}{8\pi\mu}\int [X(\xi,\eta,\zeta)u'_\zeta + \cdots]d\omega,$$

$$p_1 = \frac{1}{4\pi}\int \left[X(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots\right]d\omega.$$

les intégrations étendues à l'espace entier. Nous supposons et c'est là une nouvelle hypothèse restrictive par rapport à X, Y, Z qu'il existe une quantité positive M et un nombre δ, $0 < \delta < 1$, tels que l'on ait dans tout point de l'espace:

$$\left| u_1(x, y, z) \right|, \ldots < \frac{M}{(1 + R)^{1+\delta}},$$

$$\left| \frac{\partial u_1(x, y, z)}{\partial x} \right|, \ldots \left| \frac{\partial^2 u_1(x, y, z)}{\partial x^2} \right|, \ldots \tag{25}$$

$$\left| \frac{\partial^2 w_1(x, y, z)}{\partial z^2} \right| < \frac{M}{(1 + R)^{1+\delta}}.$$

Introduisons de nouveau le paramètre auxiliaire λ dans nos équations. Elles deviennent:

$$\mu \Delta u - \frac{\partial p}{\partial x} + X + \varrho \lambda \left(\frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (uw)}{\partial z} \right) = 0,$$

. . . . . .

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Posons:

$$u(\lambda) = u_1 + u_2 \lambda + \cdots$$

$$v(\lambda) = v_1 + v_2 \lambda + \cdots$$

$$w(\lambda) = w_1 + w_2 \lambda + \cdots$$

$$p(\lambda) = p_1 + p_2 \lambda + \cdots$$

Pour déterminer u_2, v_2, w_2 etc. nous aurons les équations:

$$\mu \Delta u_n - \frac{\partial p_n}{\partial x} + \varrho \left(\frac{\partial}{\partial x} \sum_1^{n-1} u_i u_{n-i} + \frac{\partial}{\partial y} \sum_1^{n-1} u_i v_{n-i} + \frac{\partial}{\partial z} \sum_1^{n-1} u_i w_{n-i} \right) = 0,$$

. . . . . .

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} + \frac{\partial w_n}{\partial z} = 0.$$

Posons donc, pour $n > 1$:

$$u_n = \frac{\varrho}{8 \pi \mu} \int \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \sum_1^{n-1} u_i u_{n-i} + \cdots \right)_{x=\xi, \ldots} u'_\xi + \cdots \right] d\omega =$$

$$- \frac{\varrho}{8 \pi \mu} \int \left[\left(\sum_1^{n-1} u_i u_{n-i} \right)_{x=\xi, \ldots} \frac{\partial u'_\xi}{\partial \xi} + \left(\sum_1^{n-1} u_i v_{n-i} \right)_{x=\xi, \ldots} \left(\frac{\partial u'}{\partial \eta} + \frac{\partial v'}{\partial \xi} \right) + \cdots \right] d\omega$$

etc. Les fonctions u_2, v_2, w_2, ainsi obtenus, sont des fonctions continues ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres, et on a en vertu des inégalités 24:

$$|u_2(x, y, z)|, \ldots < \frac{9\varrho c_3 M^2}{8\pi\mu(1+R)^{1+\delta}},$$

$$\left|\frac{\partial u_2(x, y, z)}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial w_2(x, y, z)}{\partial z}\right| < \frac{9\varrho c_3 M^2}{4\pi\mu(1+R)^{1+\delta}},$$

$$\left|\frac{\partial^2 u_2(x, y, z)}{\partial x^2}\right| \ldots \left|\frac{\partial^2 w_2(x, y, z)}{\partial z^2}\right| < \frac{9\varrho c_3 M^2}{2\pi\mu(1+R)^{1+\delta}}.$$

Donc:

$$|u_2|, \ldots \left|\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right|, \ldots < \frac{c_4 M^2}{(1+R)^{1+\delta}}$$

où:

$$c_4 = \frac{9\varrho c_3}{2\pi\mu}.$$

Il résulte de là que u_3, v_3, w_3 sont des fonctions continues, douées des dérivées continues des deux premiers ordres et qu'elles remplissent certaines inégalités propres à nous assurer que les fonctions u_4, v_4, w_4 jouissent des mêmes propriétés. En continuant ainsi, on voit que u_n, v_n, w_n pour toute valeur entière et positive de n sont des fonctions continues de x, y, z et qu'elles admettent des dérivées continues du premier et du second ordre.

Soit maintenant a_1, a_2, ... la série de nombres entiers et positifs, définie par les équations:

$$a_1 = 1, \quad a_n = \sum_1^{n-1} a_r a_{n-r}.$$

Je dis que l'on a:

$$|u_n(x, y, z)|, \ldots \left|\frac{\partial u_n(x, y, z)}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial^2 u_n(x, y, z)}{\partial x^2}\right|, \ldots < \frac{a_n c_4^{n-1} M^n}{(1+R)^{1+\delta}}.$$

En effet, ces inégalités étant vraies pour $n = 1$ et $n = 2$, on voit, en concluant de n à $n+1$, qu'elles sont vraies pour toute valeur entière et positive de n.

Faisons une dernière hypothèse. Supposons que M soit plus petit que $\frac{1}{4c_4}$. Alors, les séries:

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1} u_n, \ldots \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{\partial u_n}{\partial x}, \ldots \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, \ldots$$

sont absolument et uniformément convergentes pour tout système de valeurs de x, y, z. Posons:

$$u = \sum_{1}^{\infty}(\quad 1)^{n-1}u_n, \quad v = \sum_{1}^{\infty}(\quad 1)^{n-1}v_n, \quad w = \sum_{1}^{\infty}(\quad 1)^{n-1}w_n.$$

u, v, w seront des fonctions de x, y, z continues et douées des dérivées continues des deux premiers ordres et nous aurons:

$$8\pi\mu u = \int [X(\xi, \eta, \zeta)u'_\xi + \cdots]d\omega - \varrho \int \left[\left(\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z}\right)_{x=\xi, \ldots} u'_\xi + \cdots\right]d\omega$$

etc., les intégrales à droite dans ces formules ayant un sens déterminé puisqu'on a:

$$|u(x, y, z)|, \ldots \left|\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial x^2}\right|, \ldots < \frac{C}{(1 + R)^{1+\delta}},$$

C étant une certaine quantité positive. Posons:

$$4\pi p(x, y, z) = \int \left[X(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots\right]d\omega -$$

$$\varrho \int \left[\left(\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots\right]d\omega.$$

u, v, w, p satisfont alors aux équations du mouvement permanent.

4. Supposons que les composantes de la force extérieure soient de la forme $X(x, y, z)e^{-k^2t}$, $Y(x, y, z)e^{-k^2t}$, $Z(x, y, z)e^{-k^2t}$. Cherchons un système de solutions de la forme $u(x, y, z)e^{-k^2t}$ etc. des équations 1. Nous aurons pour déterminer u, v, w le système différentiel:

$$-\varrho k^2 u = X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Posons:

$$u'_\xi = \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2}, \quad v'_\xi = -\frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial \eta}, \quad w'_\xi = -\frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial \zeta}, \quad p'_\xi = -2\mu \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) \text{ etc.},$$

où:

$$P \qquad \frac{2\mu\left[1-\cos\left(k\sqrt{\frac{\varrho}{\mu}}r\right)\right]}{k^2\varrho r},$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

u'_ξ, v'_ξ, w'_ξ, p'_ξ etc. satisfont aux systèmes différentiels:

$$-\varrho k^2 u'_\xi = -\frac{\partial p'_\xi}{\partial \xi} + \mu \Delta_{\xi,\eta,\zeta} u'_\xi,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial u'_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial v'_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial w'_\xi}{\partial \zeta} = 0$$

etc. Dans le voisinage du point x, y, z ils se comportent comme les fonctions $\frac{\partial^2 r}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial \zeta^2}$, $-\frac{\partial^2 r}{\partial \xi \partial \eta}$, $-\frac{\partial^2 r}{\partial \xi \partial \zeta}$, $-2\mu\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right)$ etc. Le procédé du paragraphe 1 est donc applicable sans aucune modification et nous obtenons:

$$8\pi\mu u(x,y,z) = -\mu\int_S \left[u'_\xi \frac{du}{dn} + \cdots - u\frac{du'_\xi}{dn} - \cdots\right] dS +$$

$$+\int_S [(u'_\xi \cos nx + \cdots)p - (u\cos nx + \cdots)p'_\xi]\,dS + \int_{\omega_i} [X(\xi,\eta,\zeta)u'_\xi + \cdots]\,d\omega$$

et deux formules analogues. Pour compléter notre système de formules nous employons les fonctions:

$$u' = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right),\ v' = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\right),\ w' = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r}\right),\ p' = \frac{\varrho k^2}{r}.$$

Nous trouvons:

$$4\pi p(x,y,z) = \mu\int_S \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{du}{dn} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dv}{dn} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dw}{dn} -\right.$$

$$\left. -u\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) - v\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) - w\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS - \int_S p\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dS -$$

$$-\varrho k^2\int_S (u\cos nx + \cdots)\frac{dS}{r} + \int_{\omega_i}\left[X(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots\right] d\omega.$$

5. Analogues aux formules précédentes, mais un peu plus compliquées sont celles que l'on obtient dans le cas où les composantes de la force extérieure sont des fonctions périodiques de t. Soient par exemple:

$$\begin{aligned} X &= \text{partie réelle de } A(x, y, z)e^{ikt}, \\ Y &= \text{» » » } B(x, y, z)e^{ikt}, \\ Z &= \text{» » » } C(x, y, z)e^{ikt}. \end{aligned}$$

où $A = A_1 + iA_2$, $B = B_1 + iB_2$, $C = C_1 + iC_2$ sont des fonctions complexes de x, y, z. Posons dans ce cas:

$$u(x, y, z, t) = \text{partie réelle de } u(x, y, z)e^{ikt}$$

etc., où $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$, $p(x, y, z)$ désignent des fonctions complexes de x, y, z, qui doivent satisfaire au système suivant:

$$\begin{aligned} ik\varrho u &= A - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial u}{\partial x} &+ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Les fonctions de Green généralisées de ce système différentiel sont:

$$u'_\xi = \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2}, \quad v'_\xi = -\frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial \eta}, \quad w'_\xi = -\frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial \zeta}, \quad p'_\xi = -2\mu \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) \text{ etc.}$$

$$u' = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right), \quad v' = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\right), \quad w' = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r}\right), \quad p' = -\frac{i\varrho k}{r}.$$

On a dans ces équations:

$$P = \frac{2i\mu}{\varrho k r}\left[1 - \cos\left(r\sqrt{-\frac{i\varrho k}{\mu}}\right)\right].$$

Si $k > 0$, on a donc, en séparant les parties réelles et imaginaires de P:

$$P = \frac{\mu}{\varrho k r}\sin\left(r\sqrt{\frac{\varrho k}{2\mu}}\right)\left(e^{-r\sqrt{\frac{\varrho k}{2\mu}}} - e^{-r\sqrt{\frac{\varrho k}{2\mu}}}\right) -$$

$$\frac{i\mu}{\varrho k r}\left[2 - \cos\left(r\sqrt{\frac{\varrho k}{2\mu}}\right)\left(e^{r\sqrt{\frac{\varrho k}{2\mu}}} + e^{-r\sqrt{\frac{\varrho k}{2\mu}}}\right)\right].$$

Les formules de GREEN généralisées, que l'on obtient à l'aide de ces fonctions, sont tout à fait analogues à celles du paragraphe précédent. On a donc:

$$8\pi\mu u(x, y, z) = 8\pi\mu[u_1(x, y, z) + iu_2(x, y, z)]$$

$$-\mu\int_S\left[u'_\xi\frac{du}{dn} + \cdots - u\frac{du'_\xi}{dn} - \cdots\right]dS +$$

$$+\int_S[(u'_\xi\cos nx + \cdots]p - (u\cos nx + \cdots)p'_\xi]dS + \int_{\omega_i}[A(\xi, \eta, \zeta)u'_\xi + \cdots]d\omega$$

etc.,

$$4\pi p(x, y, z) = 4\pi[p_1(x, y, z) + ip_2(x, y, z)]$$

$$\mu\int_S\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{du}{dn} + \cdots - u\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) - \cdots\right]dS - \int_S p\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)dS +$$

$$+ i\varrho\lambda\int_S(u\cos nx + \cdots)\frac{dS}{r} + \int_{\omega_i}\left[A(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots\right]d\omega.$$

6. Reprenons le système 1. Supposons que $Z = w = 0$ et que u, v, p, X, Y ne dépendent que de x, y, t. Nous aurons:

$$\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\Delta_{x,y}u,$$

$$\varrho\frac{\partial v}{\partial t} = Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\Delta_{x,y}v, \tag{26}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Supposons que u, v, p et les dérivées de ces fonctions, qui figurent dans le système 26, X, Y et leurs dérivées du premier ordre par rapport à x, y soient des fonctions continues de x, y, t dans l'intérieur du fluide considéré pour des valeurs de t, situées dans un certain intervalle $0 < t < t_1$. Soit:

$$\varphi(x, y, t) = 0$$

l'équation d'une courbe fermée, $C(t)$, dans l'intérieur du fluide, admettant dans chaque point un tangent déterminé et une vitesse normale déterminée u_n. Soit $\omega(t)$ la partie du xy-plan, qui se trouve à l'intérieur de $C(t)$, x_0, y_0 un point quelconque, situé à l'instant t_0 dans $\omega(t)$ et $\omega_r(t)$ la partie de $\omega(t)$, extérieure au cercle $r = r'$ $[r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}]$. Posons:

$$e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t_0-t)}} = F(r, t, t_0)$$

$$P_{r'} = \int_{r}^{r'} F(r, t, t_0)\frac{dr}{r} - F(r', t, t_0)\log r.$$

Définissons les fonctions $u'_x(r')$, $v'_x(r')$ et $p'_x(r')$ à l'intérieur de la courbe $C(t)$ et sur cette courbe par les équations:

$$u'_x(r') = -\frac{\partial^2 P_{r'}}{\partial y^2}, \quad v'_x(r') = \frac{\partial^2 P_{r'}}{\partial x \partial y}, \quad p'_x(r') = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho\frac{\partial P_{r'}}{\partial t} + \mu\Delta_{x,y}P_{r'}\right)$$

et à l'extérieur de la courbe $C(t)$ par les équations:

$$u'_x(r') = v'_x(r') = p'_x(r') = 0.$$

Ces fonctions satisfont au système différentiel:

$$-\varrho\frac{\partial u'_x(r')}{\partial t} = -\frac{\partial p'_x(r')}{\partial x} + \mu\Delta_{x,y}u'_x(r'),$$

$$-\varrho\frac{\partial v'_x(r')}{\partial t} = -\frac{\partial p'_x(r')}{\partial y} + \mu\Delta_{x,y}v'_x(r'),$$

$$\frac{\partial u'_x(r')}{\partial x} + \frac{\partial v'_x(r')}{\partial y} = 0.$$

Formons l'équation:

$$\varrho\int_0^{t_0} dt \int_{\omega_{r'}(t)} \frac{\partial[u u'_x(r') + v v'_x(r')]}{\partial t} d\omega = \int_0^{t_0} dt \int_{\omega_{r'}(t)} [X u'_x(r') + Y u'_y(r')] d\omega +$$

$$+ \int_0^{t_0} dt \int_{\omega_{r'}(t)} \Big\{ \mu[u'_x(r')\Delta_{x,y}u + v'_x(r')\Delta_{x,y}v - u\Delta_{x,y}u'_x(r') - v\Delta_{x,y}v'_x(r')] -$$

$$- u'_x(r')\frac{\partial p}{\partial x} - v'_x(r')\frac{\partial p}{\partial y} + u\frac{\partial p'_x(r')}{\partial x} + v\frac{\partial p'_x(r')}{\partial y} \Big\} d\omega.$$

Elle nous donne, en intégrant par parties:

$$\varrho\int_{\omega_{r'}(t_0)} [u u'_x(r') + v v'_x(r')]_{t=t_0} d\omega = \varrho\int_{\omega_{r'}(0)} [u u'_x(r') + v v'_x(r')]_{t=0} d\omega -$$

$$-\varrho\int_0^{t_0}dt\int_{C(t)}[u\,u'_x(r')+v v'_x(r')]u_n dS+\int_0^{t_0}dt\int_{\omega(t)}[X u'_x(r')+Y v'_x(r')]d\omega$$

$$-\int_0^{t_0}dt\int_{C(t)}\Big\{\mu\Big[u'_x(r')\frac{du}{dn}+v'_x(r')\frac{dv}{dn}-u\frac{du'_x(r')}{dn}-v\frac{dv'_x(r')}{dn}\Big]-$$

$$-[u'_x(r')\cos nx+v'_x(r')\cos ny]p+(u\cos nx+v\cos ny)p'_x(r')\Big\}dS-$$

$$-\int_0^{t_0}dt\int_{r=r'}\Big\{\mu\Big[u'_x(r')\frac{du}{dn}+\cdots\Big]-[u'_x(r')\cos nx+v'_x(r')\cos ny]p+$$

$$+(u\cos nx+v\cos ny)p'_x(r')\Big\}dS.$$

n désigne la normale intérieure.

Cherchons la valeur limite de la dernière intégrale lorsque r' tend vers zéro. Nous avons dans un point du cercle $r=r'$, situé à l'intérieur de $\omega(t)$:

$$u'_x(r')=\frac{\varrho}{2\mu}\frac{(y-y_0)^2}{r'^2}\frac{F(r',t,t_0)}{t_0-t},\quad v'_x(r')=-\frac{\varrho}{2\mu}\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r'^2}\frac{F(r',t,t_0)}{t_0-t},$$

$$\frac{du'_x(r')}{dn}=\frac{\varrho}{2\mu}\Big(\frac{1}{r'}-\frac{2(y-y_0)^2}{r'^3}\Big)\frac{F(r',t,t_0)}{t_0-t}-\frac{\varrho^2}{4\mu^2}\frac{(y-y_0)^2}{r'}\frac{F(r',t,t_0)}{(t_0-t)^2},$$

$$\frac{dv'_x(r')}{dn}=\frac{\varrho}{\mu}\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r'^3}\frac{F(r',t,t_0)}{t_0-t}+\frac{\varrho^2}{4\mu^2}\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r'}\frac{F(r',t,t_0)}{(t_0-t)^2},$$

$$p'_x(r')=\frac{\varrho^2(x-x_0)}{4\mu}\frac{F(r',t,t_0)}{(t_0-t)^2}.$$

Développons u, v, $\frac{du}{dn}$, $\frac{dv}{dn}$ d'après le théorème de Taylor. Les principaux termes de la fonction:

$$\mu\Big(u'_x(r')\frac{du}{dn}+\cdots\Big)-[u'_x(r')\cos nx+v'_x(r')\cos ny]p+(u\cos nx+v\cos ny)p'_x(r')$$

seront:

$$\frac{\varrho u(x_0,y_0,t)}{2}\Big(\frac{\varrho r'}{2\mu(t_0-t)}+\frac{1}{r'}-\frac{2(x-x_0)^2}{r'^3}\Big)\frac{F(r',t,t_0)}{t_0-t}-$$

$$-\varrho v(x_0,y_0,t)\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r'^3}\frac{F(r',t,t_0)}{t_0-t}$$

et nous aurons:

$$\lim_{r'=0}\int_0^{t_0}dt\iint_{r=r'}\Big[\mu\left(u'_x(r')\frac{du}{dn}+\cdots\right)-(u'_x(r')\cos nx+$$

$$+v'_x(r')\cos ny)\,p+(u\cos nx+v\cos ny)\,p'_x(r')\Big]dS=$$

$$\lim_{r'=0}\Big[\int_0^{t_0}\frac{\varrho F(r',t,t_0)}{2(t_0-t)}u(x_0,y_0,t)dt\iint_{r=r'}\left(\frac{\varrho r'}{2\mu(t_0-t)}+\frac{1}{r'}-\frac{2(x-x_0)^2}{r'^3}\right)dS-$$

$$-\int_0^{t_0}\frac{\varrho F(r',t,t_0)}{t_0-t}v(x_0,y_0,t)\iint_{r=r'}\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r'^3}dS\Big]=$$

$$\frac{\varrho^2\pi}{2\mu}\lim_{r'=0}\int_0^{t_0}r'^2F(r',t,t_0)u(x_0,y_0,t)\frac{dt}{(t_0-t)^2}=2\pi\varrho u(x_0,y_0,t_0).$$

Remarquons de plus que l'on a pour $t=t_0$: $u'_x(r')=v'_x(r')=0$. Donc:

$$2\pi\varrho u(x_0,y_0,t_0)=\lim_{r'=0}\Big[\varrho\int_{\omega_{r'}(0)}[uu'_x(r')+vv'_x(r')]_{t=0}d\omega-$$

$$-\varrho\int_0^{t_0}dt\int_{C(t)}[uu'_x(r')+vv'_x(r')]u_n dS+\int_0^{t}dt\int_{\omega_{r'}(t)}(Xu'_x(r')+Yv'_x(r'))d\omega-$$

$$-\int_0^{t_0}dt\iint_{C(t)}\Big[\mu\left(u'_x(r')\frac{du}{dn}+\cdots\right)-[u'_x(r')\cos nx+v'_x(r')\cos ny]p+$$

$$+(u\cos nx+v\cos ny)p'_x(r')\Big]dS\Big].$$

Posons:

$$P=-\int_r^{\infty}F(r,t,t_0)\frac{dr}{r}-\log r,$$

$$u'_x=-\frac{\partial^2P}{\partial y^2}=\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2(y-y_0)^2}{r^2}\right)(1-F(r,t,t_0))+\frac{\varrho(y-y_0)^2}{2\mu r^2}\frac{F(r,t,t_0)}{t_0-t},$$

$$v'_x=\frac{\partial^2P}{\partial x\,\partial y}=\frac{2(x-x_0)(y-y_0)}{r^4}(1-F(r,t,t_0))-\frac{\varrho(x-x_0)(y-y_0)}{2\mu r^2}\frac{F(r,t,t_0)}{t_0-t}.$$

$u'_x(r')$, $v'_x(r')$ et $p'_x(r')$ tendent pour $r\geq\delta$, $t_0-t\geq\varepsilon$ ($\delta>0$, $\varepsilon>0$) uniformément vers u'_x, v'_x et 0, lorsque r' tend vers zéro.

Considérons les intégrales:

$$I_1 = \int_{\omega'(t)} \varphi(x, y, t)(1 - F(r, t, t_0)) \frac{d\omega}{r^2},$$

$$I_2 = \int_{\omega'(t)} \varphi(x, y, t) F(r, t, t_0) \frac{d\omega}{t_0 - t},$$

$$I_3 = \int_{t'}^{t_0} dt \int_{\omega'(t)} \varphi(x, y, t)(1 - F(r, t, t_0)) \frac{d\omega}{r^2},$$

$$I_4 = \int_{t'}^{t_0} dt \int_{\omega'(t)} \varphi(x, y, t) F(r, t, t_0) \frac{d\omega}{t_0 - t},$$

où $\omega'(t)$ est une certaine aire finie du plan des x, y et $\varphi(x, y, t)$ une fonction finie et intégrable de x, y, t. Soit $l'(t)$ la plus grande distance entre deux points de la frontière du domaine $\omega'(t)$ et L' le maximum de $l'(t)$ dans l'intervalle $0 \leq t \leq t_0$. Nous avons alors, si $0 \leq t \leq t_0$:

$$I_1 < 2\pi \operatorname{Max} |\varphi| \int_0^{L'} (1 - F(r, t, t_0)) \frac{dr}{r}$$

$$< 2\pi \operatorname{Max} |\varphi| \operatorname{Max}_{u \geq 0} \left| \frac{1 - e^{-\frac{\varrho u^2}{4\mu}}}{u} \right| \frac{L'}{\sqrt{t_0 - t}},$$

$$I_2 < 2\pi \operatorname{Max} |\varphi| \int_0^{L'} r F(r, t, t_0) \frac{dr}{t_0 - t}$$

$$< 2\pi \operatorname{Max} |\varphi| \operatorname{Max}_{u \geq 0} \left| u e^{-\frac{\varrho u^2}{4\mu}} \right| \frac{L'}{\sqrt{t_0 - t}},$$

et si $0 \leq t' \leq t_0$:

$$I_3 < 4\pi \operatorname{Max} |\varphi| \operatorname{Max} \left| \frac{1 - e^{-\frac{\varrho u^2}{4\mu}}}{u} \right| L' \sqrt{t_0 - t'},$$

$$I_4 < 4\pi \operatorname{Max} |\varphi| \operatorname{Max} \left| u e^{-\frac{\varrho u^2}{4\mu}} \right| L' \sqrt{t_0 - t'}.$$

On conclut de ces inégalités que les intégrales:

$$\int_{\omega(0)} (u u'_x + v v'_x) d\omega, \quad \int_0^{t_0} dt \int_{\omega(t)} (X u'_x + Y v'_x) d\omega$$

ont un sens déterminé et que l'on peut trouver un nombre positif b_1, tel que:

$$\int_{0<r<\delta} |u u'_x + v v'_x|_{t=0} d\omega < \frac{b_1 \delta}{\sqrt{t_0}} \operatorname*{Max}_{t=0} \sqrt{u^2+v^2},$$

$$\int_0^{t_0} dt \int_{0<r<\delta} |X u'_x + Y v'_x| d\omega < b_1 \delta \sqrt{t_0} \operatorname*{Max}_{0\le t\le t_0} \sqrt{X^2+Y^2},$$

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} dt \int_{\omega(t)} |X u'_x + Y v'_x| d\omega < b_1 L \sqrt{\varepsilon} \operatorname*{Max}_{0<t<t_0} \sqrt{u^2+v^2},$$

L étant le maximum de la distance entre deux points d'une courbe $C(t)$ $(0 \le t \le t_0)$. Comme on a:

$$u'_x(r') = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2(y-y_0)^2}{r^2}\right)[F(r', t, t_0) - F(r, t, t_0)] + \frac{\varrho(y-y_0)^2}{2\mu r^2} \frac{F(r, t, t_0)}{t_0 - t},$$

$$v'_x(r') = \frac{2(x-x_0)(y-y_0)}{r^4}[F(r', t, t_0) - F(r, t, t_0)] - \frac{\varrho(x-x_0)(y-y_0)}{2\mu r^2} \frac{F(r, t, t_0)}{t_0 - t}$$

et comme, pour $r \ge r'$:

$$|F(r', t, t_0) - F(r, t, t_0)| = e^{-\frac{\varrho r'^2}{4\mu(t_0-t)}} - e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t_0-t)}} \le 1 - e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t_0-t)}}$$

on voit que l'on peut choisir b_1 tel que l'on a aussi:

$$\int_{r'<r<\delta} |u u'_x(r') + v v'_x(r')|_{t=0} d\omega < \frac{b_1 \delta}{\sqrt{t_0}} \operatorname*{Max}_{t=0} \sqrt{u^2+v^2},$$

$$\int_0^{t_0} dt \int_{r'<r\le\delta} |X u'_x(r') + Y v'_x(r')| d\omega < b_1 \delta \sqrt{t_0} \operatorname*{Max}_{0\le t\le t_0} \sqrt{X^2+Y^2},$$

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} dt \int_{\omega_{r'}(t)} |X u'_x(r') + Y v'_x(r')| d\omega < b_1 L \sqrt{\varepsilon} \operatorname*{Max}_{0\le t<t_0} \sqrt{X^2+Y^2}.$$

On a par conséquent:

$$\lim_{r'=0}\left[\varrho\int_{\omega_{r'}(0)}[u u'_x(r')+v v'_x(r')]_{t=0}d\omega+\int_0^{t_0}dt\int_{\omega_{r'}(0)}[X u'_x(r')+Y v'_x(r')]d\omega\right]$$

$$\varrho\int_{\omega(0)}(u u'_x+v v'_x)_{t=0}d\omega+\int_0^{t_0}dt\int_{\omega(t)}(X u'_x+Y v'_x)d\omega.$$

Soit $C'(t)$ une courbe fermée dans l'intérieur du domaine $\omega'(t)$. On peut alors trouver un nombre positif b_2 assez grand pour que, x, y étant un point de la courbe $C(t)$ et x_0, y_0 un point intérieur à $C'(t)$:

$$|u'_x(r')|,\ |v'_x(r')|<b_2.$$

Comme d'ailleurs $u'_x(r')$ et $v'_x(r')$ pour $t_0-t\geq\varepsilon$, ε positif, aussi petit que l'on veut, tendent uniformément vers u'_x et v'_x, on a dans tout point x_0, y_0, intérieur à $C(t_0)$:

$$\lim_{r'=0}\left[-\varrho\int_0^{t_0}dt\int_{C(t)}[u u'_x(r')+v v'_x(r')]u_n dS-\int_0^{t_0}dt\int_{C(t)}\left[\mu\left(u'_x(r')\frac{du}{dn}+\cdots\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-[u'_x(r')\cos nx+v'_x(r')\cos ny]p\right]dS\right]=-\varrho\int_0^{t_0}dt\int_{C(t)}(u u'_x+v v'_x)u_n dS-$$

$$-\mu\int_0^{t_0}dt\int_{C(t)}\left(u'_x\frac{du}{dn}+v'_x\frac{dv}{dn}-u\frac{du'_x}{dn}-v\frac{dv'_x}{dn}\right)dS+\int_0^{t_0}dt\int_{C(t)}(u'_x\cos nx+v'_x\cos ny)p\,dS.$$

Enfin, nous avons:

$$p'_x(r')=\frac{\varrho^2(x-x_0)r'^2}{4\mu r^2}\frac{F(r',t,t_0)}{(t_0-t)^2}.$$

Donc:

$$\lim_{r'=0}-\int_0^{t_0}dt\int_{C(t)}(u\cos nx+v\cos ny)p'_x(r')dS=$$

$$\lim_{r'=0}-\frac{\varrho^2}{4\mu}\int_0^{t_0}r'^2\frac{F(r',t,t_0)dt}{(t_0-t)^2}\int_{C(t)}(u\cos nx+v\cos ny)\frac{x-x_0}{r^2}dS=$$

$$\lim_{r'=0} -\frac{\varrho^2}{4\mu}\int_{C(t_0)}(u\cos nx+v\cos ny)\frac{x-x_0}{r^2}dS\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} r'^2 e^{-\frac{\varrho r'^2}{4\mu(t_0-t)}}\frac{dt}{(t_0-t)^2} =$$

$$-\varrho\int_{C(t_0)}(u\cos nx+v\cos ny)\frac{x-x_0}{r^2}dS.$$

On a donc:

$$2\pi\varrho u(x_0,y_0,t_0)=\varrho\int_{\omega(0)}(uu'_x+vv'_x)d\omega-\varrho\int_0^{t_0}dt\int_{C(t)}(uu'_x+vv'_x)u_n dS+$$

$$+\int_0^{t_0}dt\int_{\omega(t)}(Xu'_x+Yv'_x)d\omega-\int_0^{t_0}dt\int_{C(t)}\Big[\mu\Big(u'_x\frac{du}{dn}+v'_x\frac{dv}{dn}-u\frac{du'_x}{dn}-v\frac{dv'_x}{dn}\Big)-$$

$$-(u'_x\cos nx+v'_x\cos ny)p\Big]dS-\varrho\int_{C(t_0)}(u\cos nx+v\cos ny)\frac{x-x_0}{r^2}dS$$

et une formule analogue pour $2\pi\varrho v(x_0,y_0,t_0)$.

Afin de trouver la formule correspondante pour $p(x_0,y_0,t_0)$ nous considérons les fonctions:

$$u'(r')=-\frac{\varrho r'^2F(r',t,t_0)}{4\mu(t_0-t)^2}\frac{x-x_0}{r^2},\quad v'(r)=\frac{\varrho r'^2F(r',t,t_0)}{4\mu(t_0-t)^2}\frac{y-y_0}{r^2},$$

$$p'(r')=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\varrho^2r'^2F(r',t,t_0)}{4\mu(t_0-t)^2}\cdot\log r,$$

esquelles satisfont au système:

$$-\varrho\frac{\partial u'(r')}{\partial t}=-\frac{\partial p'(r')}{\partial x}+\mu\Delta u'(r'),$$

$$\varrho\frac{\partial v'(r')}{\partial t}=-\frac{\partial p'(r')}{\partial y}+\mu\Delta v'(r'),$$

$$\frac{\partial u'(r')}{\partial x}+\frac{\partial v'(r')}{\partial y}=0.$$

Nous avons donc:

$$\varrho\int_{\omega_{r'}(t_0)}(uu'(r')+vv'(r'))_{t=t_0}d\omega=\varrho\int_{\omega_{r'}(0)}(uu'(r')+vv'(r'))_{t=0}d\omega-$$

$$-\varrho\int_0^{t_0}dt\int_{C(t)}(uu'(r')+vv'(r'))u_n dS+\int_0^{t_0}dt\int_{\omega_{r'}(t)}(Xu'(r')+Yv'(r'))d\omega-$$

$$-\int_0^{t_0}dt\int_{C(t)}\Big[\mu\left(u'(r')\frac{du}{dn}+v'(r')\frac{dv}{dn}-u\frac{du'(r')}{dn}-v\frac{dv'(r')}{dn}\right)-$$

$$-(u'(r')\cos nx+v'(r')\cos ny)p+(u\cos nx+v\cos ny)p'(r')\Big]dS-$$

$$-\int_0^{t_0}dt\int_{r=r'}\Big[\mu\left(u'(r)\frac{du}{dn}+\cdots\right)-(u'(r')\cos nx+\cdots)p+(u\cos nx+\cdots)p'(r')\Big]dS.$$

Or on a:

$$\int_{\omega_{r'}(t_0)}(uu'(r'))+vv'(r'))_{t=t_0}d\omega=0,$$

$$\lim_{r'=0}\int_0^{t_0}dt\int_{r=r'}\Big[\mu\left(u'(r')\frac{du}{dn}+\cdots\right)-(u'(r')\cos nx+\cdots)p+(u\cos nx+\cdots)p'(r')\Big]dS=$$

$$-\frac{\pi\varrho}{2\mu}\lim_{r'=0}\int_0^{t_0}r'^2F(r',t,t_0)p(x_0,y_0,t)\frac{dt}{(t_0-t)^2}=-2\pi p(x_0,y_0,t_0),$$

$$\lim_{r'=0}\int_{\omega_{r'}(0)}(uu'(r')+vv'(r'))_{t=0}d\omega=0,$$

$$\lim_{r'=0}-\varrho\int_0^{t_0}dt\int_{C(t)}(uu'(r')+vv'(r'))u_n dS=-\varrho\int_{C(t_0)}\left(u\frac{\partial\log r}{\partial x}+v\frac{\partial\log r}{\partial y}\right)u_n dS,$$

$$\lim_{r'=0}\int_0^{t_0}dt\int_{\omega_{r'}(t)}(Xu'(r')+Yv'(r'))d\omega=\int_{\omega(t_0)}\left(X\frac{\partial\log r}{\partial x}+Y\frac{\partial\log r}{\partial y}\right)d\omega,$$

$$\lim_{r'=0}-\int_0^{t_0}dt\int_{C(t)}\Big[\mu\left(u'(r')\frac{du}{dn}+v'(r')\frac{dv}{dn}-u\frac{du'(r')}{dn}-v\frac{dv'(r')}{dn}\right)-$$

$$-(u'(r')\cos nx+v'(r')\cos ny)p\Big]dS=-\int_{C(t_0)}\Big[\mu\left(\frac{\partial\log r}{\partial x}\frac{du}{dn}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\log r}{\partial y}\frac{dv}{dn}-u\frac{d}{dn}\frac{\partial\log r}{\partial x}-v\frac{d}{dn}\frac{\partial\log r}{\partial y}\right)-p\frac{d\log r}{dn}\Big]dS,$$

$$\lim_{r'=0} -\int_0^{t_0} dt \int_{C(t)} (u\cos nx + v\cos ny)\, p'(r')\, dS = \lim_{r'=0} -\frac{\varrho^2}{4\mu}\int_0^{t_0} r'^2 \frac{\partial}{\partial t}\frac{F(r', t, t_0)}{(t_0 - t)^2}\, dt \int_{C(t)} (u\cos nx +$$

$$+ v\cos ny)\log r\, dS = \lim_{r'=0}\left[\frac{\varrho^2 r'^2 F(r', 0, t_0)}{4\mu t_0}\int_{C(0)} (u\cos nx + v\cos ny)\log r\, dS +\right.$$

$$\left. + \frac{\varrho^2}{4\mu}\int_0^{t_0} r'^2 F(r', t, t_0)\,(t_0 - t)^2 \frac{\partial}{\partial t}\int_{C(t)} (u\cos nx + v\cos ny)\log r\, dS\right] =$$

$$\varrho \frac{\partial}{\partial t_0}\int_{C(t_0)} (u\cos nx + v\cos ny)\, dS.$$

Donc:

$$2\pi p(x_0, y_0, t_0) = \int_{\omega(t_0)} \left(X\frac{\partial \log r}{\partial x} + Y\frac{\partial \log r}{\partial y}\right) d\omega - \varrho\int_{C(t_0)} \left(u\frac{\partial \log r}{\partial x} + v\frac{\partial \log r}{\partial y}\right) u_n\, dS -$$

$$- \int_{C(t_0)} \left[\mu\left(\frac{\partial \log r}{\partial x}\frac{du}{dn} + \frac{\partial \log r}{\partial y}\frac{dv}{dn} - u\frac{d}{dn}\frac{\partial \log r}{\partial x} - v\frac{d}{dn}\frac{\partial \log r}{\partial y}\right) - p\frac{d \log r}{dn}\right] dS +$$

$$+ \varrho\frac{\partial}{\partial t_0}\int_{C(t_0)} (u\cos nx + v\cos ny)\log r\, dS.$$

Les formules définitives sont par conséquent:

$$u'_\xi = -\frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2}, \quad v'_\xi = \frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial \eta},$$

$$u'_\eta = \frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial \eta}, \quad v'_\eta = -\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2},$$

$$P = -\int_r^\alpha F(r, r, t)\frac{dr}{r} - \log r,$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2},$$

$$2\pi\varrho u(x, y, t) = \varrho\int_{\omega(t_0)} (u(\xi, \eta, \tau)u'_\xi + v(\xi, \eta, \tau)v'_\xi)_{\tau=t_0} d\omega -$$

$$- \varrho\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{C(\tau)} (u(\xi, \eta, \tau)u'_\xi + v(\xi, \eta, \tau)v'_\xi)\, dS + \varrho\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\omega(\tau)} (X(\xi, \eta, \tau)u'_\xi + Y(\xi, \eta, \tau)v'_\xi)\, d\omega -$$

$$-\int_{t_0}^{t} dt \int_{C(t)} \left[u \left(u'_\xi \frac{du}{dn} + v'_\xi \frac{dv}{dn} - u \frac{du'_\xi}{dn} - v \frac{dv'_\xi}{dn} \right) - (u'_\xi \cos nx + v'_\xi \cos ny) p \right] dS$$
$$- \varrho \int_{C(t)} (u \cos nx + v \cos ny) \frac{\xi - x}{r^2} dS,$$

. . . . . .

$$2\pi p(x, y, t) = \int_{\omega(t)} \left(X(\xi, \iota_i, t) \frac{\partial \log r}{\partial \xi} + Y(\xi, \iota_i, t) \frac{\partial \log r}{\partial \iota_i} \right) d\omega$$
$$- \varrho \int_{C(t)} \left(u(\xi, \iota_i, t) \frac{\partial \log r}{\partial \xi} + v(\xi, \iota_i, t) \frac{\partial \log r}{\partial \iota_i} \right) u_n dS$$

$$- \int_{C(t)} \left[u \left(\frac{\partial \log r}{\partial \xi} \frac{du}{dn} + \frac{\partial \log r}{\partial \iota_i} \frac{dv}{dn} - u \frac{d}{dn} \frac{\partial \log r}{\partial \xi} - v \frac{d}{dn} \frac{\partial \log r}{\partial \iota_i} \right) - p \frac{d \log r}{dn} \right] dS +$$
$$+ \varrho \frac{\partial}{\partial t} \int_{C(t)} (u \cos nx + v \cos ny) \log r dS.$$

On a ici:

$$\frac{d}{dn} = \cos nx \frac{\partial}{\partial \xi} + \cos ny \frac{\partial}{\partial \iota_i}.$$

Note.

La formule de Green dans la théorie d'un fluide idéal.

Posons dans les équations du mouvement d'un fluide idéal:

$$p + \frac{\varrho}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = q$$

et négligeons les termes $\varrho(wv - vw)$ etc. Nous aurons:

$$\left. \begin{aligned} \varrho \frac{\partial u}{\partial t} = X - \frac{\partial q}{\partial x}, \ \varrho \frac{\partial v}{\partial t} = Y - \frac{\partial q}{\partial y}, \ \varrho \frac{\partial w}{\partial t} = Z - \frac{\partial q}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Si l'on suppose que les dérivées secondes de u, v, w, q et les dérivées premières de X, Y, Z existent et soient continues on peut déduire de ces formules:

$$\Delta q = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

En appliquant à cette équation la formule de GREEN, on obtient la valeur de q dans un point quelconque, intérieur à une surface S, exprimée par les valeurs de $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$ dans l'intérieur de S et par les valeurs de q et $\frac{dq}{dn}$ sur la surface S, ou, ce qui revient au même, par les valeurs de X, Y, Z dans l'intérieur de S et par q, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ sur S. Nous allons voir que l'on peut parvenir à un résultat équivalent sans aucune hypothèse sur les dérivées secondes de u, v, w, q ou sur les dérivées premières de X, Y, Z. Seulement, nous supposerons que X, Y, Z, u, v, w, q et les dérivées de ces fonctions qui figurent dans les équations 27 soient continues.

Posons:

$$G=\frac{r'e^{\frac{r'}{t_0-t}}}{(t_0-t)^2},$$

$$u'(r')=G\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right),\quad v'(r')=G\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right),\quad w'(r')=G\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right),\quad q'(r')=\frac{\varrho}{r}\frac{\partial G}{\partial t},$$

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.$$

Ces fonctions satisfont au système:

$$-\varrho\frac{\partial u'(r')}{\partial t}=-\frac{\partial q'(r')}{\partial x},\quad -\varrho\frac{\partial v'(r')}{\partial t}=-\frac{\partial q'(r')}{\partial y},$$

$$-\varrho\frac{\partial w'(r')}{\partial t}=-\frac{\partial q'(r)}{\partial z},\quad \frac{\partial u'(r')}{\partial x}+\frac{\partial v'(r')}{\partial y}+\frac{\partial w'(r')}{\partial z}=0.$$

Nous avons donc, $\omega(t)$, $\omega_{r'}(t)$, $S(t)$ ayant les mêmes significations que dans le premier chapitre:

$$\varrho\int_{\omega_{r'}(t_0)}[uu'(r')+vv'(r')+ww'(r')]_{t=t_0}d\omega=\varrho\int_{\omega_{r'}(0)}[uu'(r')+\cdots]_{t=0}d\omega-$$

$$-\varrho\int_0^{t_0}dt\int_{S(t)}[uu'(r')+\cdots]u_n dS+\int_0^{t_0}dt\int_{\omega_{r'}(t)}[Xu'(r')+Yv'(r')+Zw'(r')]d\omega+$$

$$+\int_0^{t_0}dt\int_{S(t)}[(u'(r')\cos nx+\cdots)q-(u\cos nx+\cdots)q'(r')]dS+$$

$$+\int_0^{t_0}dt\int_{r=r'}[(u'(r')\cos nx+\cdots)q-(u\cos nx+\cdots)q'(r')]dS.$$

Or on a:

$$\int_{\omega_{r'}(t_0)}[u u'(r') + v v'(r') + w w'(r')]_{t=t_0} d\omega = 0,$$

$$\lim_{r'=0} \varrho \int_{\omega_{r'}(0)}[u u'(r') + v v'(r') + w w'(r')]_{t=0} d\omega = 0,$$

$$\lim_{r'=0} -\varrho \int_0^{t_0} dt \int_{S(t)}[u u'(r') + \cdots] u_n dS =$$

$$\lim_{r'=0} -\varrho \int_0^{t_0} G dt \int_{S(t)}\left[u \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + v \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + w \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right] u_n dS =$$

$$-\varrho \int_{S(t_0)}\left[u \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + v \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + w \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right] u_n dS \lim_{\substack{r'=0 \\ t_0=t}} \int_t^{t_0} G dt =$$

$$-\varrho \int_{S(t_0)}\left[u \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + v \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + w \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right] u_n dS,$$

$$\lim_{r'=0} \int_0^{t_0} dt \int_{\omega_{r'}(t)}[X u'(r') + Y v'(r') + Z w'(r')] d\omega - \int_{\omega(t_0)}\left[X \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + Y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + Z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right] d\omega,$$

$$\lim_{r'=0} \int_0^{t_0} dt \int_{S(t)}[u'(r') \cos nx + \cdots] q dS = \int_{S(t_0)} q \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dS,$$

$$\lim_{r'=0} -\int_0^{t_0} dt \int_{S(t)}(u \cos nx + \cdots) q'(r') dS =$$

$$\lim_{r'=0} -\varrho \int_0^{t_0} \frac{\partial G}{\partial t} dt \int_{S(t)}(u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz) \frac{dS}{r} dt =$$

$$\varrho \lim_{r'=0}\left[r' e^{-\frac{r'}{t_0}} \int_{S(0)}(u \cos nx + \cdots) \frac{dS}{r} + \int_0^{t_0} G \frac{\partial}{\partial t} \int_{S(t)}(u \cos nx + \cdots) \frac{dS}{r}\right] =$$

$$\varrho \frac{\partial}{\partial t_0} \int_{S(t_0)}(u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz) \frac{dS}{r},$$

$$\lim_{r'=0}\int_0^{t_0} dt \int_{r=r'} [u'(r')\cos nx + v'(r')\cos ny + w'(r')\cos nz]\, q\, dS = -4\pi q(x_0, y_0, z_0, t_0),$$

$$\lim_{r'=0} -\int_0^{t_0} dt \int_{r=r'} (u\cos nx + \cdots) q'(r') dS = 0.$$

Nous avons donc, en changeant un peu les notations:

$$4\pi q(x, y, z, t) = \int_{\omega(t)} \left[X(\xi, \eta, \zeta, t) \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) + Y(\xi, \eta, \zeta, t) \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\right) + Z(\xi, \eta, \zeta, t) \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r}\right)\right] d\omega -$$

$$- \varrho \int_{S(t)} \left[u \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) + v \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\right) + w \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r}\right)\right] u_n dS + \int_{S(t)} q \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dS +$$

$$+ \varrho \frac{\partial}{\partial t} \int_{S(t)} (u\cos nx + v\cos ny + w\cos nz) \frac{dS}{r}.$$

On a ici:

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

$$\frac{d}{dn} = \cos nx \frac{\partial}{\partial \xi} + \cos ny \frac{\partial}{\partial \eta} + \cos nz \frac{\partial}{\partial \zeta},$$

$$d\omega = d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

n désigne la normale intérieure. Dans les intégrales de surface, ξ, η, ζ sont les coordonnées d'un point de la surface $S(t)$.

ÜBER PFAFFSCHE AGGREGATE.

Von

E. NETTO

in Giessen.

Am Schlusse einer Arbeit »über orthogonale Substitutionen» habe ich eine Bemerkung Kronecker's mitgeteilt (Acta mathematica 9, S. 299) dahingehend, dass noch kein Beweis dafür erbracht sei, dass jede orthogonale Determinante durch die Cayley'sche Bildungsvorschrift erreichbar ist. Ändere man z. B. in einer, nach dem Cayley'schen Verfahren hergestellten orthogonalen Determinante B die Vorzeichen der Elemente einer graden Anzahl von Zeilen, so erhalte man eine neue orthogonale Determinante B', die sich nicht nach der Cayley'schen Darstellungs-Vorschrift bilden lasse.

Die Kronecker'sche allgemeine Bemerkung gilt noch heute; das angeführte Beispiel ist dagegen nicht stichhaltig. In der Tat werde ich im Folgenden eine Methode entwickeln, durch die auch B' nach Cayley's Vorschrift dargestellt werden kann. Diese Methode stützt sich auf die Eigenschaften der Pfaff'schen Aggregate, d. h. der Quadratwurzeln aus schief-symmetrischen Determinanten, die bisher nicht beachtet zu sein scheinen. Natürlich reicht es aus, die Zeichenänderungen in zwei Zeilen von B vorzunehmen, und zwar können dabei die beiden ersten Zeilen von B benutzt werden. Die folgende Untersuchung behandelt und erledigt also die Frage: aus einer schiefen Determinante A ist nach der Cayley-schen Methode eine orthogonale Determinante B hergeleitet worden; welche Determinante A' muss an die Stelle von A treten, damit die aus ihr nach der gleichen Methode hergestellte orthogonale Determinante B' aus B durch Änderung der Vorzeichen der Elemente der beiden ersten Zeilen von B hervorgeht?

Zwischen den n^2 Grössen a_{ik} $(i, k = 1, 2, 3, \ldots n)$ sollen die Beziehungen

$$(1)\qquad \begin{gathered} a_{ik} + a_{ki} = 0 \quad (i \neq k), \\ a_{11} = a_{22} = a_{33} \quad \ldots = a_{nn} = \omega \end{gathered}$$

stattfinden, wobei ω eine willkürliche Grösse bedeutet. Die Determinante

$$|a_{ik}|$$

ist eine *schiefe*; für $\omega = 0$ ins besondere eine *schief-symmetrische;* also für $\omega = 0$ und ein ungrades n gleich Null, für $\omega = 0$ und ein grades n gleich einem Quadrate. Mit der zweiten Wurzel aus einem solchen Quadrate, die wir nach passender Bestimmung des Vorzeichens als *Pfaffsches Aggregat* bezeichnen, wollen wir uns eingehender beschäftigen.

Wir setzen $n = 2m$ und schreiben das *Pfaffsche Aggregat* m^{ter} *Ordnung*

$$(2)\qquad (1, 2, 3, 4, \ldots, 2m-1, 2m).$$

Für seine Bildung setzen wir folgendes fest. Das Glied

$$(3)\qquad + a_{12}\, a_{34} \ldots a_{2m-1,\,2m},$$

das wir als *Hauptglied* bezeichnen, dient zur Ableitung der weiteren Glieder: Man hält im Hauptgliede die ersten $(2m-3)$ Indizes fest und verschiebt die letzten drei zweimal zyklisch. Die Resultate

$$a_{12} \ldots a_{2m-3,\,2m-1}\, a_{2m,\,2m-2};\quad a_{12} \ldots a_{2m-3,\,2m}\, a_{2m-2,\,2m-1}$$

gehören, mit dem Pluszeichen versehen, zu den Gliedern von (2). In jedem der jetzt vorhandenen drei Glieder hält man die ersten $(2m-5)$ Indizes fest und verschiebt die letzten fünf je viermal zyklisch, so erhält man 12 neue Glieder von (2). In jedem der nun vorhandenen 15 hält man die ersten $(2m-7)$ Indizes fest und verschiebt die letzten 7 je sechsmal zyklisch u. s. w. bis endlich nur der erste Index fest bleibt und die folgenden $(2m-1)$ zyklisch verschoben werden. So erhält man die $3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2m-1)$ Glieder von (2); alle sind unter einander verschieden. In jedem dieser Summanden tritt jeder der $2m$ Indizes einmal und nur einmal auf. Jeder dieser Summanden kann durch Umstellung der Faktoren a_{ik} in mannigfaltige Formen gebracht werden, nämlich in $m!$ Ausserdem kann jedes eintretende a_{ik} durch $(-a_{ki})$ ersetzt werden; das gibt für die m Faktoren 2^m Formen; zusammen also $m!\,2^m$. Wie es sein muss ist

$$(m!\,2^m)(3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots 2m-1) = (2m)!$$

Ist umgekehrt ein Produkt gegeben aus m Faktoren a_{ik}

$$a_{\alpha\beta}\, a_{\gamma\delta} \ldots a_{\mu\nu},$$

in dem die Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu, \nu$ eine Permutation von $1, 2, 3, \ldots, 2m$ sind, so kommt dies mit richtigem Vorzeichen versehene Produkt in (2) vor. Das Vorzeichen wird durch

$$(-1)^{[\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots\mu,\nu]}$$

bestimmt, wobei $[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \mu, \nu]$ die Anzahl der Inversionen angibt, die in der Anordnung $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \nu$ auftreten. Das erkennt man, wenn man bedenkt, dass eine Zirkularverschiebung einer ungraden Anzahl von Elementen die Anzahl der Inversionen um eine grade Zahl ändert; dass für Umstellungen der a das Gleiche gilt, da durch eine Transposition der a zwei Transpositionen der Indizes hervorgerufen werden; endlich, dass die Verwandlung von a_{ik} in $(-a_{ki})$ die Anzahl der Inversionen um eine ungrade Anzahl ändert.

Nimmt man unter den Elementen der Klammer (2) eine Transposition vor, dann geht der Wert in den entgegengesetzt gleichen über

$$(4) \qquad (1, 2, \ldots i \ldots k \ldots, 2m) = -(1, 2, \ldots k \ldots i \ldots, 2m).$$

Dies zeigt, dass jede grade Substitution der Indizes (2) in sich selbst, jede ungrade in den entgegengesetzt gleichen Wert umwandelt. (2) ist also eine alternierende Funktion.

Für (2) ist die Reduktionsformel

$$(5) \quad \begin{aligned}(1, 2, 3, 4 \ldots 2m) = {} & a_{12}(3, 4, \ldots 2m) + a_{13}(4, 5, \ldots 2m, 2) + a_{14}(5, \ldots 2m, 2, 3) \\ & + \cdots + a_{1,2m}(2, 3, \ldots, 2m-1)\end{aligned}$$

bekannt; wir fügen die folgenden dazu

$$(6) \quad \sum_{(z)} (-1)^{[z_2, z_3, \ldots z_{2\varrho}, \ldots z_{2m}]} (1, z_2, z_3 \ldots z_{2\varrho})(z_{2\varrho+1}, \ldots z_{2m}) = \binom{m-1}{\varrho-2} (1, 2, 3, \ldots 2m),$$
$$(z_2 < z_3 < \ldots < z_{2\varrho};\ z_{2\varrho+1} < z_{2\varrho+2} < \ldots < z_{2m}),$$

wo die Summe auf alle Systeme der $z_\alpha = 2, 3, 4, \ldots 2m$ erstreckt wird, die den Ungleichheitsbedingungen der letzten Zeile von (6) genügen.

Das Pfaff'sche Aggregat (2) vereinfacht sich, wenn Gleichheiten unter den Elementen eintreten, die sich durch Gleichheiten unter den Indizes charakterisieren. So wird

$$\begin{aligned}(1, 2, 3, 4) &= a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23}, \\ (1, 1, 3, 4) &= a_{11}a_{34} + (a_{13}a_{41} + a_{14}a_{13}) = a_{11}a_{34} + a_{13}(a_{41} + a_{14}) = a_{11}a_{34}, \\ (1, 1, 3, 4, 5, 6) &= a_{11}(3, 4, 5, 6), \\ (1, 1, 3, \ldots, 8) &= a_{11}(3, 4, 5, 6, 7, 8)\end{aligned}$$

und allgemein

$$
\begin{aligned}
(1,1,3,4,\ldots 2m) &= a_{11}\cdot(3,4,\ldots 2m),\\
(1,1,3,3,5,\ldots 2m) &= a_{11}a_{33}\cdot(5,6,\ldots 2m),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Werden in (2) das i^{te} und das k^{te} Element einander gleich, dann ist der Wert des Aggregates

$$(-1)^{i+k-1}(1,2,\ldots i-1,i+1,\ldots k-1,k+1,\ldots 2m)\,a_{ii}.$$

Für das Folgende wollen wir der Analogie halber

$$a_{ik}=(ik)$$

setzen. Dann wird die schiefe n-reihige Determinante nach Potenzen von ω entwickelt

$$A=|a_{ik}|=\omega^n+\omega^{n-2}\Sigma(ik)^2+\omega^{n-4}\Sigma(iklm)^2+\omega^{n-6}\Sigma(iklmno)^2+\cdots, \tag{8}$$

wobei die Summen sich auf alle wohlgeordneten Kombinationen zweiter, vierter, sechster, ... Klasse der Elemente $1,2,3,\ldots n-1,n$ beziehen. Diese Formel ist bekannt und leicht abzuleiten. Bedeutet A_{ik} die Adjunkte von a_{ik} in A, so folgt

$$
\begin{aligned}
A_{gh} &= \omega^{n-2}(gh)-\omega^{n-3}\Sigma(gi)(hi)+\omega^{n-4}\Sigma(ik)(ghik)\\
&\quad -\omega^{n-5}\Sigma(gikl)(hikl)+\omega^{n-6}\Sigma(iklm)(ghiklm)\quad (g\neq h)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

wobei die Summen sich auf $i,k,l,m,\ldots$ beziehen, die als wohlgeordnete Kombinationen erster, zweiter, dritter, vierter, ... Klasse der Wertereihe

$$1,2,3,\ldots g-1,g+1,\ldots h-1,h+1,\ldots n$$

entnommen sind. Der Beweis der Formel (9) ist mit Schwierigkeiten verbunden. Die Ergänzung von (9) durch die Entwickelung von A_{gg} ist einfach, da A_{gg} wie A eine schiefe Determinante ist.

Wir machen nun folgende Substitution: An die Stelle jedes a_{ik} setzen wir

$$\frac{(12ik)}{\omega}=-\frac{1}{\omega}(a_{12}a_{ik}+a_{1i}a_{k2}+a_{1k}a_{2i}) \tag{10}$$

und bezeichnen dies durch

$$S(ik); \tag{11}$$

und eben so bedeute das, einer Funktion der a vorgesetzte S, dass in dieser Funktion jedes $a_{\alpha\beta}$ durch $S(\alpha\beta)$ zu ersetzen ist. Dabei wird $i=k=2$ ausgeschlossen; die Bedeutung von $S(22)$ soll sofort festgesetzt werden. Man hat nach (10)

$$S(ii) = -\frac{1}{\omega}(a_{12}a_{ii} + a_{1i}a_{i2} + a_{1i}a_{2i}).$$

Ist $i \neq 2$, dann zerstören sich die beiden letzten Summanden der Klammer wegen (1), und man hat wegen des zweiten Teils von (1)

$$S(\omega) = S(ii) = -a_{12} = -(12). \tag{12}$$

Wir lassen (12) auch für $i = 2$ gelten, trotzdem dabei $a_{i2} + a_{2i}$ nicht Null ist. Weiter wird

$$\begin{aligned} S(1i) &= -\frac{1}{\omega}(a_{12}a_{1i} + a_{11}a_{i2} + a_{1i}a_{21}) = -a_{i2} = a_{2i} \quad (i \neq 1) \\ S(2i) &= -\frac{1}{\omega}(a_{12}a_{2i} + a_{12}a_{i2} + a_{1i}a_{22}) = -a_{1i} \qquad (i \neq 2). \end{aligned} \tag{13}$$

Wendet man S auf $(iklm)$ an, so findet man

$$S(iklm) = \frac{a_{12}}{\omega^2}(12iklm) \tag{14}$$

und daraus mit Hülfe von (7)

$$\begin{aligned} S(1klm) &= \frac{a_{12}}{\omega^2}(121klm) = -\frac{a_{12}}{\omega}(2klm), \\ S(2klm) &= \frac{a_{12}}{\omega^2}(122klm) = +\frac{a_{12}}{\omega}(1klm), \\ S(12lm) &= -a_{12}a_{lm}. \end{aligned} \tag{15}$$

In der gleichen Weise ergibt sich

$$\begin{aligned} S(iklmno) &= -\frac{a_{12}^2}{\omega^3}(12iklmno), \\ S(1klmno) &= +\frac{a_{12}^2}{\omega^2}(2klmno), \\ S(2klmno) &= -\frac{a_{12}^2}{\omega^2}(1klmno), \\ S(12lmno) &= +\frac{a_{12}^2}{\omega}(lmno), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S(i_1i_2\ldots i_{2m}) &= (-1)^m\frac{a_{12}^{m-1}}{\omega^m}(12i_1i_2\ldots i_{2m}), \\ S(1i_2\ldots i_{2m}) &= (-1)^{m-1}\frac{a_{12}^{m-1}}{\omega^{m-1}}(2i_2i_3\ldots i_{2m}), \\ S(2i_2\ldots i_{2m}) &= (-1)^m\frac{a_{12}^{m-1}}{\omega^{m-1}}(1i_2i_3\ldots i_{2m}), \\ S(12i_3\ldots i_{2m}) &= (-1)^{m-1}\frac{a_{12}^{m-1}}{\omega^{m-2}}(i_3i_4\ldots i_{2m}). \end{aligned} \tag{16}$$

Es verdient bemerkt zu werden, dass die Substitution S von der Ordnung 4 ist; in der Tat hat man

$$S^2 a_{ik} = S(S a_{ik}) = -a_{ik}$$
$$S^4 a_{ik} = a_{ik}.$$

Diese Formeln setzen uns in den Stand, die Einwirkung der Substitution S auf die schiefe Determinante A und auf die Adjunkten A_{ik} ihrer Elemente a_{ik} zu bestimmen. Dabei reicht es aus, den Verlauf der Rechnung an einigen Beispielen zu zeigen. Es sei $n = 6$, dann wird

$$\begin{aligned} S(A) &= S[\omega^6 + \omega^4((12)^2 + (13)^2 + (14)^2 + \cdots + (23)^2 + (24)^2 + \cdots + (34)^2 + \cdots + (56)^2) \\ &\quad + \omega^2((1234)^2 + (1345)^2 + \cdots + (2345)^2 + \cdots + (3456)^2) + (123456)^2] \\ &= (21)^6 + (21)^4\left(\omega^2 + (23)^2 + (24)^2 + \cdots + (13)^2 + (14)^2 + \cdots + \frac{(1234)^2}{\omega^2} + \cdots + \frac{(1256)^2}{\omega^2}\right) \\ &\quad + (21)^2\left((12)^2(34)^2 + \frac{(12)^2(2345)^2}{\omega^2} + \cdots + \frac{(12)^2(1345)^2}{\omega^2} + \cdots + \frac{(12)^2(123456)^2}{\omega^4}\right) + \\ &\quad + \frac{(12)^4(3456)^2}{\omega^2} \\ &= \left(\frac{(21)}{\omega}\right)^4 \cdot A; \end{aligned}$$

und ähnlich

$$\begin{aligned} S(A_{12}) &= S[\omega^4(12) - \omega^3((13)(23) + \cdots + (16)(26)) + \omega^2((34)(1234) + \cdots + (56)(1256)) \\ &\quad - \omega((1345)(2345) + \cdots + (1456)(2456)) + (3456)(123456)] \\ &= (21)^4\omega - (21)^3(-(23)(13) - \cdots - (26)(16)) + \\ &\quad + (21)^2\left(\frac{(1234)}{\omega}(12)(34) + \cdots + \frac{(1256)}{\omega}(12)(56)\right) \\ &\quad - (21)\left(-\frac{(12)^2}{\omega^2}(2345)(1345) - \cdots - \frac{(12)^2}{\omega^2}(2456)(1456)\right) + \frac{(12)^3}{\omega^3}(123456)(3456) \\ &= -\left(\frac{(21)}{\omega}\right)^3 A_{12}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(A_{34}) &= S[\omega^4(34) - \omega^3((32)(41) + (32)(42) + (35)(45) + (36)(46)) \\ &\quad + \omega^2((12)(3412) + (15)(3415) + (16)(3416) + (25)(3425) + (26)(3426) + (56)(3456)) \\ &\quad - \omega((3125)(4125) + (3126)(4126) + (3156)(4156) + (3256)(4256)) \\ &\quad + (1256)(341256)] \\ &= -(21)^4\frac{(1234)}{\omega} - (21)^3\left((23)(24) + (13)(14) + \frac{(1235)(1245)}{\omega^2} + \frac{(1236)(1246)}{\omega^2}\right) \\ &\quad + (21)^2\left(-\omega(12)(34) - \frac{(12)}{\omega}(25)(2345) - \frac{(12)}{\omega}(26)(2346) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(12)}{\omega}(15)(1345) - \frac{(12)}{\omega}(16)(1346) - \frac{(12)}{\omega^3}(1256)(123456)\right) \end{aligned}$$

$$-(21)\left\{(12)^2(35)(45)+(12)^2(36)(46)+\frac{(12)^2}{\omega}(2356)(2456)+\right.$$
$$\left.+\frac{(12)^2}{\omega}(1356)(1456)\right\}-\frac{(12)^3}{\omega}(56)(3456)$$
$$=+\left(\frac{(21)}{\omega}\right)^3 A_{34}.$$

Allgemein erhält man bei einer n-reihigen schiefen Determinante A

$$S(A) = \left(\frac{(21)}{\omega}\right)^{n-2} A,$$
$$S(A_{ik}) = -\left(\frac{(21)}{\omega}\right)^{n-3} A_{ik}, \qquad (i=1,2;\ k=1,2,3,\ldots n;\ i\neq k)$$
$$(17)\qquad S(A_{ik}) = +\left(\frac{(21)}{\omega}\right)^{n-3} A_{ik}, \qquad (i=3,4,\ldots n;\ k=1,2,\ldots n;\ i\neq k)$$
$$S(A_{ii}) = \left(\frac{(21)}{\omega}\right)^{n-3}\left[\frac{1}{\omega}A - A_{ii}\right], \quad (i=1,2)$$
$$S(A_{ii}) = \left(\frac{(21)}{\omega}\right)^{n-3} A_{ii}, \qquad (i=3,4,\ldots n).$$

Mit Hülfe von A stellt Cayley die orthogonale Determinante des Wertes $+1$ her

$$B=|b_{ik}| \qquad (i,k=1,2,\ldots n),$$

wobei

$$b_{ik}=\frac{2\omega A_{ik}}{A} \qquad (i,k=1,2,\ldots n;\ i\neq k),$$
$$b_{ii}=\frac{2\omega A_{ii}}{A}-1 \qquad (i=1,2,\ldots n).$$

Bilden wir nun

$$S(B)=|S(b_{ik})|=|b'_{ik}|,$$

so finden wir vermittels der Formeln (17)

$$b'_{ik}=2\frac{S\omega S(A_{ik})}{S(A)}=\pm 2a_{21}\left(\frac{\omega}{(21)}\right)\frac{A_{ik}}{A}=\pm b_{ik}, \qquad (+\text{für } i=3,4,\ldots n;\ -\text{für } i=1,2);$$
$$b'_{ii}=2\frac{S\omega S(A_{ii})}{S(A)}-1=2a_{21}\left[\frac{1}{\omega}-\frac{A_{ii}}{A}\right]\cdot\left(\frac{\omega}{(21)}\right)-1 \quad (\text{für } i=1,2)$$
$$=1-2\frac{\omega A_{ii}}{A}=-b_{ii},$$
$$b'_{ii}=2\frac{S\omega S(A_{ii})}{S(A)}-1=2a_{21}\left(\frac{\omega}{(21)}\right)\frac{A_{ii}}{A}-1=b_{ii}, \quad (\text{für } i=3,4,\ldots n).$$

Man hat also

$$S(B) = \begin{vmatrix} -b_{11} & -b_{12} \dots & -b_{1n} \\ -b_{21} & -b_{22} \dots & -b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} \dots & b_{3n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} \dots & b_{nn} \end{vmatrix};$$

d. h. S wandelt in B nur die Vorzeichen der Elemente in den beiden ersten Zeilen in die entgegengesetzen um. Damit ist der in der Einleitung behauptete Satz bewiesen. —

Wir können unsere Bezeichnungen nach der Richtung hin erweitern, dass wir die Substitution, die jedes a_{ik} in

$$(18) \qquad -\frac{a_{\alpha\beta}a_{ik} + a_{\alpha i}a_{k\beta} + a_{\alpha k}a_{\beta i}}{\omega}$$

umwandelt, mit

$$(19) \qquad S_{\alpha\beta}(a_{ik})$$

bezeichnen, so dass unsere bisher benutzte Substitution (10), (11)

$$S(a_{ik}) = S_{1,2}(a_{ik})$$

zu setzen ist. Man findet dann als Kompositions-Resultat

$$\begin{aligned} S_{3,4}(S_{1,2}a_{ik}) &= -S_{3,4}\frac{a_{12}a_{ik} + a_{1i}a_{k2} + a_{1k}a_{2i}}{\omega} \\ &= \frac{1}{a_{21}}\left[\frac{a_{34}a_{12}+\cdots}{-\omega}\frac{a_{14}a_{3k}+\cdots}{-\omega} + \frac{a_{34}a_{1i}+\cdots}{-\omega}\frac{a_{34}a_{k2}+\cdots}{-\omega} + \frac{a_{34}a_{1k}+\cdots}{-\omega}\frac{a_{34}a_{2i}+\cdots}{-\omega}\right] \\ &= \frac{1}{a_{21}}\left[\frac{a_{12}(1\,2\,3\,4\,i\,k)}{\omega^2}\right] \\ &= \frac{(1\,2\,3\,4\,i\,k)}{\omega^2} = S_{1,2}(S_{3,4}a_{ik}). \end{aligned} \qquad (20)$$

Setzt man zwei von den Indizes der S einander gleich, so entsteht nach (7)

$$(21) \qquad S_{1,2}(S_{2,3}a_{ik}) = \frac{(1\,2\,2\,3\,i\,k)}{\omega^2} = \frac{(1\,3\,i\,k)}{\omega}.$$

Vergleicht man (20) mit (14), so ergibt sich

$$S_{1,2}(S_{3,4}a_{ik}) = \frac{S_{1,2}(3\,4\,i\,k)}{a_{12}}$$

und ähnliche Beziehungen folgen für die weiteren Kompositionen mehrerer $S_{\alpha\beta}$.

Giessen, Januar 1910.

SUR LE PRINCIPE DE DIRICHLET.

PAR

S. ZAREMBA

à CRACOVIE.

I. Introduction.

N° 1. Je me propose de développer dans ce mémoire les idées esquissées dans la communication que j'ai faite au IVe Congrès des mathématiciens, tenu à Rome du 6—11 Avril, 1908.

La méthode que je vais exposer s'applique aussi aisément à l'espace qu'au plan, de sorte que c'est seulement pour fixer les idées que je me bornerai au cas du plan.[1]

N° 2. Considérons dans le plan un système de coordonnées rectangulaires (x, y) ainsi qu'un domaine (D), d'un seul tenant, ne s'étendant pas à l'infini et que je supposerai être quarrable. Envisageons en outre, d'une part une fonction continue σ, définie sur la frontière (S) du domaine (D), et d'autre part l'ensemble (E) de toutes les fonctions f jouissant des propriétés suivantes:

1° Chacune des fonctions f est continue à l'intérieur du domaine (D) ainsi que sur la frontière (S) de ce domaine.

2° Les valeurs périphériques de chacune des fonctions f coïncident avec les valeurs de la fonction σ.

3° A l'*intérieur* du domaine (D), les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sans avoir nécessairement des valeurs périphériques déterminées. Il peut arriver que, pour aucune des fonctions f, l'intégrale

$$A(f) = \iint_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy \tag{1}$$

[1] Voir la note à la fin du mémoire.

ne prenne une valeur finie. C'est ce que M. HADAMARD[1] a montré sur un exemple très simple.

Nous admettrons que la fonction σ vérifie les conditions voulues pour que la circonstance précédente ne se présente pas. Les valeurs de l'intégrale $A(f)$ admettront alors une borne inférieure I, parfaitement déterminée.

Cela posé voici le Principe de Dirichlet tel que le comprenait RIEMANN: il existera dans l'ensemble (E) une fonction u vérifiant l'équation

$$A(u) = I. \tag{2}$$

C'est, on le sait, de là que RIEMANN concluait la possibilité du Problème de Dirichlet.

A la suite de la critique bien connue de WEIERSTRASS, les recherches relatives à l'existence de la solution du Problème de Dirichlet restèrent pendant longtemps indépendantes du fait de l'existence du nombre I. Ce n'est qu'en 1897 que M. CESARE ARZELÀ[2] a prévu avec une remarquable netteté le parti qu'il est possible de tirer de ce fait[3] et c'est seulement quelques années plus tard que M. HILBERT[4] a réussi, dans certains ces particuliers à triompher de toutes les difficultés de la question.

On a obtenu depuis, dans la même voie, des résultats d'une remarquable généralité.[5] En reprenant à mon tour la question, je me propose d'indiquer une méthode nouvelle qui permettra de retrouver ces résultats d'une façon très simple, sans rien faire perdre d'essentiel à leur généralité.

---

[1] HADAMARD. Sur le Problème de Dirichlet (Bulletin de la Société mathématique de France, 1906 p. 135).

[2] C. ARZELÀ. Sul Principio di Dirichlet. (Nota letta alla R. Accademia delle Sienze dell'Instituto di Bologna nell'Adunza del 24 Gennaio 1897).

[3] A la vérité M. H. WEBER a tenté, dès 1869, (Note zu Riemanns Beweis des Dirichletschen Princips, Journal de Borchardt, t. 71) de compléter le raisonnement de Riemann, mais les considérations développées dans ce travail, écrit avant la publication de la critique de Weierstrass, sont sujettes à de sérieuses objections.

[4] A) Ueber das Dirichletsche Princip (Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1900).

B) Ueber das Dirichletsche Princip (Festschrift zur Feier des 150-jährigen Bestehens der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1901).

[5] Voir en particulier, dans les Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, les travaux suivants:

A) BEPPO LEVI, Sul Principio di Dirichlet (1906).

B) FUBINI, Il Principio di minimo i teoremi di esistenza per i problemi al contorno relativi alle equazioni alle derivate parziale di ordini pari (1907).

C) LEBESGUE, Sur le principe de Dirichlet (1907).

II. Le Problème de Dirichlet transformé.

N° 3. Posons d'une façon générale:

$$B(P,Q)=\iint_{(D)}\left\{\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial y}\right\}dx\,dy \tag{1}$$

et désignons par φ une fonction donnée, quelconque à cela près que l'intégrale $A(\varphi)=B(\varphi,\varphi)$ ait une valeur finie et bien déterminée: la fonction φ pourra donc ne pas avoir de dérivées du premier ordre en certains points intérieurs au domaine (D), elle pourra même admettre elle-même des lignes de discontinuité. Cela posé, proposons-nous de déterminer une fonction v, harmonique à l'intérieur du domaine (D), telle que l'intégrale $A(v)$ soit finie et telle en outre que, pour toute fonction h, harmonique à l'intérieur du domaine (D), l'on ait

$$B(\varphi,h)=B(v,h), \tag{2}$$

pourvu que l'intégrale $A(h)$ ne soit pas dépourvue de signification.

J'appellerai ce problème, Problème de Dirichlet transformé, ou même simplement, Problème transformé.

On verra, à la fin de ce chapitre, que le problème précédent, tel que nous l'avons posé, est toujours possible, mais, dès maintenant, il est aisé de montrer que la solution, quand elle existe, est déterminée à une constante additive près. En effet, lorsqu'une fonction harmonique v_0 est une solution du Problème, la fonction:

$$v_0+\text{Const.}$$

en est évidemment une autre. D'autre part si chacune des fonctions v' et v'' est une solution du problème considéré, on aura:

$$B(v',h)=B(\varphi,h),$$
$$B(v'',h)=B(\varphi,h),$$

d'où:

$$B(v'-v'',h)=0,$$

pourvu que l'intégrale $A(h)$ ne soit pas infinie.

Posons, comme il est permis,

$$h=v'-v'',$$

il viendra:

$$B(v'-v'',v'-v'')=A(v'-v'')=0,$$

d'où:

$$v' - v'' = \text{Const.}$$

Le théorème est donc établi.

N° 4. Envisageons le cas particulier où la frontière du domaine (D) se réduit à un cercle (C) de centre O et de rayon r. Le point O étant pris pour pôle d'un système de coordonnées polaires (ϱ, Θ), posons:

$$\begin{cases} X_k = \frac{1}{\sqrt{k\,\pi}} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^k \cos k\,\Theta \\ Y_k = \frac{1}{\sqrt{k\,\pi}} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^k \sin k\,\Theta, \end{cases} \tag{3}$$

ainsi que:

$$\begin{cases} a_k = B(\varphi, X_k) \\ b_k = B(\varphi, Y_k). \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4}$$

Je dis que la solution générale du Problème transformé sera donnée par la formule suivante:

$$v = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k X_k + b_k Y_k), \tag{5}$$

où a_0 représente une constante arbitraire.

Pour le démontrer, posons:

$$v_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k X_k + b_k Y_k).$$

En se reportant aux formules (3) et (4) on s'assurera aisément que l'on a:

$$A(\varphi - v_n) = A(\varphi) - \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2).$$

Donc la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

est convergente. Cela prouve, on le vérifiera avec quelque attention, que la formule (5) définit une fonction harmonique à l'intérieur du domaine limité par le cercle (C) et que l'on a:

$$A(v) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2). \tag{6}$$

L'intégrale $A(v)$ a donc une valeur finie.

Observons maintenant ceci: pour toute fonction h, harmonique à l'intérieur du cercle (C), nous avons le développement en série suivant:

$$h = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k X_k + \beta_k Y_k), \tag{7}$$

en désignant par les α et β des coefficients constants. Supposons que l'intégrale $A(h)$ ait un sens. Nous aurons:

$$A(h) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2), \tag{8}$$

la série du second membre étant covergente. Les formules (7) et (4) donnent aisément:

$$B(\varphi, h) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \alpha_k + b_k \beta_k),$$

en tenant compte de la convergence de la série (8).

D'autre part il résulte des formules (5) et (7) ainsi que de la convergence des séries (6) et (8) que l'on a:

$$B(v, h) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \alpha_k + b_k \beta_k).$$

On a donc:

$$B(\varphi, h) = B(v, h)$$

pourvu que l'intégrale $A(h)$ ait un sens. Il est donc prouvé que la formule (5) fait connaître une solution du Problème transformé pour le cercle et, en se reportant au numéro précédent, on s'assure de suite que la solution trouvée est bien la solution générale du Problème.

N° 5. Passons au cas où le domaine (D) pourrait être défini comme l'ensemble des points dont chacun appartient à l'un au moins de deux domaines (D_1) et (D_2) ayant des points intérieurs communs et tels que, pour chacun d'eux, on sache résoudre le Problème transformé.

Dans ce cas, un procédé alterné permettra de résoudre le Problème pour le domaine (D) lui-même.

Pour établir ce point, désignons, comme précédemment, par φ la fonction donnée et formons une suite infinie dont le premier terme φ_0 représente la fonction définie par l'équation

$$\varphi_0 = \varphi,$$

le terme général $\varphi_{2k+\alpha}$, où α désigne l'un des nombres 1 ou 2, étant une fonction se déduisant de la fonction $\varphi_{2k+\alpha-1}$ de la façon suivante: à l'intérieur du domaine (D_α), la fonction $\varphi_{2k+\alpha}$ est égale à une solution du Problème transformé pour ce domaine et par rapport à la fonction $\varphi_{2k+\alpha-1}$; dans le reste du domaine (D) on a

$$\varphi_{2k+\alpha} = \varphi_{2k+\alpha-1}.$$

D'après cela, la fonction $\varphi_{2k+\alpha}$ ne sera définie, dans la partie (D_α) du domaine (D) qu'à une constante additive près, mais il n'y a pas lieu de lever cette indétermination, parce que les dérivées

$$\frac{\partial \varphi_{2k+\alpha}}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial \varphi_{2k+\alpha}}{\partial y}$$

interviendront seules dans les considérations qui vont suivre.

A l'intérieur du domaine (D_α), la lettre α représentant toujours l'un des nombres 1 ou 2, la fonction $\varphi_{2t+\alpha}$ est une fonction harmonique et l'intégrale

$$\iint_{(D_\alpha)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_{2t+\alpha}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{2t+\alpha}}{\partial y} \right)^2 \right\} dx\,dy$$

a une valeur finie, pour toute valeur entière et non négative de t. Cela étant, il suffira de se reporter à la définition de la fonction $\varphi_{2k+\alpha}$ pour reconnaître que l'on a:

$$(9) \quad \left| \begin{aligned} & \iint_{(D_\alpha)} \left\{ \frac{\partial \varphi_{2k+\alpha}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{2t+\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{2k+\alpha}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{2t+\alpha}}{\partial y} \right\} dx\,dy = \\ & \qquad = \iint_{(D_\alpha)} \left\{ \frac{\partial \varphi_{2k+\alpha-1}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{2t+\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{2k+\alpha-1}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{2t+\alpha}}{\partial y} \right\} dx\,dy. \end{aligned} \right.$$

Or, à l'intérieur du domaine $(D - D_\alpha)$, on a

$$\varphi_{2k+\alpha} = \varphi_{2k+\alpha-1}.$$

Donc l'égalité (9) ne cesserait pas d'être vérifiée si les intégrations, au lieu d'être bornées au domaine (D_α), étaient étendues à tout le domaine (D). Par conséquent nous arrivons au résultat suivant: on a

$$(10) \qquad B(\varphi_n, \varphi_m) = B(\varphi_n, \varphi_{m-1}),$$

pourvu que les entiers positifs n et m vérifient la congruence

$$m \equiv n \pmod 2,$$

ou, ce qui revient au même, pourvu que la somme $m + n$ soit paire.

Lorsque le nombre m est supérieur à l'unité, rien n'empêche de changer, dans la relation (10), n en $m-1$ et m en $n+1$. En tenant compte de la relation ainsi obtenue, on trouve

$$B(\varphi_n, \varphi_m) = B(\varphi_{n+1}, \varphi_{m-1}).$$

Il est aisé d'en conclure ceci: lorsque chacun des entiers p et q est supérieur à zéro et lorsque leur somme est paire, l'intégrale

$$B(\varphi_p, \varphi_q) \tag{11}$$

ne dépend que de la somme $p+q$.

En se reportant de nouveau à la relation (10), on conclura aisément de là que l'intégrale (11) jouit de la même propriété encore dans le cas où le somme $p+q$ est impaire et cela, sans que la valeur zéro pour l'un des entiers p et q soit alors à exclure. Il résulte de ces propriétés de l'intégrale (11) que l'on peut poser:

$$I_{p+q} = B(\varphi_p, \varphi_q).$$

La relation (10) pourra alors s'écrire ainsi:

$$I_{2k} = I_{2k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{12}$$

Cette relation nous apprend que tous les I_n sont positifs et, moyennant l'inégalité de M. Schwarz, elle donne:

$$I_{2k}^2 \leq I_{2k} I_{2k-2},$$

d'où:

$$I_{2k} \leq I_{2k-2}. \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

En se reportant de nouveau à l'équation (12), on déduit immédiatement de la relation précédente la conséquence suivante: la relation

$$0 \leq I_n \leq I_{n-1} \tag{13}$$

subsiste pour toute valeur entière et positive de n.

On a donc:

$$\lim_{n=\infty} I_n = I, \tag{14}$$

en désignant par I un nombre non négatif parfaitement déterminé.

N° 6. Nous avons:

$$A(\varphi_p - \varphi_q) = I_{2p} - 2I_{p+q} + I_{2q}.$$

Par conséquent:

$$\lim_{\substack{p=\infty \\ q=\infty}} A(\varphi_p - \varphi_q) = 0, \tag{15}$$

en vertu de l'équation (14).

L'équation (15) entraîne évidemment les suivantes:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{p=\infty \\ q=\infty}} \iint\limits_{(D_1)} \left\{ \dfrac{\partial \varphi_p}{\partial x} - \dfrac{\partial \varphi_q}{\partial x} \right\}^2 dx\, dy = 0 \\ \lim\limits_{\substack{p=\infty \\ q=\infty}} \iint\limits_{(D_2)} \left\{ \dfrac{\partial \varphi_p}{\partial x} - \dfrac{\partial \varphi_q}{\partial x} \right\}^2 dx\, dy = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Or suivant que l'entier positif n sera impair ou pair, la fonction φ_n et par conséquent aussi la fonction $\dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x}$, seront des fonctions régulièrement harmoniques à l'intérieur du domaine (D_1) ou du domaine (D_2). Donc, en s'appuyant sur les théorèmes que j'ai établis aux § 5 et 6 de mon mémoire *Sur l'intégration de l'équation biharmonique*,[1] on peut énoncer les propositions suivantes:

1° L'équation:

$$v'_1 = \lim_{k=\infty} \frac{\partial \varphi_{2k+1}}{\partial x}, \tag{17}$$

équivalente à l'équation:

$$v'_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{\partial \varphi_{2k+3}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_{2k+1}}{\partial x} \right\},$$

définit une fonction v'_1, régulièrement harmonique à l'intérieur du domaine (D_1) et l'on a:

$$\lim_{k=\infty} \iint\limits_{(D_1)} \left(v'_1 - \frac{\partial \varphi_{2k+1}}{\partial x} \right)^2 dx\, dy = 0. \tag{18}$$

2° L'équation:

$$v''_1 = \lim_{k=\infty} \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial x} \tag{19}$$

définit une fonction v''_1 régulièrement harmonique à l'intérieur du domaine (D_2) et l'on a:

$$\lim_{k=\infty} \iint\limits_{(D_2)} \left\{ v''_1 - \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial x} \right\}^2 dx\, dy = 0. \tag{20}$$

Les équations (16) permettent de déduire des équations (18) et (20) les équations plus générales que voici:

[1] Bulletin de l'Academie des Sciences de Cracovie. Janvier 1908.

$$(21)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{p=\infty} \iint\limits_{(D_1)} \left(v'_1 - \dfrac{\partial \varphi_p}{\partial x}\right)^2 dx\,dy = 0 \\ \lim\limits_{p=\infty} \iint\limits_{(D_2)} \left(v''_1 - \dfrac{\partial \varphi_p}{\partial x}\right)^2 dx\,dy = 0. \end{cases}$$

Désignons par (D_0) le domaine commune aux domaines (D_1) et (D_2) et considérons l'identité suivante:

$$\iint\limits_{(D_0)} (v'_1 - v''_1)^2\,dx\,dy = \iint\limits_{(D_0)} \left\{\left(v'_1 - \frac{\partial \varphi_p}{dx}\right) - \left(v''_1 - \frac{\partial \varphi_p}{\partial x}\right)\right\}^2 dx\,dy\,.$$

Les équations (21) nous apprennent que le second membre de cette identité tend vers zéro lorsque l'entier p croît indéfiniment. D'ailleurs le premier membre de l'identité considérée ne dépend pas de p. On a donc:

$$\iint\limits_{(D_0)} (v'_1 - v''_1)^2\,dx\,dy = 0.$$

Cela prouve que l'on a:

$$v'_1 = v''_1$$

à l'intérieur du domaine (D_0), commun aux domaines (D_1) et (D_2). On définira donc une fonction v_1 rigulièrement harmonique à l'intérieur de tout le domaine (D) en spécifiant qu'elle est égale à v'_1 à l'intérieur du domaine (D_1) et à v''_1 à l'intérieur du domaine (D_2). Il est aisé de conclure de ce qui précède que la fonction harmonique v_1 est carartérisée par la propriété suivante: on a

$$(22)\qquad \lim_{p=\infty} \iint\limits_{(D)} \left\{v_1 - \frac{\partial \varphi_p}{\partial x}\right\}^2 dx\,dy = 0.$$

On établirait d'une façon analogue qu'il existe une fonction v_2, et une seule, harmonique à l'intérieur du domanie (D) et telle que l'on ait:

$$(23)\qquad \lim_{p=\infty} \iint\limits_{(D)} \left\{v_2 - \frac{\partial \varphi_p}{\partial y}\right\}^2 dx\,dy = 0.$$

N° 7. Assurons-nous maintenant que les équations

$$(24)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = v_1 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = v_2 \end{cases}$$

sont compatibles et définissent, évidemment à une constante additive près, une fonction v harmonique à l'intérieur de tout le domaine (D).

On reconnaîtra aisément, en s'appuyant sur les faits établis plus haut ainsi que sur les théorèmes rappelés au numéro précédent que les fonctions v_1 et v_2 pourront être représentées, à l'intérieur du domaine (D_0), commun aux domaines (D_1) et (D_2), par les séries suivantes

$$v_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_p}{\partial x} \right),$$

$$v_2 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_p}{\partial y} \right)$$

et que, à l'intérieur de tout domaine *intérieur* au domaine (D_0) ces séries seront uniformément convergentes. Il résulte alors des théorèmes classiques relatifs aux séries de fonctions harmoniques que, à l'intérieur du domaine (D_0), on aura

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} + \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi_{p+1}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x \partial y} \right\}.$$

Cela prouve que la fonction

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} \quad \frac{\partial v_2}{\partial x},$$

régulièrement harmonique dans le domaine (D), est nulle dans la portion (D_0) de ce domaine. Elle est donc nulle dans tout le domaine (D).

Par conséquent les équations (24) sont compatibles.

Cela posé, on reconnaît immédiatement que la solution commune v de ces équations est régulièrement analytique dans le voisinage de tout point intérieur au domaine (D) et que, à l'intérieur de ce domaine, elle satisfait à l'équation

$$\triangle v = c \tag{25}$$

en désignant par $\triangle$ l'opérateur de Laplace et par c une constante.

Reste à faire voir que la constante c est nulle. J'observe à cet effet que les équations (22), (23) et (24) donnent:

$$\lim_{p=\infty} A(v - \varphi_p) = 0. \tag{26}$$

Désignons par (T) le domaine limité par un cercle (C) situé en entier à l'intérieur du domaine (D_0). On aura:

$$\lim_{p=\infty} \iint_{D_1} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_p}{\partial y} \right)^2 \right\} dx\, dy = 0, \tag{27}$$

en vertu de l'équation (26). D'ailleurs les fonctions φ_p ($p > 1$) sont régulièrement harmoniques à l'intérieur du domaine (D_0); on aura donc, dans tout ce domaine.

$$\triangle (v - \varphi_p) = c$$

en vertu de l'équation (25), et si, en plaçant l'origine des coordonnées au centre du cercle (c) et en désignant par r le rayon de ce cercle, on pose:

$$v - \varphi_p = h_p + \tfrac{1}{4} c\,(x^2 + y^2 - r^2)$$

on aura:

$$\triangle h_p = 0$$

dans tout le domaine (D_0). Cela étant on trouve aisément:

$$\iint_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_p}{\partial y} \right)^2 \right\} dx\, dy = \iint_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial h_p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h_p}{\partial y} \right)^2 \right\} dx\, dy + \frac{\pi c^2 r^4}{8},$$

d'où:

$$c = 0,$$

à cause de l'équation (27).

En résumé il existe une fonction v, définie à une constante additive près, régulièrement harmonique à l'intérieur du domaine (D), vérifiant l'équation (26).

N° 8. Je vais établir que la fonction v représente la solution du Problème transformé.

Désignons par h une fonction harmonique à l'intérieur du domaine (D), quelconque à cela près que l'intégrale $A(h)$ ait un sens. Il résulte immédiatement de la définition des fonctions φ_p que l'on aura:

$$B(\varphi, h) = B(\varphi_p, h)$$

pour toute valeur entière et positive de p. L'égalité précédente peut s'écrire ainsi:

$$B(\varphi, h) = B(\varphi_p - v, h) + B(v, h).$$

Or

$$\lim_{p=\infty} B(\varphi_p - v, h) = 0,$$

à cause de l'équation (26). Nous avons donc:

$$B(\varphi, h) = B(v, h).$$

Cela prouve que la fonction v est bien une solution du Problème transformé; elle en est d'ailleurs la solution générale, on le reconnait immédiatement en se reportant au théorème du N° 3.

J'ajoute ceci: il résulte des équations (14) et (26) que l'on a:

$$A(v) = I. \tag{28}$$

N° 9. Considérons enfin le cas le plus général, où le domaine (D), ne satisferait qu'aux conditions d'être borné et quarrable.

Envisageons, comme dans la méthode de balayage, une suite infinie de cercles,

$$(C_1),\ (C_2),\ (C_3),\ \ldots \tag{29}$$

tous intérieurs au domaine (D) et tels que tout point intérieur au domaine (D) soit intérieur à l'un au moins des cercles précédents.

Désignons par (D_n) le domaine formé par l'ensemble des points tels que chacun d'eux soit intérieur à l'un au moins des cercles:

$$(C_1),\ (C_2),\ \ldots\ (C_n).$$

Le domaine (D_n) pourra se composer d'un certain nombre de régions, soit $(R_{n,1})$, $(R_{n,2}),\ \ldots\ (R_{n,\alpha_n})$, telles que deux d'entre elles n'aient jamais de points intérieurs communs et que chacune de ces régions constitue un domaine d'un seul tenant.

Cela posé, continuons à désigner par φ la fonction donnée dans le Problème transformé et formons une suite infinie de fonctions dont la première ψ_0 soit la fonction définie par l'équation

$$\psi_0 = \varphi, \tag{30}$$

la fonction ψ_n, formant le terme de rang $n+1$ de la suite considérée, dérivant de ψ_{n-1} de la façon suivante: à l'intérieur de la région $(R_{n,i})$, pour $i = 1, 2, 3, \ldots \alpha_n$, la fonction ψ_n est égale à une solution du Problème transformé pour cette région et par rapport à la fonction ψ_{n-1}, dans tout le reste du domaine (D), on a:

$$\psi_n = \psi_{n-1}. \tag{31}$$

Il est évident que les résultats déjà établis dans les numéros précédents, assurent l'existence de tous les termes de la suite:

$$\psi_0,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \ldots \tag{32}$$

Considérons une fonction w assujettie uniquement à vérifier les conditions suivantes:

1° L'intégrale $A(w)$ a un sens.

2° La fonction w est régulièrement harmonique dans le voisinage de tout point intérieur au domaine (D_n).

Il résulte immédiatement de la définition de la suite (32) que l'inégalité

$$k \leq n \tag{33}$$

entraîne l'égalité suivante:

$$B(\psi_{k-1}, w) = B(\psi_k, w).$$

Donc l'inégalité (33) entraîne aussi l'égalité suivante:

$$B(\psi_k, w) = B(\psi_n, w). \tag{34}$$

Or la fonction ψ_n elle-même vérifie les conditions imposées à la fonction w. Par conséquent l'inégalité (33) entraîne la relation suivante:

$$B(\psi_k, \psi_n) = T_n, \tag{35}$$

en posant:

$$T_n = B(\psi_n, \psi_n) = A(\psi_n). \tag{36}$$

Si, après avoir posé $k = n-1$ dans l'équation (35), on fait usage de l'inégalité de M. Schwarz, on trouve:

$$T_n \leq T_{n-1}.$$

On a donc:

$$\lim_{n=\infty} T_n = I, \tag{37}$$

en désignant par I un nombre parfaitement déterminé, positif ou nul.

L'inégalité (33) étant vérifiée, on a

$$A(\psi_n - \psi_k) = T_n - 2T_n + T_k = T_k - T_n$$

en vertu des relations (35) et (36). On en conclut, en tenant compte de (37), que l'on a:

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ k=\infty}} A(\psi_n - \psi_k) = 0. \tag{38}$$

N° 10. Désignons par $(D^{(\delta)})$ le domaine formé par l'ensemble des points intérieurs au domaine (D) et tels que la plus courte distance de chacun d'eux à la frontière de ce domaine soit supérieure ou égale à une longueur non nulle δ. Il serait aisé de démontrer qu'il est possible de faire correspondre à la longueur δ, si petite qu'elle soit, un nombre entier et positif p, tel que, sous la condition

$$n > p \tag{39}$$

tout point du domaine $(D^{(\delta)})$ ou de sa frontière soit intérieur au domaine (D_n). Mais nous admettrons ce point sans développer la démonstration, parce qu'il

est manifestement possible de former la suite (29) de telle façon que l'existence du nombre p soit assurée à l'avance.

Cela posé, je fais les remarques suivantes:

1° L'équation (38) entraîne chacune des deux suivantes:

$$\lim_{\substack{n=\infty\\k=\infty}} \iint_{(D_p)} \left\{\frac{\partial \psi_n}{\partial x} - \frac{\partial \psi_k}{\partial x}\right\}^2 dx\,dy = 0$$

et

$$\lim_{\substack{n=\infty\\k=\infty}} \iint_{(D_p)} \left\{\frac{\partial \psi_n}{\partial y} - \frac{\partial \psi_k}{\partial y}\right\}^2 dx\,dy = 0$$

2° Pour toute valeur de n vérifiant l'inégalité (39), la fonction ψ_n et, par conséquent, les fonctions $\frac{\partial \psi_n}{\partial x}$ et $\frac{\partial \psi_n}{\partial y}$ sont des fonctions régulièrement harmoniques à l'intérieur du domaine (D_p).

On conclura de ces remarques, au moyen des théorèmes rappelés au N° 6, que les séries:

$$(40)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \psi_p}{\partial x} + \displaystyle\sum_{k=p}^{\infty} \left\{\frac{\partial \psi_{k+1}}{\partial x} - \frac{\partial \psi_k}{\partial x}\right\}, \\ \dfrac{\partial \psi_p}{\partial y} + \displaystyle\sum_{k=p}^{\infty} \left\{\frac{\partial \psi_{k+1}}{\partial y} - \frac{\partial \psi_k}{\partial y}\right\}, \end{cases}$$

sont uniformément convergentes dans tout domaine intérieur au domaine (D_p), qu'elles jouissent, par conséquent, de cette propriété dans les limites du domaine $(D^{(\lambda)})$ et que les sommes de ces séries sont des fonctions régulièrement harmoniques à l'intérieur du domaine (D_p). Il est aisé de voir que cela nous permet d'énoncer la proposition suivante: les équations

$$v_1 = \lim_{n=\infty} \frac{\partial \psi_n}{\partial x}$$

et

$$v_2 = \lim_{n=\infty} \frac{\partial \psi_n}{\partial y}$$

définissent des fonctions v_1 et v_2 régulièrement harmoniques à l'intérieur du domaine (D) et, en tout point intérieur à ce domaine, on a

$$(41)\qquad \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}.$$

En se reportant au § 6 de mon mémoire cité au N° 6, on reconnaîtra, avec un peu d'attention, que l'on a encore:

$$\lim_{n=\infty} \iint_{(D)} \left\{ \left(v_1 - \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \right)^2 + \left(v_2 - \frac{\partial \psi_n}{\partial y} \right)^2 \right\} dx\, dy = 0. \tag{42}$$

Il résulte de l'équation (41) qu'il existe une fonction v, définie à l'intérieur du domanie (D) à une constante additive près, vérifiant les equations

$$\frac{\partial v}{\partial x} = v_1 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial y} = v_2.$$

En vertu de l'équation (42), ou aura:

$$\lim_{n=\infty} A(v - \psi_n) = 0. \tag{43}$$

Cela posé, un raisonnement analogue à celui que nous avons développé à la fin du N° 7 permettra de démontrer que la fonction v satisfait à l'équation de Laplace à l'intérieur du domaine (D).

Je dis que la fonction v représente la solution du Problème transformé pour le domaine (D) par rapport à la fontion φ. En effet, nous avons vu que la relation (33) entraîne la relation (34) pourvu que la fonction w soit harmonique à l'intérieur du domaine (D_n) et que l'intégrale $A(w)$ ait un sens. Donc si l'on désigne par h une fonction harmonique à l'intérieur du domaine (D), quelconque à cela près que l'intégrale $A(h)$ ait un sens, on aura

$$B(\psi_k, h) = B(\psi_n, h)$$

pour toutes les valeurs entières et non négatives des nombres k et n. Or, par définition

$$\psi_0 = \varphi.$$

Nous avons donc

$$B(\varphi, h) = B(\psi_n, h)$$

pour toutes les valeurs entières et positives de n. Cela étant il n'y a plus, pour achever la démonstration, qu'à reprendre le raisonnement du N° 8. J'ajoute ceci: il est aisé de conclure de la relation (43) que l'on a:

$$A(v) = I \tag{44}$$

où I est le nombre défini par l'équation (37).

En résumé nous avons fait comaître un procédé théorique pour résoudre le Problème transformé et, par cela même nous avons établi la possibilité de ce Problème, en nous bornant à admettre les hypothèses suivantes:

1° Le domaine (D) est un domaine borné et quarrable.

2° La fonction φ vérifie les conditions voulues pour que l'intégrale $A(\varphi)$ ait un sens.

D'après cela le Problème transformé, tel qu'il a été posé au N° 3, est, comme nous l'avions annoncé, toujours possible.

III. Application au Problème et au Principe de Dirichlet.

N° 11. Dans tout ce chapitre nous allons admettre que, dans le Problème transformé, la fonction donnée φ, tout en vérifiant, bien entendu, les hypothèses du N° 3, jouisse encore des propriétés suivantes:

1° Elle est continue dans tout le domaine (D) ainsi qu'en chaque point de la frontière.

2° Les points *intérieurs* à tout domaine intérieur au domaine (D) et tels que, en chacun d'eux, l'une au moins des dérivées cesse d'exister ou d'être continue, sont disposés sur un nombre fini de lignes algébriques.

N° 12. Commençons par l'étude du cas du cercle et examinons d'abord le cas très particulier où la fonction φ s'annulerait sur la circonférence. Eu égard aux hypothèses adoptées au sujet de la fonction φ, on aura le droit de transformer les formules (4) du chapitre précédent au moyen de l'intégration par partie.

On trouvera de la sorte:

$$a_k = b_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

et la formule (5) nous donnera alors

$$v = a_0.$$

Donc, lorsque la fonction φ s'annule sur la circonférence, la fonction v, solution du Problème transformé se réduit à une constante arbitraire.

Laissons maintenant à la fonction φ sa généralité et désignons par u la fonction, harmonique à l'intérieur du cercle, dont les valeurs périphériques coïncident avec celles de la fonction φ.

Si, dans le Problème transformé, on substitue à la fonction φ la fonction $\varphi - u$, la solution, d'après ce que nous venons de voir, se réduira à une constante. On aura donc:

$$B(\varphi - u, h) = 0$$

pour toute fonction h, harmonique à l'intérieur du cercle considéré et telle que l'intégrale $A(h)$ ait un sens. Or l'équation précédente équivaut à la suivante:

$$B(\varphi, h) = B(u, h).$$

Cela prouve que la fonction u est une solution du Problème transformé pour le cercle considéré et par rapport à la fonction φ.

Nous concluons de là, en nous appuyant sur le théorème du N° 3, le théorème suivant:

Dans les conditions où nous nous sommes placés, la solution générale v du Problème transformé est donnée par la formule suivante:

$$v = u + \text{Const.}$$

N° 13. Passons au cas général où l'on se borne à admettre que le domaine (D) vérifie les hypothèses du N° 2. Le théorème qui vient d'être établi nous apprend que la suite (32) du chapitre précédent pourra être formée de façon que chacune des fonctions ψ_n soit continue dans tout le domaine (D) et sur la frontière.

Cela posé, admettons que chacune des fonctions ψ_n jouisse de la propriété précédente et envisageons d'abord le cas où les valeurs périphériques de la fonction φ se réduiraient à zéro. Je dis que la suite

$$\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots \tag{1}$$

sera alors convergente et aura zéro pour limite.

En effet, désignons par ε un nombre positif, non nul, arbitrairement petit. Il correspondra au nombre ε une longueur, δ, non nulle, telle que, en désignant par d la plus courte distance d'un point P du domaine (D) à la frontière et par $\varphi(P)$ la valeur de la fonction φ en P, l'inégalité

$$d \leq \delta \tag{2}$$

entraîne l'inégalité

$$|\varphi(P)| < \varepsilon. \tag{3}$$

D'autre part (N° 10) il correspondra à la longueur δ un nombre entier et positif p, tel que, sous la condition

$$n \geq p \tag{4}$$

l'inégalité (2) soit vérifiée pour tout point du domaine $(D - D_n)$. Or, à l'intérieur de ce domaine et sur la frontière, on a

$$\psi_n = \varphi,$$

tandis que dans le reste du domaine (D) la fonction ψ_n vérifie l'équation de Laplace. Par conséquent, à cause de la continuité de la fonction ψ_n, l'inégalité (4) entraînera l'inégalité:

$$|\psi_n| < \varepsilon$$

pour tout le domaine (D). Donc, lorsque les valeurs périphériques de la fonction φ se réduisent à zéro, la suite (1) aura bien zéro pour limite.

Il résulte immédiatement de ce qui précède que, dans les conditions considérées, les dérivées $\frac{\partial \psi_n}{\partial x}$ et $\frac{\partial \psi_n}{\partial y}$ tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$, en tout point intérieur au domaine (D). Par conséquent nous avons le théorème suivant:

Lorsque les valeurs périphériques de la fonction φ se réduisent à zéro, la solution du Problème transformé se réduit à une constante.

Envisageons maintenant le cas où les valeurs périphériques de la fonction φ sont quelconques mais supposons qu'il existe une fonction u, régulièrement harmonique à l'intérieur du domaine (D) et telle que ses valeurs périphériques coïncident avec celles de la fonction φ.

Il suffirait alors de raisonner, comme à la fin du numéro précédent, pour établir le théorème suivant:

Lorsque l'hypothèse considérée est vérifiée, la solution générale v du Problème transformé est donnée par la formule suivante:

$$v = u + \text{Const.} \tag{5}$$

N° 14. Il nous faut examiner maintenant la question suivante: la fonction u, entrant dans la formule (5), existe-t-elle?

Il est aisé de voir que, pour pouvoir l'affirmer, il est nécessaire de restreindre dans une certaine mesure la généralité du domaine (D). En effet, définissons, par exemple, ce domaine au moyen des relations suivantes:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \neq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases} \tag{6}$$

et posons

$$\varphi = x^2 + y^2.$$

Dans ces conditions le domaine (D) sera borné et quarrable et la fonction φ satisfera aux hypothèses du N° 11, mais la fonction u n'existera pas et voici pourquoi: on vérifie aisément que, dans l'exemple considéré, la fonction v se réduit à une constante, donc, en vertu du théorème qui termine le numéro précédent, la fonction u, si elle existait, devrait aussi se réduire à une constante; or cela est impossible puisque cette fonction devrait être égale à zéro au centre du cercle considéré et à l'unité sur la circonférence.

Je vais démontrer que la fonction u existe sûrement lorsque le domaine (D) vérifie, en dehors des hypothèses adoptées jusqu'ici, une condition additionnelle que j'appellerai pour abréger, la *condition* (C).

Pour énoncer cette condition, considérons un point quelconque O situé sur la frontière (s) du domaine (D) et, de ce point comme centre, décrivons un cercle (Σ) de rayon r. L'ensemble des points, intérieurs à la fois au cercle (Σ) et au domaine (D), pourra se composer d'un nombre quelconque de régions distinctes (d) dont chacune serait d'un seul tenant. Désignons par (d') l'une de ces régions et considérons un point variable M assujetti à rester à *l'intérieur* de cette région. Soit θ l'angle formé par le rayon OM avec un axe fixe. Imposons à l'angle θ la condition de varier d'une façon continue avec la position du point M. Dans ce cas la condition (C) pourra être exprimée de la façon suivante: Lorsque le rayon r du cercle (Σ) vérifie l'inégalité

$$r \leq R, \tag{7}$$

où R représente une longueur indépendante de la position du point O sur la frontière (s) du domaine (D) et du choix de la région (d') parmi les régions (d), les valeurs de l'angle θ devront, de quelque façon que se déplace le point M à l'intérieur de la région (d'), ne pas sortir d'un intervalle (θ_1, θ_2), tel que l'on ait

$$|\theta_2 - \theta_1| < 2\alpha, \tag{8}$$

en désignant par α un nombre positif fini qui ne devra dépendre, comme la longueur R, ni de la position du point O sur (s) ni du choix de la région (d') parmi les régions (d).

Reprenons la suite (1) et supposons, ce qui, d'après la remarque faite au début du N° 13, est permis, que chaune des fonctions de cette suite soit continue dans le domaine (D) et sur la frontière. Supposons en outre que le domaine (D) vérifie la condition (C). Cela posé, désignons par μ un nombre positif, différent de zéro mais arbitrairement petit, choisi à l'avance et considérons la longueur R, second membre de l'inégalité (7). On pourra faire correspondre au nombre μ une longueur non nulle δ_1, vérifiant l'inégalité

$$\delta_1 < R, \tag{9}$$

telle que l'inégalité

$$AB < \delta_1 \tag{10}$$

entraîne la suivante

$$|\varphi(A) - \varphi(B)| < \mu, \tag{11}$$

en convenant d'une façon générale de désigner par $F(P)$ la valeur d'une fonction F des coordonnées en un point P du plan.

Considérons maintenant le second membre de l'inégalité (8), posons:

$$\beta = \frac{\alpha}{3\alpha} \tag{12}$$

et désignons par δ_2 une longueur non nulle vérifiant à la fois les deux inégalités:

$$\delta_2 < \delta_1, \tag{13}$$

$$\frac{\delta_2^{\beta}}{\delta_1^{\beta}} < \mu. \tag{14}$$

Désignons encore par $(D^{(\delta_2)})$ l'ensemble des points intérieurs au domaine (D) et tels, que la plus courte distance de chacun d'eux à la frontière du domaine (D) soit égale ou supérieure à δ_2 et observons que, en vertu de la remarque faite au début du N° 10, il existera un nombre entier et positif N, tel que l'inégalité

$$p \geq N \tag{15}$$

ait pour conséquence que tout point du domaine $(D^{(\delta_2)})$ ou de sa frontière soit situé à *l'intérieur* du domaine (D_p).

Proposons-nous maintenant d'étudier l'expression suivante:

$$|\psi'_n(A) - \psi'_m(A)| \tag{16}$$

et plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse où la plus courte distance a du point A à la frontière (s) du domaine (D) satisferait à l'inégalité suivante

$$a \leq \delta_2. \tag{17}$$

Désignons par O un point situé sur la frontière (s) du domaine (D) à une distance égale à a du point A et cherchons une limite supérieure de l'expression

$$|\psi'_n(A) - \varphi(O)|. \tag{18}$$

Il résulte de la définition de la fonction ψ'_n que, dans la portion $(D - D_n)$ du domaine (D), la fonction ψ'_n se confond avec la fonction φ. Donc, lorsque le point A n'est pas extérieur au domaine $(D - D_n)$, on a

$$|\psi'_n(A) - \varphi(O)| < \mu; \tag{19}$$

cela résulte des inégalités (17) et (13) ainsi que de ce que l'inégalité (10) entraîne l'inégalité (11).

Voyons ce qui arrive lorsque le point A est extérieur au domaine $(D - D_n)$. Dans ce cas le point A sera intérieur à un domaine (T), d'un seul tenant, jouissant des propriétés suivantes:

1° Tout point intérieur à ce domaine sera extérieur au domaine $(D - D_n)$, mais intérieur au domaine (D) ainsi qu'au cercle (Σ) de centre O et de rayon δ_1.

2° Tout point-frontière du domaine considéré sera situé sur la frontière du domaine (D_n) ou sur la circonférence du cercle (Σ).

Il pourrait se faire que tout point de la frontière du domaine (T) appartint à celle du domaine (D_n). Dans ce cas, en tout point P situé sur la frontière du domaine (T), on aurait

$$\psi_n(P) = \varphi(P).$$

D'ailleurs

$$OP = \delta_1,$$

en vertu de la définition du domaine (T). On aurait donc

$$|\psi_n(P) - \varphi(O)| < \mu \tag{20}$$

pour toute position du point P sur la frontière du domaine (T); pour le reconnaître il n'y a qu'à se rappeler que l'inégalité (10) entraîne l'inégalité (11). Or, à l'intérieur du domaine (T), la fonction ψ_n vérifie l'équation de Laplace. Par conséquent, dans le cas considéré, l'inégalité (19) serait encore vérifiée.

Il nous reste à examiner le cas où une partie (s_1) de la frontière du domaine (T) serait formée par des points situés sur la circonférence du cercle (Σ). L'inégalité (20) pourrait cesser d'être vérifiée sur (s_1), mais elle subsistera évidemment sur le reste (s_2) de la frontière du domaine (T).

Pour estimer la quantité

$$|\psi_n(P) - \varphi(O)|,$$

dans le cas où le point P se trouve sur (s_1), j'observe que, pour toutes les valeurs de l'indice n et dans tout le domaine (D), on a:

$$|\psi_n| < \Phi,$$

en désignant par Φ une limite supérieure de $|\varphi|$. On aura donc

$$|\psi_n(P) - \varphi(O)| \leq 2\Phi \tag{21}$$

pour toute position du point P sur la partie (s_1) de la frontière du domaine (T).

Reportons-nous à l'énoncé de la condition (C) à laquelle le domaine (D) satisfait par hypothèse et plaçons en O le pôle d'un système de coordonnées polaires (ϱ, θ). Il sera toujours possible de choisir l'axe défini par l'équation

$$\theta = 0$$

de telle sorte que, pour toute position du point (ϱ, θ) dans le domaine (T), la condition

$$|\theta| < \alpha \tag{22}$$

soit compatible avec celle de la continuité de l'angle θ regardé comme fonction des coordonnées rectangulaires du point auquel cet angle se rapporte.

L'inégalité (22) définit évidemment sans ambiguité une certaine détermination de l'angle θ; ce sera celle que nous considérerons à l'exclusion de toute autre.

Désignons par M le point (ϱ, θ) et considérons les deux fonctions suivantes

$$4\Phi \frac{\varrho^\beta \cos\beta\theta}{\delta_1^\beta} + \mu$$

et

$$\psi_n(M) - \varphi(O).$$

A l'intérieur du domaine (T), elles sont régulièrement harmoniques et, sur la frontière, la première est constamment supérieure à la valeur absolue de la seconde. On aura donc

$$|\psi_n(M) - \varphi(O)| < 4\Phi \frac{\varrho^\beta \cos\beta\theta}{\delta_1^\beta} + \mu,$$

pour toute position du point M dans le domaine (T). Faisons coïncider le point, M avec le point A et reportons-nous aux inégalités (14), (17) et (22). Nous trouverons

$$|\psi_n(A) - \varphi(O)| < (4\Phi + 1)\mu. \tag{23}$$

En résumé il est établi que l'inégalité (17) entraîne l'une au moins des inégalités (10) et (23); elle entraîne donc évidemment l'inégalité (23) dans tous les cas et cela, pour toutes les valeurs de l'indice n. Cela nous permet d'écrire:

$$|\psi_m(A) - \varphi(O)| < (4\Phi + 1)\mu \tag{24}$$

pourvu que l'inégalité (17) soit vérifiée.

Les inégalités (23) et (24) donnent:

$$|\psi_n(A) - \psi_m(A)| < 2(4\Phi + 1)\mu. \tag{25}$$

Par conséquent nous arrivons à la conclusion suivante: l'inégalité (17) entraîne l'inégalité (25) pour toutes les valeurs des indices n et m.

Supposons que l'on ait

$$\begin{cases} n > N \\ m \geq N \end{cases} \tag{26}$$

où la lettre N a la même signification qu'au second membre de l'inégalité (15). Dans ce cas les fonctions ψ_n et ψ_m seront des fonctions régulièrement harmoniques dans toute l'étendue du domaine $(D^{(\delta_2)})$ et, par conséquent il en sera de même de la différence

$$\psi_n(A) - \psi_m(A).$$

Or cette différence vérifie, comme nous venons de l'établir, l'inégalité (25) dans la portion $(D - D^{(\delta_2)})$ du domaine (D). Elle vérifiera donc cette inégalité dans tout le domaine (D).

Par conséquent nous avons la proposition suivante: si petit que soit un nombre donné μ, différent de zéro et positif, il est possible de lui faire correspondre un entier positif N, tel que les inégalités (26) entraînent l'inégalité (25) pour toutes les positions du point A dans le domaine (D).

Cela prouve que la suite (1) est uniformément convergente dans tout le domaine (D) et que, dès-lors, la limite de cette suite est une fonction U, régulièrement harmonique à l'intérieur du domaine considéré, admettant les mêmes valeurs périphériques que la fonction donnée φ. Donc, comme nous l'avions annoncé, la question placée en tête de ce numéro comporte une réponse affirmative dans le cas où le domaine (D) satisfait à la condition (C).

Remarque. La démonstration précédente de la convergence de la suite (1) repose, en ce qui concerne la nature des termes de cette suite, uniquement sur les hypothèses suivantes.

1° Pour toute valeur de n la fonction ψ_n est continue dans le domaine (D) et sur la frontière.

2° Dans la portion $(D - D_n)$ du domaine (D) on a

$$\psi_n = \psi_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

et, à l'intérieur du domaine (D_n), la fonction ψ_n satisfait à l'équation de Laplace.

Or, étant donné une fonction continue σ définie sur la frontière du domaine D, il est possible de former, et cela d'une infinité de manière une fonction ψ_0, continue dans le domaine (D) et telle que ses valeurs périphériques définissent une fonction identique à la fonction donnée σ. D'autre part le procédé alterné de M. Schwarz permettra de déduire, du premier terme ψ_0 de la suite (1), chacun des termes suivants.

Donc, les considérations exposées dans ce numéro constituent une démonstration générale, évidemment très simple, de la possibilité du Problème de Dirichlet pour tout domaine vérifiant la condition (C).

N° 15. Pour achever d'élucider les relations qui existent entre le Problème transformé, le Problème de Dirichlet et le Principe du même nom, il suffira de démontrer le théorème suivant: lorsque dans l'ensemble (E) défini au N° 2 il existe une fonction harmonique U, cette fonction vérifie l'équation (2) de l'Introduction.

Pour établir ce théorème considérons dans l'ensemble (E) une fonction f quelconque à cela près que l'intégrale $A(f)$ ait un sens. D'après le théorème qui

termine le N° 13, la fonction U sera une solution du Problème transformé pour le domaine (D) et par rapport à la fonction f. Nous aurons donc

$$B(f, h) = B(u, h)$$

pour toute fonction h, régulièrement harmonique dans (D) et telle que l'intégrale $A(h)$ soit finie. Donc, en particulier, on aura:

$$B(f, u) = B(u, u) = A(u).$$

Il résulte de là que l'on a:

$$A(f - u) = A(f) - A(u).$$

Par conséquent

$$A(f) > A(u),$$

à moins que la fonction f ne se confonde avec la fonction u. Le théorème est donc établi.

Les principaux résultats de ce travail peuvent être résumés ainsi: pour tout domaine borné, quarrable et vérifiant la condition (C) du numéro précédent, le Problème de Dirichlet est toujours possible et le Principe de Dirichlet est exact.

Il est à peine utile d'ajouter que la méthode des rayons-vecteurs réciproques permet de conclure, de ce qui précède, la possibilité du Problème de Dirichlet pour tout domaine non borné, pouvant être regardé comme l'inverse d'un domaine remplissant les conditions énoncées tout à l'heure.

Cracovie le 5 Juin 1908.

Note. Depuis la rédaction de ce mémoire, j'ai considérablement complété mes idées sur la question; je les ai exposées, pour trois dimensions, dans le mémoire *Sur le principe du minimum* (Bulletin de l'Académie de Cracovie, Juillet 1909).

Cracovie le 29 Avril 1910.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU TROISIÈME ORDRE ET D'ORDRE SUPÉRIEUR DONT L'INTÉGRALE GÉNÉRALE A SES POINTS CRITIQUES FIXES.

Par

JEAN CHAZY

à PARIS.

Introduction.

I. On sait l'intérêt que présente la recherche des équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme. Elle est un premier pas dans l'étude des intégrales d'une équation différentielle quelconque. D'autre part elle peut conduire, et a conduit effectivement, à la découverte de fonctions uniformes nouvelles. La plupart des fonctions classiques, la fonction exponentielle, les fonctions elliptiques, les fonctions automorphes, etc., sont intégrales d'équations différentielles, dont l'intégrale générale est uniforme, et qui ne sont linéaires ni pour les fonctions elliptiques, ni pour les fonctions automorphes: si l'on détermine a priori les équations différentielles non linéaires, dont l'intégrale générale est uniforme, on peut donc espérer trouver parmi leurs intégrales des transcendantes dont l'importance pour les différentes branches de l'Analyse sera révélée ultérieurement. On est conduit à rechercher d'abord les équations différentielles dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes, c'est-à-dire indépendants des constantes d'intégration.

Fuchs a déterminé les équations du premier ordre, algébriques par rapport à la fonction et à sa dérivée, dont l'intégrale générale a ses point critiques fixes, et M. Poincaré a montré[1] que ces équations ont leur intégrale générale algébrique, ou bien sont réductibles algébriquement, soit à une quadrature, soit à une équation de Riccati, c'est-à-dire à une équation linéaire du second ordre: les équations à points critiques fixes du premier ordre ne sauraient donc définir de transcendantes nouvelles.

M. Painlevé a constitué une méthode pour former les équations à points critiques fixes du second ordre. Il a appliqué cette méthode aux équations

[1] *Comptes Rendus*, juillet 1884.

$$y'' = R(y', y, x), \tag{1}$$

R désignant une fonction rationnelle de y', algébrique de y et analytique de x. Mais, dans l'énumération des cas très nombreux à considérer, M. Painlevé avait laissé échapper un cas important. M. Gambier[1] révisant les tableaux de M. Painlevé, a comblé les lacunes que ces tableaux présentaient. Les résultats de l'énumération complète se résument ainsi:[1] Toutes les équations à points critiques fixes de la forme (1) sont intégrables par les fonctions classiques, rationnelles, exponentielle, logarithmique, elliptiques (considérées comme fonctions de l'argument ou du module), ou sont réductibles aux équations linéaires, ou enfin se ramènent algébriquement à six types:

$$(A)\begin{cases} \text{(I)}\ y'' = 6y^2 + x, \\ \text{(II)}\ y'' = 2y^3 + xy + \alpha, \\ \text{(III)}\ y'' = \dfrac{y'^2}{y} - \dfrac{y'}{x} + \dfrac{\alpha y^2 + \beta}{x} + \gamma y^3 + \dfrac{\delta}{y}, \\ \text{(IV)}\ y'' = \dfrac{y'^2}{2y} + \dfrac{3y^3}{2} + 4xy^2 + 2(x^2 - \alpha)y + \dfrac{\beta}{y}, \\ \text{(V)}\ y'' = y'^2\left(\dfrac{1}{2y} + \dfrac{1}{y-1}\right) - \dfrac{y'}{x} + \dfrac{(y-1)^2}{x^2}\left(\alpha y + \dfrac{\beta}{y}\right) + \dfrac{\gamma y}{x} + \dfrac{\delta y(y+1)}{y-1}, \\ \text{(VI)}\ y'' = \dfrac{y'^2}{2}\left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{y-1} + \dfrac{1}{y-x}\right) - y'\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{y-x}\right) + \\ \qquad + \dfrac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[\alpha + \dfrac{\beta x}{y^2} + \dfrac{\gamma(x-1)}{(y-1)^2} + \dfrac{\delta x(x-1)}{(y-x)^2}\right]. \end{cases}$$

M. Painlevé a montré que les cinq premières équations sont des dégénérescences de la sixième; que la sixième, et par suite les cinq autres, *ont leurs points critiques fixes:* ce sont seulement les points singuliers du coefficient différentiel, $x=0$, $x=1$ ou $x=\infty$. M. Painlevé a établi enfin que, sauf pour des valeurs exceptionnelles des paramètres, les six équations sont *irréductibles*, et de façon précise appartiennent, au point de vue de la réductibilité, à la même classe que les équations $y'' = R(y, x)$, R désignant une fonction rationnelle *arbitraire* de y et de x.[2]

Les recherches de M. Painlevé se divisent ainsi en trois parties. Une première méthode met en évidence un certain ensemble de conditions nécessaires pour qu'une équation donnée ait ses points critiques fixes: cette méthode s'étend

[1] *Comptes Rendus:* Gambier, 18 juin, 25 juin et 12 novembre 1906; Painlevé, 24 décembre 1906.

[2] M. Painlevé a exposé ses recherches dans des Communications à l'Académie des Sciences de Paris, dans un mémoire des *Acta Mathematica* (1902), et dans un article du *Bulletin de la Société Mathématique de France* (tome XXVIII).

facilement aux équations d'ordre supérieur. Une seconde méthode, toute différente, a pour but de montrer que, dans le cas du second ordre, ces conditions sont suffisantes: son extension est plus malaisée. Enfin il faut faire appel à un troisième ordre d'idées pour déterminer la classe d'équations irréductibles à laquelle appartient une équation.

II. Je me suis proposé de rechercher parmi les équations à points critiques fixes du troisième ordre et d'ordre supérieur des équations nouvelles. Dans le cas du second ordre, la détermination des équations à points critiques fixes est fondée sur la détermination des équations de la forme

$$y'' = y'^2\, a(y), \qquad a(y) \text{ algébrique en } y,$$

dont l'intégrale générale est uniforme. De même ici, le problème préliminaire[1] se pose de déterminer les équations de la forme *simplifiée*

$$y''' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{y''^2}{y'} + b(y)\,y'\,y'' + c(y)\,y'^3.$$

n désignant un entier positif, négatif ou infini, mais différent de -1, $b(y)$ et $c(y)$ deux fonctions algébriques de y, dont l'intégrale générale est uniforme. Pour $n = -2$, $b(y) = 0$, les fonctions uniformes ainsi définies sont les fonctions automorphes, ou s'expriment par les fonctions classiques. Pour $n \neq -2$, M. Painlevé a indiqué sans démonstration que le genre des fonctions algébriques $b(y)$ et $c(y)$ est 0 ou 1, et que les fonctions uniformes définies sont des fonctions classiques, ou des combinaisons de fonctions classiques. J'étudie la forme de l'équation, et je donne la nature de l'intégrale, dans le cas où les coefficients $b(y)$ et $c(y)$ sont rationnels: le nombre des pôles de ces fractions rationnelles est limité à 6 pour $n = 1$, à 4 pour $n \neq 1$. M. Garnier a traité,[2] outre le cas précédent, le cas où les coefficients $b(y)$ et $c(y)$ sont des fonctions algébriques de genre 1, et donné à ce point de vue la solution complète du problème.

III. De toutes les simplifiées, l'équation $y''' = 0$ est la plus simple. L'exemple des équations du second ordre conduisait à déterminer d'abord les équations à points critiques fixes ayant comme simplifiée $y''' = 0$, c'est-à-dire les équations à points critiques fixes de la forme

[1] Pour qu'une équation du second ou du troisième ordre ait ses points critiques fixes, il est nécessaire que son équation *simplifiée*, c'est-à-dire l'équation obtenue en y remplaçant x par $x_0 + ax$, et en faisant tendre a vers zéro, ait son intégrale générale uniforme. L'équation simplifiée a la forme indiquée dans le texte, si l'équation complète a la forme $y''' = R(y'', y', y, x)$, R désignant une fonction rationnelle de y'', y', algébrique de y, analytique de x. La considération des équations simplifiées permet de classer les équations à points critiques fixes

[2] *Comptes Rendus*, 29 juillet 1907, 16 novembre 1908.

$$y''' = P(y'', y', y, x), \tag{2}$$

où P est un polynome en y'', y', y, à coefficients analytiques en x. On pouvait espérer obtenir ainsi des équations simples, dont les intégrales ne seraient pas des fonctions classiques, et qui ne se ramèneraient pas nécessairement aux équations (A). Cette espérance semble illusoire. Dans la classe d'équations considérée, si l'on excepte quatre types d'équations dont je n'ai pas achevé l'étude, il n'y a pas d'équations *nouvelles* analogues aux équations (A); il y a seulement des équations qui admettent des facteurs intégrants, et se ramènent à des équations du second ordre, transformées algébriques des équations (A). Parmi ces équations du second ordre citons les suivantes

$$\left\{\begin{aligned} &y''^2 + 4y'^3 + 2(xy' - y) = 0, \\ &y''^2 + 4y'^3 + xy'^2 - yy' + \alpha = 0, \\ &y''^2 + 4y'^3 + (xy' - y)^2 + \alpha y' + \beta = 0, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

qui sont transformées algébriques des équations (A, I), (A, II), (A, IV), et dont les deux premières ont été signalées par M. Painlevé. Les transformées des équations (3) en $u = e^{\int y\,dx}$ ont comme intégrales générales des fonctions entières, qui sont respectivement de genres et d'ordres 2 et $\frac{5}{2}$, 3 et 3, 4 et 4. Dans la suite formée par la fonction $\sigma(x; g_2, g_3)$ de Weierstrass et par ces trois fonctions entières, chaque fonction est une dégénérescence de la suivante. L'étude des intégrales de l'équation (A, IV) se ramène à l'étude de la fonction entière de genre 4. Il existe de même pour les équations (A, III), (A, V), (A, VI) des transformées du second ordre et du second degré, dont l'intégrale générale est entière de genre infini, ou a trois points singuliers fixes.

Signalons parmi les équations (2) des équations remarquables, dont les intégrales se rapprochent des fonctions fuchsiennes. Ce sont les équations

$$y''' = 2yy'' - 3y'^2, \tag{4}$$

$$y''' = 2yy'' - 3y'^2 + \frac{4}{36 - k^2}(6y' - y^2)^2, \qquad k \text{ entier} > 6. \tag{5}$$

L'intégrale générale de chacune de ces équations est uniforme dans une région limitée par une droite ou une circonférence, variable avec les constantes d'intégration, et qui est coupure essentielle. La théorie des groupes fuchsiens et kleinéens a mis en évidence des équations de la forme que nous rappelons précédemment, dont l'intégrale générale est uniforme, et possède une coupure essentielle mobile, circulaire ou non analytique, ou bien admet un ensemble parfait discontinu de points singuliers mobiles: il est curieux d'obtenir des équations aussi simples que

les équations (4) et (5), dont les intégrales présentent une singularité analogue. Ces intégrales peuvent être définies de la manière suivante. Considérons l'équation hypergéométrique de Gauss

$$t(1-t)\frac{d^2z}{dt^2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{6}t\right)\frac{dz}{dt}-\left(\frac{1}{36}-\frac{1}{k^2}\right)\frac{z}{4}=0,\ k \text{ entier} > 6, \text{ ou } k=\infty,$$

et deux intégrales distinctes arbitraires de cette équation, z et z_1. L'équation $x=\frac{z_1(t)}{z(t)}$ définit une fonction de Schwarz $t(x)$, dont le triangle fondamental a comme angles $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{k}$. La fonction $y(x)=\frac{6}{z}\cdot\frac{dz}{dx}$ est une intégrale de l'équation (5) ou (4). L'intégrale générale de l'équation (4) est holomorphe dans la région où elle est définie: celle de l'équation (5) est méromorphe dans la région où elle est définie, et admet comme pôles simples de résidu $\frac{k-6}{2}$ les pôles de $t(x)$. Posons $y=\frac{k-6}{2}\frac{u'}{u}$: la fonction u satisfait à l'équation différentielle du quatrième ordre

$$uu^{\mathrm{IV}}-(k-2)u'u'''+\frac{3k(k-2)}{2(k+6)}u''^2=0.$$

L'intégrale générale de cette équation admet de même comme coupure essentielle une circonférence variable, et est définie à l'intérieur ou à l'extérieur de la circonférence suivant les valeurs des constantes d'intégration. Elle est holomorphe en tout point de la région où elle est définie, sauf en général au point $x=\infty$. Si elle est définie à l'intérieur de sa coupure, ou si la coupure est une droite, elle est uniforme: si elle est définie à l'extérieur, elle acquiert autour de la coupure un nombre de déterminations égal au dénominateur de la fraction irréductible égale à $\frac{12}{k-6}$, comme l'intégrale particulière $u=x^{\frac{12}{6-k}}$. La transformée en $\int y\,dx$ de l'équation (4) possède une propriété analogue: son intégrale générale est uniforme, si elle est définie à l'intérieur de sa coupure; si elle est définie à l'extérieur, elle est une fonction multiforme avec période, comme l'intégrale particulière $-6\log x$.

La fonction $u(x)$ jouit d'une propriété fonctionnelle analogue à celle des fonctions thétafuchsiennes: par les substitutions $\left(x,\frac{\alpha_i x+\beta_i}{\gamma_i x+\delta_i}\right)$ d'un groupe fuchsien, elle est multipliée par $(\gamma_i x+\delta_i)^{\frac{12}{6-k}}$; elle est thétafuchsienne pour $k=7, 8, 9, 12$. Elle possède une seconde propriété fonctionnelle de nature connexe, signalée par Halphen: elle fait partie des solutions en fonctions uniformes de l'identité $X^2+Y^3+u^k=0$. La fonction u est une transcendante définie par une équation

différentielle du quatrième ordre: mais, comme l'équation du troisième ordre que vérifient les fonctions fuchsiennes et kleinéennes, cette équation du quatrième ordre se ramène, par un changement de variable et de fonction, à une équation linéaire du second ordre. Enfin, si l'on rend la fonction u homogène de degré $\frac{12}{6-k}$ par rapport à la variable x et à une nouvelle variable x_1, elle satisfait à l'équation aux dérivées partielles remarquable

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} - 4\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial x_1}\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial x_1^3} + 3\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial x_1^2}\right)^2 = 0.$$

Pour $k = 3, 4, 5$, le groupe de l'équation hypergéométrique est le groupe d'un polyèdre régulier, les fonctions u correspondantes sont des polynomes connus.

Parmi les types d'équations (2) dont je n'ai pas encore achevé l'étude, le plus intéressant est le type

$$y''' = y^\lambda y'' - (\lambda + 1) y^{\lambda - 1} y'^2, \qquad \lambda \text{ entier positif.} \tag{6}$$

Je n'ai pu décider jusqu'ici si l'équation (6) a son intégrale générale uniforme. Cette intégrale ne possède ni points critiques algébriques, ni pôles: si elle n'avait pas de singularités transcendantes, elle serait une fonction entière. Mais il me paraît vraisemblable qu'elle possède des singularités transcendantes et critiques: si l'on admet qu'il en est ainsi, le degré en y de l'équation (2) est limité, comme le degré en y de l'équation (1).

L'étude des équations (6) m'a conduit à considérer des équations dont *l'intégrale générale est uniforme*, ou a ses points critiques fixes, et dont *l'intégrale singulière a des points critiques mobiles:* l'existence de telles équations n'avait pas été signalée.

IV. La détermination des équations à points critiques fixes de la forme (2), et l'étude des difficultés arithmétiques et analytiques qu'elle soulève, offrent d'autant plus d'intérêt que, cette étude une fois épuisée, la détermination des équations à points critiques fixes de la forme

$$y''' = R(y'', y', y, x), \tag{7}$$

R désignant une *fraction rationnelle* en y'', y', y à coefficients analytiques en x, ne présente aucune difficulté de nature nouvelle. Parmi ces équations (7), j'ai considéré spécialement (par opposition au cas où la simplifiée se réduit à $y''' = 0$) les équations dont les simplifiées sont les plus compliquées possible. Dans le cas où la simplifiée admet comme intégrale une fonction fuchsienne ou kleinéenne, l'intégrale générale de l'équation complète s'exprime par ces fonctions elles-mêmes.

Dans le cas où l'intégrale de la simplifiée possède des points essentiels isolés mobiles, il en est de même de l'intégrale générale de l'équation complète, et l'intégration de cette équation se ramène à l'intégration d'une équation à points critiques fixes du second ordre, suivie d'une quadrature.

Dans un troisième cas, la simplifiée est l'équation obtenue en éliminant les constantes A et B dans l'équation

$$y'^2 = A\,P + B\,Q,$$

P et Q désignant deux polynomes du quatrième degré en y à coefficients constants: parmi les équations à points critiques fixes admettant cette équation simplifiée, j'ai obtenu une équation de la forme

$$(E)\quad \left\{\begin{aligned} y''' = {} & \sum \frac{(y'-a'_i)(y''-a''_i)}{y-a_i} + \sum \frac{A_i(y'-a'_i)^3 + B_i(y'-a'_i)^2 + C_i(y'-a'_i)}{y-a_i} \\ & + D\,y'' + E\,y' + H(y-a_i)\sum \frac{F_i}{y-a_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \end{aligned}\right.$$

dont les coefficients sont définis par un système différentiel et algébrique (S), et dépendent de six paramètres. J'ai démontré qu'effectivement *les intégrales de l'équation* (E) *ont leurs points critiques fixes;* elles n'ont, en dehors des points singuliers des coefficients, d'autres points singuliers que des pôles. Je n'ai pas achevé l'intégration du système (S), ni déterminé la classe d'équations irréductibles à laquelle appartient l'équation (E). J'ai toutefois montré que l'équation (E) admet les équations (A) comme dégénérescences, et par suite est *une équation nouvelle.*

V. Après la publication par M. Painlevé des équations (A, I), (A, II), M. Borel a groupé un certain nombre d'équations dont l'intégrale générale est une fonction entière, et a remarqué qu'en séparant dans ces équations les termes de poids le plus élevé par rapport aux indices de dérivation, on obtient des invariants usuels de formes binaires telles que

$$u^{(n)} + n\,\lambda\,u^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 u^{(n-2)} + \cdots + n\lambda^{n-1}u' + \lambda^n u.$$

Je complète les remarques de M. Borel. Si dans les équations transformées en $u = e^{\int y\,dx}$ des équations (3) et des équations analogues, on sépare les termes de poids le plus élevé, on obtient le discriminant de la forme cubique en λ: ce qui rattache les équations (A) à ce discriminant. D'autre part de tout invariant d'une forme binaire on peut déduire une équation différentielle, et d'une classe d'invariants, on déduit une suite d'équations différentielles. Dans la suite d'équations

déduite de certaines classes d'invariants, des discriminants par exemple, l'intégrale générale de chaque équation est entière, et s'exprime par la fonction exponentielle. Pour d'autres classes d'invariants au contraire, seules les premières équations de la suite ont leur intégrale générale entière. Tel est le cas des deux équations $u\,u'' - u'^2 = 0$, $u\,u^{IV} - 4\,u'\,u''' + 3\,u''^2 = 0$: j'ai obtenu pour l'équation suivante

$$u\,u^{VI} - 6\,u'\,u^{V} + 15\,u''\,u^{IV} - 10\,u'''^2 = 0$$

une intégrale entière dépendant de cinq constantes: je n'ai pu décider si l'intégrale générale est une combinaison de fonctions classiques, n'est pas uniforme, ou est une fonction uniforme nouvelle; les autres équations de cette suite n'on pas leur intégrale générale uniforme. Il est à remarquer que l'équation que nous venons d'obtenir par induction à partir des remarques de M. Borel, peut être obtenue aussi par application de la méthode de M. Painlevé: cette méthode conduit à l'équation plus générale

$$u\,u^{VI} - 6\,u'\,u^{V} + 15\,u''\,u^{IV} - 10\,u'''^2 = \alpha(u\,u'' - u'^2) - \beta u^2,\ \alpha, \beta \text{ constantes arbitraires,}$$

au sujet de laquelle se posent les mêmes questions.

VI. Les solutions de plusieurs des problèmes que nous rencontrons restent incomplètes, et le plus important de nos résultats, la découverte d'une équation à points critiques fixes nouvelle, est lui-même imparfait, puisque nous ne donnons pas l'expression explicite des coefficients de cette équation. En premier lieu, une fois que l'on a exprimé que les intégrales n'ont pas de points critiques algébriques, ni de points critiques transcendants de certaines catégories, l'étude d'une équation différentielle du troisième ordre et d'ordre supérieur devient un problème de la plus profonde difficulté: comme le montre l'exemple des solutions que M. Poincaré et M. Klein ont données de ce problème dans le cas des équations fuchsiennes et kleinéennes. En second lieu, il est possible que la méthode de M. Painlevé (conditions nécessaires), qui offre l'intérêt de fournir toutes les équations à points critiques fixes, ne les présente pas sous la forme la plus simple. Rappelons à ce sujet que l'équation (A, VI) a été retrouvée[1] par M. R. Fuchs dans l'étude des équations linéaires du second ordre dont le groupe est indépendant d'un paramètre: ce qui constitue une propriété des équations (*A*). Depuis, M. Schlesinger a généralisé le problème traité par M. R. Fuchs, et a obtenu[2] des systèmes différentiels d'ordre aussi élevé qu'on veut, et de forme élégante; d'après M. Schlesinger, ces systèmes différentiels ont leurs points singuliers fixes. Peut-être l'équation (*E*) est-elle équivalente à l'un d'entre eux.

[1] Comptes Rendus, 2 octobre 1905.

[2] Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici (Roma, 1908), vol. II, p. 64.

Équations simplifiées des équations à points critiques fixes de la forme $y''' = R(y'', y', y, x)$, où R désigne une fraction rationnelle en y'', y', y à coefficients analytiques en x.

1. M. Painlevé a indiqué les premières conditions nécessaires pour qu'une équation de cette forme ait ses points critiques fixes. R doit être un polynome du second degré en y'':

$$y''' = A(y', y, x)\, y''^2 + B(y', y, x)\, y'' + C(y', y, x). \tag{8}$$

La fraction A a nécessairement l'une des formes:

0, $\frac{1}{y' + \frac{1}{\frac{n}{a_1}}}$ (n désignant un entier positif, négatif ou infini, mais différent de -1),

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y' + a_1} + \frac{1}{y' + a_2}\right), \frac{1}{y' + a_1} + \frac{1}{2(y' + a_2)}, \frac{1}{2(y' + a_1)} + \frac{2}{3(y' + a_2)},$$

$$\frac{1}{2(y' + a_1)} + \frac{3}{4(y' + a_2)}, \frac{1}{2(y' + a_1)} + \frac{5}{6(y' + a_2)}, \frac{2}{3}\left(\frac{1}{y' + a_1} + \frac{1}{y' + a_2}\right),$$

$$\frac{2}{3(y' + a_1)} + \frac{5}{6(y' + a_2)}, \frac{3}{4}\left(\frac{1}{y' + a_1} + \frac{1}{y' + a_2}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y' + a_1} + \frac{1}{y' + a_2} + \frac{1}{y' + a_3}\right).$$

les a_i désignant des fonctions rationnelles de y et analytiques de x. Tout pôle $y' = g(y, x)$ des fractions rationnelles B et C est d'ordre 1 au plus, et coïncide avec un pôle de A. Enfin les degrés d'infinitude pour $y' = \infty$ de B et C sont 1 et 3 au plus.

Faisons dans l'équation (8) la substitution $(x, x_0 + \alpha x)$: elle devient, d'après cela,

$$y''' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{y''^2}{y'} + b(y, x_0)\, y' y'' + c(y, x_0)\, y'^3 + \alpha(\cdots).$$

M. Painlevé appelle *simplifiée* de l'équation (8) l'équation

$$y''' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{y''^2}{y'} + b(y)\, y' y'' + c(y)\, y'^3. \tag{9}$$

Cette équation simplifiée doit avoir son intégrale générale uniforme. Le problème préliminaire se pose donc de déterminer les équations (9) dont l'intégrale générale est uniforme: n est un entier positif, négatif ou infini, mais différent de -1, $b(y)$ et $c(y)$ sont deux fonctions rationnelles. M. Painlevé a énoncé la solution de ce problème: l'intégrale générale s'exprime par les fonctions automorphes, leurs dégénérescences, ou des combinaisons de ces dégénérescences.[1] Nous allons préciser dans les différents cas la nature de l'intégrale.

L'équation (9) ne change pas dans la transformation à deux paramètres $(x, x_0 + \omega x)$; l'expression $v = \dfrac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\dfrac{dx}{dy}}$ ne change pas non plus, elle vérifie donc une équation du premier ordre, qu'on forme aussitôt:

$$\frac{dv}{dy} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) v^2 + b(y)\, v - c(y).$$

C'est une équation de Riccati, qui se ramène à une équation linéaire du second ordre, et en définitive l'équation (9) peut être remplacée par le système

$$\frac{dx}{dy} = u^{-\frac{n}{n+1}} \qquad \frac{d^2u}{dy^2} = b(y)\frac{du}{dy} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) c(y)\, u, \tag{10}$$

qui va nous permettre de l'étudier.

2. Au voisinage d'un point y_0 régulier pour $b(y)$ et $c(y)$, les intégrales de l'équation linéaire admettent le développement

$$u = A + B(y - y_0) + \cdots,$$

A et B désignant deux constantes arbitraires. La première équation (10) fait correspondre à un cercle de centre y_0 du plan des y un certain domaine du plan des x. Inversement, quand x varie dans ce domaine, $y - y_0$ est fonction uniforme de x, pour $A \neq 0$. Pour $A = 0$, si n est positif ou négatif, mais différent de -2, $(y - y_0)^{\frac{1}{n+1}}$ est fonction uniforme de x; si n est infini, $\log(y - y_0)$ est fonction uniforme de x; si enfin n est égal à -2, l'uniformité de y entraîne nécessairement la condition $b(y_0) = 0$.

Donc, pour $n = -2$, $b(y)$ est identiquement nul. L'intégrale générale peut alors recevoir la forme $y = f\left(\dfrac{Ax + B}{Cx + D}\right)$, A, B, C, D désignant quatre constantes arbitraires.

[1] En toute rigueur, l'intégrale s'exprime par les fonctions automorphes, elliptiques, exponentielles, rationnelles, logarithmiques, les fonctions ζ, σ, ou par des combinaisons de ces fonctions.

Considérons un pôle a de $b(y)$ et $c(y)$. Les intégrales de l'équation linéaire doivent être régulières au sens de Fuchs au voisinage de ce pôle:

$$b(y) = \frac{\beta}{y-a} + \cdots, \quad c(y) = \frac{\gamma}{(y-a)^2} + \frac{\delta}{y-a} + \cdots$$

Les racines r_1 et r_2 de l'équation déterminante doivent être de la forme

$$r_1 = \frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{1}{N_1}\right), \quad r_2 = \frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{1}{N_2}\right),$$

N_1 et N_2 désignant des entiers positifs, négatifs ou infinis. D'où:

$$\beta = \frac{n+2}{n} - \frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right), \quad \gamma = \frac{n-1}{n}\left(1 - \frac{1}{N_1}\right)\left(1 - \frac{1}{N_2}\right).$$

Alors $(y-a)^{\frac{1}{N_1}}$ ou $(y-a)^{\frac{1}{N_2}}$ (ou $\log(y-a)$) sont uniformes pour les intégrales correspondantes. De plus, si N_1 est fini, $\frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{N_1}{N_2}\right)$ doit être un nombre entier K_1; si N_2 est fini, $\frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{N_2}{N_1}\right)$ doit être un nombre entier K_2. Si la différence $r_2 - r_1$ est un entier non nul, le développement des intégrales de l'équation linéaire au voisinage de $y = a$ ne doit pas contenir de logarithme: en particulier, si β et γ sont nuls, δ l'est aussi. Si r_2 et r_1 sont égaux, le nombre correspondant $N_2 = N_1$ doit être infini.

Considérons enfin la valeur $y = \infty$: par une transformation homographique préalable effectuée sur y, nous pouvons supposer que $y = \infty$ n'est pas un pôle de l'équation, c'est-à-dire que $z = 0$ n'est pas un pôle de l'équation transformée en $z = \frac{1}{y}$. D'où les nouvelles conditions:

$$b(y) = \sum \frac{\beta}{y-a}, \quad c(y) = \sum \left(\frac{\gamma}{(y-a)^2} + \frac{\delta}{y-a}\right);$$

le signe $\sum$ est étendu à tous les pôles, h désigne leur nombre;

$$\sum \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right) = \frac{n+2}{n+1}(h-2), \tag{11}$$

$$\sum \delta = 0, \quad \sum \delta a = -\frac{h}{n} + \frac{n+1}{n}\sum \frac{1}{N_1 N_2}, \quad \sum \delta a^2 = -2\frac{\sum a}{n} + 2\frac{n+1}{n}\sum \frac{a}{N_1 N_2}.$$

Les pôles se classent en plusieurs sortes, suivant les valeurs des entiers K_1 et K_2. Sauf dans le cas où N_1 et N_2 sont infinis, les entiers K_1 et K_2 sont liés par la relation

$$\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}=\frac{n}{n+1},$$

qui admet, quel que soit n, la solution $K_1=1$, $K_2=-(n+1)$, et qui admet en outre les solutions:

pour $n=1$, $2,\infty;3,6;4,4;$
pour $n=2$, $2,6;3,3;$
pour $n=3$, $2,4;$
pour $n=5$, $2,3;$
pour $n=\infty$, $2,2.$

3. Une première catégorie d'équations simplifiées est celle des équations pour tous les pôles desquelles, ou bien les nombres K_1 et K_2 sont 1 et $-(n+1)$ d'où $N_2=(n+1)N_1$, ou bien les nombres N_1 et N_2 sont infinis. On a dans les deux cas

$$\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}=\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{N_1},$$

et l'équation (11) devient, pour $n\neq -2$, $\sum\frac{1}{N_1}=h-2$: h est un nombre entier positif,[1] et les N_1 sont des entiers positifs, négatifs ou infinis, mais différents de 1. On reconnaît l'équation en nombres entiers à la résolution de laquelle Briot et Bouquet ont ramené le problème: déterminer toutes les équations de la forme

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^m=P(y),$$

m désignant un entier positif, et $P(y)$ un polynome en y à coefficients constants, dont l'intégrale $y(z)$ est uniforme. Si l'on suppose la valeur $y=\infty$ régulière, l'intégration d'une telle équation se ramène à la quadrature

$$z=\int\frac{dy}{(y-a)^{1-\frac{1}{N}}(y-b)^{1-\frac{1}{N'}}\cdots},$$

les quantités $a,b,\ldots$ désignant des constantes distinctes, et les nombres $N,N',\ldots$ des entiers positifs, négatifs ou infinis, en nombre h et satisfaisant à la relation $\sum\frac{1}{N}=h-2$. Ces quadratures sont les suivantes

[1] Pour $n=-2$, h peut être nul, mais non égal à 1.

$$(12)\quad \begin{cases} z=\int \frac{dy}{(y-a)^{\frac{1}{2}}}, z=\int \frac{dy}{(y-a)^{1-\frac{1}{N}}(y-b)^{1+\frac{1}{N}}}\ (N \text{ entier} > 1), z=\int \frac{dy}{(y-a)(y-b)}, \\ z=\int \frac{dy}{(y-a)\sqrt{(y-b)(y-c)}}, z=\int \frac{dy}{(y-a)^{\frac{2}{3}}(y-b)^{\frac{2}{3}}(y-c)^{\frac{2}{3}}}, z=\int \frac{dy}{(y-a)^{\frac{1}{2}}(y-b)^{\frac{3}{4}}(y-c)^{\frac{3}{4}}}, \\ z=\int \frac{dy}{(y-a)^{\frac{1}{2}}(y-b)^{\frac{3}{3}}(y-c)^{\frac{5}{6}}}, z=\int \frac{dy}{\sqrt{(y-a)(y-b)(y-c)(y-d)}}. \end{cases}$$

Il résulte que le nombre des pôles de $b(y)$ et $c(y)$ est 1, 2, 3 ou 4. Soient $a, b, \ldots$ ces pôles et $N, N', \ldots$ les nombres N_1 qui leur sont relatifs: formons l'équation à laquelle satisfait la fonction z définie par la quadrature correspondante. C'est une équation du type (9): au voisinage de $y=a$, les différentes valeurs de z sont fonctions uniformes de $(y-a)^{\frac{1}{N}}$ et les entiers N_1 et N_2 qui leur correspondent dans l'équation en z sont 1 et $n+1$: ces valeurs sont donc régulières pour cette équation.

Pour $h<3$, elle est nécessairement

$$z''' = \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{z''^2}{z'};$$

pour $h=4$, elle peut avoir cette forme. D'où l'intégration:

$$z=(Ax+B)^{n+1}+C;\ z=e^{Ax+B}+C, \text{ si } n \text{ est infini.}^1$$

y est fonction rationnelle de z, ou de $e^{\lambda z}$, λ désignant une constante numérique, ou fonction elliptique de z. y est fonction rationnelle ou méromorphe de x, excepté dans les cas où n est négatif et où z s'exprime en y par l'une des six dernières quadratures: y admet alors le point essentiel isolé $x=-\frac{B}{A}$. On voit nettement la manière dont les trois constantes figurent dans l'intégrale générale: pour $n=-2$, on retrouve la forme indiquée.

Pour $h=4$, les conditions obtenues ne suffisent pas à déterminer les coefficients de l'équation. L'équation transformée en

$$z=\int \frac{dy}{\sqrt{(y-a)(y-b)(y-c)(y-d)}}$$

peut s'écrire

$$z''' = \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{z''^2}{z'} + \frac{n+1}{n\lambda^2}z'^3.$$

[1] Nous désignons d'une façon générale dans cette étude par A, B, C, D des constantes d'intégration, et par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ des constantes numériques.

λ désignant un paramètre arbitraire. La fonction $z'(x)$ a deux déterminations au plus, et ne saurait avoir de points critiques logarithmiques; par suite il résulte de l'étude des équations du second ordre que, si λ n'est pas infini, n a nécessairement l'une des quatre valeurs: $1, 2, \infty, -2$. z' est fonction rationnelle de x pour $n=-2$, de e^{Cx} pour $n=\infty$, fonction elliptique de x pour $n=1, 2$, et dans les quatre cas admet des pôles simples de résidus $\pm\lambda$. Pour que la fonction $y(x)$ soit uniforme, il faut ajouter aux conditions algébriques obtenues la condition transcendante que $2\pi i\lambda$ soit période de l'intégrale elliptique $z(y)$. La fonction $y(x)$ admet alors les pôles de la fonction z' comme points essentiels isolés mobiles.

On peut exprimer l'intégrale générale $z(x)$ sous les formes suivantes

pour $n=-2$, $z=\lambda\log\dfrac{Ax+B}{Cx+D}$;

pour $n=\infty$, $z=\lambda\log\dfrac{e^{\frac{1}{2}Ax+B}-1}{e^{\frac{1}{2}Ax+B}+1}+C$;

pour $n=1$, $z=\lambda\log\dfrac{\sqrt{p(Ax+B;4,0)}}{\sqrt{1+p(Ax+B)}+\sqrt{1-p(Ax+B)}}+C$;

pour $n=2$, $z=\lambda\log\dfrac{\sigma(Ax+B-h)}{\sigma(Ax+B+h)}+2\lambda(Ax+B)\zeta h+C$, avec $p\left(h;0,-\dfrac{1}{\lambda^2}\right)=0$.

4. La valeur $n=-2$ est tout à fait exceptionnelle.[1] Pour cette valeur, ou bien K_1 et K_2 sont égaux à 1, d'où $N_2=-N_1$, ou bien N_1 et N_2 sont infinis. Les coefficients γ sont donc de la forme $-\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{N^2}\right)$, N désignant un entier plus grand que 1, qui peut être infini: c'est la forme connue dans la théorie des fonctions automorphes. D'ailleurs la différence $r_2-r_1=\dfrac{1}{N}$ n'est un nombre entier que pour $N=\infty$: nous avons donc seulement trois équations entre les coefficients δ.

Pour $h=3$, nous obtenons comme équations dont l'intégrale générale est uniforme, outre les équations du n° 3: pour $\sum\dfrac{1}{N}>1$, des équations dont l'intégrale

[1] Pour $n=-2$, la relation entre l'équation (9) et l'équation linéaire du système (10) est bien connue. Pour $n\neq-2$, si l'équation simplifiée est de la première catégorie, l'équation linéaire est encore *normale*, suivant le terme de M. Poincaré: la différence des racines de l'équation déterminante relative à chaque pôle est nulle, ou est une partie aliquote de l'unité, d'après les relations $r_2-r_1=\dfrac{n+1}{n}\left(\dfrac{1}{N_1}-\dfrac{1}{N_2}\right)=\dfrac{1}{N_1}$. La variable x est encore fonction uniforme du rapport des intégrales de l'équation linéaire; et d'après l'équation $\sum\dfrac{1}{N_1}=h-2$, cette fonction uniforme est une fonction fuchsienne dégénérée. Voir *Acta mathematica*, t. IV, p. 226.

générale est rationnelle, et se rattache à la théorie des polyèdres réguliers; pour $\sum \frac{1}{N} < 1$, des équations dont les intégrales sont les fonctions de Schwarz. Ces fonctions admettent comme coupure essentielle une droite ou une circonférence variable avec les constantes d'intégration, et ne sont définies que dans la partie du plan située d'un côté de la droite, à l'intérieur ou à l'extérieur de la circonférence. Les plus remarquables sont la fonction modulaire d'Hermite, c'est-à-dire le carré k^2 du module de Jacobi, considéré comme fonction du rapport des périodes de l'intégrale elliptique, qui vérifie l'équation correspondant aux valeurs des entiers ∞, ∞, ∞; et l'invariant absolu J de M. Klein considéré comme fonction de la même variable, qui vérifie l'équation correspondant aux entiers $2, 3, \infty$. Ces deux fonctions admettent comme coupure l'axe réel. Elles sont liées par l'équation algébrique

$$\frac{J}{J-1} = \frac{(k^4 - k^2 + 1)^3}{(k^2+1)^2 (k^2 - \frac{1}{2})^2 (k^2 - 2)^2} \quad \text{ou} \quad J = \frac{4(k^4 - k^2 + 1)^3}{27\, k^4 (k^2 - 1)^2}$$

qui montre la correspondance des valeurs $J = 0$, $J = 1$ à des valeurs régulières de k^2; la fonction k^2 n'atteint pas les valeurs $0, 1, \infty$, et la fonction J n'atteint pas la valeur correspondante, ∞.

Pour $h \geq 4$ (h n'est pas limité), excepté l'intégrale de l'équation obtenue au n° 3, les intégrales uniformes sont des fonctions fuchsiennes ou kleinéennes. Les fonctions fuchsiennes admettent une circonférence comme coupure essentielle, ou bien possèdent un ensemble parfait de points singuliers, discontinu et situé sur une circonférence: dans ce second cas, le prolongement analytique de Weierstrass définit la fonction dans tout le plan. Les fonctions kleinéennes possèdent un ensemble parfait discontinu de points singuliers, ou bien admettent comme coupures essentielles une ligne non analytique, ou encore une infinité de circonférences. Toutes ces singularités sont mobiles, puisque l'intégrale générale se déduit d'une intégrale particulière en y remplaçant x par $\frac{Ax+B}{Cx+D}$. On sait comment la théorie des groupes fuchsiens et kleinéens fournit de nouvelles conditions nécessaires pour que l'intégrale soit uniforme, sous la forme d'égalités ou d'inégalités transcendantes entre les coefficients de l'équation, comment elle permet de démontrer que ces conditions sont suffisantes, et de distinguer la nature des intégrales.

5. Pour les valeurs de n: $1, 2, 3, 5, \infty$, il peut exister d'autres sortes de pôles. *L'équation linéaire du second ordre a alors son intégrale algébrique.* Et les équations simplifiées de cette seconde catégorie se ramènent aux équations du premier

ordre suivantes, dont l'intégrale est uniforme d'après la discussion de Briot et Bouquet que nous avons rappelée:

$$(13)\quad \begin{cases} y'^{2} = A(a_0 y^4 + a_1 y^3 + a_2 y^2 + a_3 y + a_4) + B(b_0 y^4 + b_1 y^3 + b_2 y^2 + b_3 y + b_4), \\ y'^{\frac{3}{2}} = A(a_0 y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3) + B(b_0 y^3 + b_1 y^2 + b_2 y + b_3), \\ y'^{\frac{1}{3}} = A(a_0 y^2 + a_1 y + a_2) + B(b_0 y^2 + b_1 y + b_2). \\ y'^{\frac{6}{5}} = y^{\frac{3}{5}}(Ay + B), \\ y' = A(a_0 y^2 + a_1 y + a_2) + B(b_0 y^2 + b_1 y + b_2). \end{cases}$$

Les a_i, b_i désignent des constantes numériques, et A, B deux constantes d'intégration.

Soit par exemple $n = 1$. Supposons que pour tous les pôles d'une équation simplifiée les nombres N_1 et N_2 soient égaux à deux des nombres $\pm 1, \pm 2, \infty$, sans être tous deux infinis: les nombres r_1 et r_2 sont entiers positifs ou nuls. L'intégrale générale de l'équation linéaire correspondante est holomorphe pour toute valeur finie de y, et, comme la valeur $y = \infty$ est régulière, cette intégrale est nécessairement un polynome du quatrième degré: l'équation simplifiée considérée admet une équation de la forme (13) comme intégrale intermédiaire. Mais, même si les nombres r_1, r_2 ne sont pas tous entiers positifs ou nuls, l'équation simplifiée peut se ramener à une équation (13). Si les quatre nombres N_1, N_2, N'_1, N'_2 relatifs à deux pôles a et b admettent un diviseur commun N (∞ étant considéré comme multiple de tout nombre fini), l'équation transformée en $z = \left(\frac{y-a}{y-b}\right)^{\frac{1}{N}}$ a son intégrale générale uniforme, et est du type (9). Toutes les équations simplifiées dont l'intégrale générale est uniforme, et qui ne sont pas de la première catégorie, ou bien admettent une intégrale intermédiaire de la forme (13), ou bien se ramènent à une équation admettant une telle intégrale intermédiaire par un des changements de fonction

$$(y, y^N);\ \left[y, \left(\frac{y^N - 1}{y^N + 1}\right)^2\right]\ (N \text{ entier} > 1);\ \left[y, \left(\frac{y^4 - 2i\sqrt{3}\,y^2 + 1}{y^4 + 2i\sqrt{3}\,y^2 + 1}\right)^3\right].$$

en négligeant les changements de fonction homographiques. On reconnaît les fractions rationnelles inaltérées par les substitutions du groupe cyclique, du groupe du dièdre et du groupe du tétraèdre: on sait que ces fractions s'introduisent dans l'intégration de l'équation linéaire du second ordre à coefficients algébriques, dont l'intégrale est algébrique.

Pour cette catégorie d'équations simplifiées, l'intégrale générale est donc fonction elliptique de x, ou fonction rationnelle de $e^{\lambda x}$. Mais ici le module des

fonctions elliptiques, ou le nombre λ, dépend des constantes d'intégration, tandis que, pour les équations de la première catégorie, il en était indépendant.

Si nous considérons la première équation (13), et si nous posons

$$P = a_0 y^4 + a_1 y^3 + a_2 y^2 + a_3 y + a_4, \quad Q = b_0 y^4 + b_1 y^3 + b_2 y^2 + b_3 y + b_4,$$

l'élimination des constantes A et B donne l'équation simplifiée

$$y''' = \frac{PQ'' - QP''}{PQ' - QP'} y' y'' - \frac{P'Q'' - Q'P''}{PQ' - QP'} \frac{y'^3}{2}. \tag{14}$$

Cette équation simplifiée a six pôles, si les coefficients de P et Q sont arbitraires, et les entiers N_1, N_2 relatifs à ces pôles sont $1, \infty$. Effectivement la discussion de l'équation arithmétique (11) montre que, pour $n = 1$, ce nombre 6 ne peut être dépassé, et que s'il est atteint, c'est par une équation (14).

Pour n différent de 1 et -2, le nombre des pôles est 4 au plus. Il est donc limité pour toutes les valeurs de n, excepté -2.

Équations à points critiques fixes de la forme $y''' = P(y'', y', y, x)$, où P désigne un polynome en y'', y', y à coefficients analytiques en x.

6. Les degrés de ce polynome en y'' et y' sont limités par les propositions de M. Painlevé que nous avons rappelées: la simplifiée est

$$y''' = b(y) y' y'' + c(y) y'^3,$$

$b(y)$ et $c(y)$ désignant des polynomes en y. Il résulte de la discussion du chapitre précédent que ces deux polynomes sont identiquement nuls. Les équations considérées ont donc nécessairement la forme

$$y''' = Q(y, x) y'' + R(y, x) y'^2 + S(y, x) y' + T(y, x), \tag{15}$$

Q, R, S, T désignant des polynomes en y à coefficients analytiques en x. Elles admettent comme simplifiée $y''' = 0$, et la réciproque est vraie.

Pour étudier au voisinage du point x_0 les intégrales qui deviennent infinies en ce point, mettons en évidence les termes de degré le plus élevé en y:

$$y''' = (a(x) y^m + \cdots) y'' + (b(x) y^n + \cdots) y'^2 + (c(x) y^p + \cdots) y' + d(x) y^q + \cdots,$$

et faisons la substitution $\left(x, y; x_0 + \alpha^\lambda x, \frac{y}{\alpha^\mu}\right)$, λ désignant le plus grand des nombres $m, n+1, \frac{p}{2}, \frac{q-1}{3}$. L'équation devient

$$(16) \qquad y''' = a(x_0)\,y^{\lambda}y'' + b(x_0)\,y^{\lambda-1}y'^2 + c(x_0)\,y^{2\lambda}y' + d(x_0)\,y^{3\lambda+1} + \alpha(\ldots),$$

si les quatre nombres sont égaux; s'ils ne sont pas égaux, l'équation prend une forme analogue, mais un ou plusieurs des coefficients $a(x_0), b(x_0), c(x_0), d(x_0)$ sont nuls, et le développement peut procéder suivant les puissances de $\alpha^{\frac{1}{2}}$ ou de $\alpha^{\frac{1}{3}}$. Dans tous les cas, l'équation *réduite* pour $\alpha = 0$

$$(17) \qquad y''' = a\,y^{\lambda}y'' + b\,y^{\lambda-1}y'^2 + c\,y^{2\lambda}y' + d\,y^{3\lambda+1}$$

doit avoir son intégrale générale uniforme. Le problème se pose donc de déterminer les équations de la forme (17) dont l'intégrale générale est uniforme: les quantités a, b, c, d sont des constantes, dont l'une au moins n'est pas nulle; λ est un nombre positif entier ou fractionnaire; s'il est fractionnaire, a et b sont nuls et, si c n'est pas nul, 2λ est entier, si d n'est pas nul, 3λ est entier.

Remplaçons l'équation (17) par le système

$$y' = uy^{\lambda+1} \qquad \frac{u''}{y^{2\lambda}} + [3(\lambda+4)u - a]\frac{u'}{y^{\lambda}} + (\lambda+1)(2\lambda+1)u^3 - [(\lambda+1)a+b]u^2 - cu - d = 0.$$

Nous voyons de suite que, si l'on n'a pas

$$(\lambda+1)a + b = c = d = 0,$$

la seconde équation admet au moins une intégrale de la forme $u = h$, h désignant une constante non nulle, et la première équation fait correspondre à cette intégrale l'intégrale définie par l'équation $y^{-\lambda} = -\lambda h(x + C)$, C désignant une constante d'intégration. Cette dernière intégrale, pour $\lambda > 1$, a un point critique algébrique mobile, et par suite l'intégrale générale n'est pas uniforme.

Ainsi, ou bien l'équation réduite est

$$(18) \qquad y''' = y^{\lambda}y'' - (\lambda+1)\,y^{\lambda-1}y'^2$$

(si a n'est pas nul, on peut lui donner telle valeur numérique qu'on veut, en multipliant y par une constante), ou bien λ est égal ou inférieur à 1. Réservons l'étude de l'équation (18), et supposons d'abord λ égal à 1.

L'équation réduite

$$y''' = a\,y\,y'' + b\,y'^2 + c\,y^2y' + d\,y^4$$

peut être remplacée par le système

$$(19) \qquad y' = uy^2 \qquad \frac{u''}{y^2} + (6u - a)\frac{u'}{y} = -6u^3 + (2a+b)u^2 + cu + d = P(u).$$

Si nous réservons encore l'étude de l'équation

$$y''' = yy'' - 2y'^2, \tag{20}$$

qui n'est autre que l'équation (18) où l'on fait $\lambda = 1$, les trois racines h, k, l du polynome $P(u)$ ne peuvent être nulles à la fois. Soit h une racine non nulle: à cette racine correspond l'intégrale $y = -\frac{1}{h(x+C)}$; nous allons étudier les intégrales voisines. Posons $u = h + \alpha v$, et développons v suivant les puissances de α. Le système (19) devient

$$y' = (h + \alpha v)y^2 \qquad \frac{v''}{y^2} + (6h - a)\frac{v'}{y} + 6v(h-k)(h-l) - \alpha(\ldots),$$

d'où, pour $\alpha = 0$:

$$y = -\frac{1}{h(x+C)} \qquad (x+C)^2 v''_0 - \left(6 - \frac{a}{h}\right)(x+C)v'_0 + 6\frac{(h-k)(h-l)}{h^2}v_0 = 0.$$

Posons $v_0 = (x+C)^r$, et soient r_1, r_2 les deux racines de l'équation caractéristique:

$$r_1 + r_2 = 7 - \frac{a}{h}, \quad r_1 r_2 = 6\frac{(h-k)(h-l)}{h^2}.$$

r_1 et r_2 sont deux nombres entiers différents, si v_0 est uniforme. Aucun d'eux n'est nul: sinon, le polynome $P(u)$ aurait une racine double, ou triple, différente de zéro, et la fonction v_1, ou v_2, contiendrait un logarithme. Aucun des deux entiers n'est égal à -1, puisque u, et par suite v, sont dérivées de fonctions uniformes.

Si le polynome $P(u)$ a deux racines nulles, le produit $r_1 r_2$ relatif à la troisième est égal à 6: r_1 et r_2 peuvent être

I	1 et 6,	d'où l'équation $y''' + 6y'^2 = 0$,	d'où $y''^2 + 4y'^3 + C = 0$;	
II	2 et 3	$y''' = 2yy'' + 2y'^2$	$y'' = 2yy' + C$;	
III	-2 et -3	$y''' = 2yy'' - 3y'^2$.		

Si le polynome $P(u)$ a une seule racine nulle, les produits $r_1 r_2$ relatifs aux deux autres h et k doivent être des nombres entiers:

$$6\frac{h-k}{h} = N, \quad 6\frac{k-h}{k} = N',$$

d'où l'équation

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N'} = \frac{1}{6}.$$

Il faut résoudre cette équation en nombres entiers, faire pour les deux nombres N, N' de chaque solution la discussion que nous venons de faire pour le nombre 6: les valeurs de a calculées à partir des deux nombres doivent être égales. On est conduit ainsi aux cinq équations

IV $\quad y''' = 3yy'' + 3y'^2 - 3y^2y'$, d'où $y'' = 3yy' - y^3 + C$,

V $\quad y''' - 2yy'' + 4y'^2 - 2y^2y' \qquad y'' = \dfrac{y'^2}{2y} + 2yy' - \dfrac{y^3}{2} + \dfrac{C}{y}$,

VI $\quad y''' = yy'' + 5y'^2 - y^2y' \qquad (y'' - yy' - y^3)^2 = \dfrac{8}{3}(y' - y^2)^2\left(y' + \dfrac{y^2}{2}\right) + C$,

VII $\quad y''' = yy'' + 2y'^2 + 2y^2y' \qquad y'' = \dfrac{y'^2}{2y} + yy' + \dfrac{y^3}{2} + \dfrac{C}{y}$,

VIII $\quad y''' = 6y^2y' \qquad y'' = 2y^3 + C$.

Si le polynome $P(u)$ a ses trois racines différentes de zéro, le produit $r_1 r_2$ relatif à chacune d'elles est un nombre entier:

$$6\frac{(h-k)(h-l)}{h^2} = N,\quad 6\frac{(k-l)(k-h)}{k^2} = N',\quad 6\frac{(l-h)(l-k)}{l^2} = N'',$$

d'où l'équation

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N'} + \frac{1}{N''} = \frac{1}{6}. \tag{21}$$

Soit d'abord $a = 0$. Pour les trois racines, la somme $r_1 + r_2$ est égale à 7: les trois nombres $49 - 4N$, $49 - 4N'$, $49 - 4N''$ doivent être carrés parfaits. D'après l'équation arithmétique (21), l'un au moins des nombres N, N', N'' est positif, et par suite égal à 6, 10 ou 12. Si l'un était 6, un autre serait 6, 10 ou 12, et le troisième -6, -10 ou -12, ce qui est impossible. Si l'un est 10, les deux autres peuvent être 10 et -30, ou 12 et -60, d'où les deux équations

IX $\quad y''' + 6y'^2 = 18(y' + y^2)(y' + 3y^2)$,

X $\quad y''' - 6y^2y' + 3\dfrac{9 + 7\sqrt{3}}{11}(y' + y^2)^2$.

Si l'un des nombres N, N', N'' est 12, un autre est nécessairement 10, c'est le cas précédent.

Supposons enfin a différent de zéro. Les rapports des racines h, k, l sont commensurables, et le produit

$$-6NN'N'' = 6^4\frac{(h-k)^2(k-l)^2(l-h)^2}{h^2k^2l^2}$$

est un carré parfait. On résoud l'équation (21) en nombres entiers tels que $-6NN'N''$ soit carré parfait, on fait pour les nombres N, N', N'' de chaque solution la discussion précédemment faite pour le nombre 6: les valeurs de a calculées à partir des trois nombres doivent être égales. On obtient les deux nouvelles équations

XI $$y''' = \frac{1-k^2}{2} yy'' + \left(\frac{1-k^2}{2} + 6\right) y'^2 - 3(1-k^2) y^2 y' + \frac{3(1-k^2)^2}{8} y^4$$

ou $$y' = \frac{1-k^2}{4} y^2 + z, \quad z''' = 6z^2 \quad (k \text{ entier} > 1, \text{ non multiple de } 6),$$

XII $$y''' = 2yy'' - 3y'^2 + \frac{4}{36-k^2}(6y' - y^2)^2 \quad (k \text{ entier} > 1, \text{ différent de } 6).$$

Remarquons que les entiers r_1, r_2 relatifs à une racine h du polynome $P(u)$ ont la signification suivante: s'ils sont positifs, ou si l'un d'eux r_1 est positif, les intégrales de l'équation réduite admettent des pôles simples de résidu $-\frac{1}{h}$, et dans les développements polaires correspondants, les coefficients des puissances $r_1 - 1$, $r_2 - 1$, ou le coefficient de la puissance $r_1 - 1$, sont arbitraires. De même, si r_1 et r_2 sont négatifs, ou si l'un d'eux r_2 est négatif, l'équation réduite est satisfaite formellement par des développements suivant les puissances de $\frac{1}{x+C}$, dont le premier terme est $-\frac{1}{h(x+C)}$, et dans lesquels les coefficients de $(x+C)^{r_1-1}$ et de $(x+C)^{r_2-1}$, ou le coefficient de $(x+C)^{r_2-1}$, sont arbitraires: ces développements convergent si $|x+C|$ est assez grand, et représentent[1] des intégrales au voisinage de la valeur $x = \infty$.

Si λ est inférieur à 1, l'équation réduite a l'une des formes

$$y''' = dy^3, \; y''' = cyy', \; y''' = dy^2,$$

ou enfin l'équation (15) est linéaire.

L'équation $y''' = dy^3$, dans laquelle λ est égal à $\frac{2}{3}$, admet des intégrales de la forme $\frac{m}{(x+C)^2}$, m désignant une constante; l'intégrale générale n'est pas uniforme.

L'équation

XIII $$y''' = cyy', \text{ soit } y''' = 12yy'$$

admet l'intégrale première $y'' = 6y^2 + C$, elle est donc à retenir.

[1] Voir le n° 12.

L'équation $y''' = dy^2$, soit $y''' + 60\,y^2 = 0$ admet l'intégrale particulière $\frac{1}{(x+C)^3}$: étudions les intégrales voisines. Posons[1] $y = \frac{1}{(x+C)^3} + \alpha z$, et développons z suivant les puissances de α. z_0 est donné par l'équation linéaire d'Euler

$$z_0''' + \frac{120}{(x+C)^3} z_0 = 0,$$

dont l'équation caractéristique

$$r(r-1)(r-2) + 120 = (r+4)(r^2 - 7r + 30) = 0$$

a des racines imaginaires. z_0, et par suite l'intégrale générale ne sont pas uniformes.

7. Une transformation linéaire de la fonction et un changement de variable définis par les équations

$$y = \lambda(x)\,Y + \mu(x), \quad X = \varphi(x), \tag{22}$$

λ, μ, φ désignant des fonctions analytiques de x, n'altèrent ni la forme de l'équation (15), ni la nature des points critiques, fixes ou mobiles, de l'intégrale. On profite de l'indétermination de ces fonctions pour réduire les équations à points critiques fixes à des formes canoniques le plus simples possible, en particulier pour donner aux coefficients $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ les valeurs numériques des coefficients des équations réduites. Les coefficients λ, μ, φ de la transformation qui ramène une équation à points critiques fixes donnée à l'équation canonique correspondante sont des fonctions algébriques des coefficients de l'équation donnée et de leurs dérivées, si l'équation canonique n'admet pas de groupe de transformations en elle-même de la forme (22), dépendant de paramètres variables. Ils sont déterminés par des quadratures, si l'équation canonique admet une tel groupe de transformations à un ou deux paramètres. Enfin ils sont déterminés par des quadratures, et par l'intégration d'une équation linéaire du second ordre, dont les coefficients sont des fonctions algébriques des coefficients de l'équation donnée et de leurs dérivées, si l'équation canonique admet un tel groupe de transformations à trois paramètres.[2]

Au point de vue de la recherche des équations irréductibles, une quadrature et l'intégration d'un système linéaire doivent être considérées comme des opéra-

[1] On voit nettement ici que cette sorte de calcul revient à la formation de l'équation aux variation de M. Poincaré (ou de l'équation auxiliaire de M. Darboux) relative à une intégrale particulière connue. Voir le n° 25.

[2] Voir le n° 12, voir aussi le n° 18.

tions élémentaires, et en général nous ne préciserons pas la nature des opérations qui effectuent la réduction aux équations canoniques que nous considérerons.

8. Pour obtenir les équations à points critiques fixes admettant une équation réduite donnée, il faut écrire les termes complémentaires, et rechercher de nouvelles conditions nécessaires pour que l'équation complète ait ses points critiques fixes. On peut développer l'intégrale de l'équation (16) suivant les puissances du paramètre α, ou se servir des développements polaires. Si au voisinage d'un pôle le développement d'une intégrale de l'équation réduite contient un ou deux coefficients arbitraires, les intégrales de l'équation complète doivent admettre des pôles mobiles au voisinage desquels leur développement a le même terme prépondérant, et le, ou les mêmes coefficients arbitraires: sinon, comme M. Gambier l'a montré pour les équations du second ordre,[1] l'intégrale générale a des points critiques mobiles autour desquels elle acquiert une infinité de déterminations. Pour les équations du troisième ordre, les développements polaires dont deux coefficients sont arbitraires, fournissent plusieurs équations différentielles entre les coefficients.

9. Appliquons ces principes aux équations à points critiques fixes admettant comme équation réduite l'équation I. Les intégrales de ces équations ont des pôles mobiles, et admettent au voisinage des développements de la forme

$$y = \frac{1}{x - x_0} + \alpha + \beta(x - x_0) + \gamma(x - x_0)^2 + \delta(x - x_0)^3 + \varepsilon(x - x_0)^4 + \varphi(x - x_0)^5 + \cdots,$$

les coefficients α et φ étant arbitraires. Ces équations se ramènent à l'un des six types:

$$(23)\quad \begin{cases} y''' + 6y'^2 = \dfrac{g_2}{2}, \\ y''' + 6y'^2 = -x, \\ y''' + 6y'^2 = 6y + 3x^2, \\ y''' + 6y'^2 = 12xy + 2x^4 + \alpha, \\ y''' + 6y'^2 = 6\dfrac{y' + y^2}{x^2} + \alpha x^3(xy' - 2y) + \beta x^2 + \dfrac{\gamma}{x}, \\ y''' + 6y'^2 = 6p(x; 0, 1)(y' + y^2) + \alpha(2py' - p'y) + \beta\dfrac{\sigma(x+h)}{\sigma x}e^{-x\zeta h} + \gamma\dfrac{\sigma(x-h)}{\sigma x}e^{x\zeta h}. \end{cases}$$

$g_2, \alpha, \beta, \gamma$ désignant des paramètres arbitraires, et h une solution de l'équation transcendante $p(h; 0, 1) = 0$.

Chacune de ces équations est une dégénérescence de la suivante, comme il

[1] *Acta mathematica*, 1910.

arrive à certaines des équations (A). Nous allons montrer qu'elles se ramènent précisément aux équations (A). Elles admettent des facteurs intégrants, et par des transformations simples, deviennent les équations du second ordre

$$y''^2 + 4y'^3 - g_2 y' + g_3 = 0,$$

(B)
$$\begin{cases} \text{I} & y''^2 + 4y'^3 + 2(xy' - y) = 0, \\ \text{II} & y''^2 + 4y'^3 + xy'^2 - yy' + \alpha = 0, \\ \text{III} & y''^2 + 4y'^3 + (xy' - y)^2 + \alpha y' + \beta = 0, \\ \text{IV} & \left(y'' - \frac{2y}{x^2}\right)^2 + 4\left(y' - \frac{2y}{x}\right)\left(y' + \frac{y}{x}\right)^2 + \alpha x^2 (xy' - 2y)^2 + \beta x (xy' - 2y) + \frac{\gamma}{x^3}(xy' + y) + \delta = 0, \\ \text{V} & (y'' - 2py)^2 + 4y'^3 - 12py^2 y' + 4p'y^3 + \alpha(py'^2 - p'yy' + p^2 y^2) + Hy' - H'y + \delta = 0, \end{cases}$$

$g_2, g_3, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ désignant des paramètres arbitraires, h une solution de la même équation transcendante et H la fonction à multiplicateurs constants $\beta \frac{\sigma(x+h)}{\sigma x} e^{-x\zeta h} + \gamma \frac{\sigma(x-h)}{\sigma x} e^{x\zeta h}$, intégrale de l'équation de Lamé $H'' = 2pH$.

De même, chacune de ces équations est une dégénérescence de la suivante. La première admet comme intégrale générale $y = \zeta(x + A; g_2, g_3) + B$. M. Painlevé a montré que l'équation (B, I) est transformée algébrique de l'équation (A, I): $y'' = 6y^2 + x$. Il résulte que les cinq équations (B) sont irréductibles sauf pour des valeurs exceptionnelles de leurs paramètres.

M. Painlevé a formé[1] pour l'équation (A, VI) une expression qui possède des pôles mobiles simples de résidu 1, comme l'intégrale générale de chacune des équations (B), et qui n'a pas d'autres points singuliers mobiles: c'est l'expression

$$z = \frac{x(x-1)y'^2}{2y(y-1)(y-x)} - \frac{\alpha y}{x(x-1)} + \frac{\beta}{(x-1)y} + \frac{\gamma}{x(y-1)} - \frac{y' - \delta}{y - x}.$$

Elle satisfait à une équation différentielle du second ordre, mais de degré élevé. Pour obtenir une équation transformée du second ordre et du second degré, il suffit d'employer un procédé que M. Painlevé a appliqué aux plus simples des équations (A). Les intégrales de l'équation (A, VI), qui ont pour pôle le point arbitraire x_0, admettent au voisinage le développement

$$y = \pm \frac{x(x-1)}{\sqrt{2\alpha}} \cdot \frac{1}{x - x_0} + h + \cdots \quad (\text{pour } \alpha \neq 0),$$

le terme constant du développement étant arbitraire. Considérons alors la fonction

[1] *Comptes Rendus*, 24 décembre 1906.

$$t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{\sqrt{2\alpha}}{x(x-1)}\,y\right).$$

Pour cette fonction, les pôles de y correspondant au signe $-$ sont des points réguliers, et les pôles de y correspondant au signe $+$ sont des pôles simples de résidu 1. L'équation transformée en t est du second degré en t'', et les termes prépondérants au voisinage des pôles sont $t''^2 + 4t^3$. Cette équation se ramène algébriquement à l'une des équations (B), en général à l'équation (B, V) qui renferme quatre paramètres. Ainsi *les deux équations* (A, VI) et (B, V) *sont transformées algébriques pour des valeurs arbitraires de leurs paramètres.* Les équations (B), et par suite les équations du troisième ordre (23), ont leurs points critiques fixes, ce sont seulement les points singuliers du coefficient différentiel.

La forme des équations (B) est particulièrement propre à l'étude de la croissance de leurs intégrales, du genre et de l'ordre des fonctions entières qu'on peut y rattacher. M. Boutroux a considéré à ce point de vue les équations (A, I), (A, II), (A, III):[1] nous pouvons compléter ses résultats. Si dans les équations (B) on pose $y = \frac{u'}{u}$, on obtient des équations du troisième ordre en u, dont les intégrales sont régulières en dehors des points singuliers du coefficient différentiel.

Les équations en u déduites des équations (B, I), (B, II), (B, III) ont comme intégrales générales des fonctions entières, et, si l'on admet que la croissance de ces fonctions entières est régulière, il résulte des équations (B) qu'elles sont de genres et d'ordres 2 et $\frac{5}{2}$, 3 et 3, 4 et 4. Dans la suite formée par la fonction $\sigma(x; g_2, g_3)$ et par ces trois fonctions entières, chacune est une dégénérescence de la suivante. La fonction entière d'ordre $\frac{5}{2}$ a été considérée par M. Boutroux. M. Boutroux a considéré la fonction $e^{-\int dx \int y^2 dx}$, y désignant une intégrale de l'équation (A, II): elle est le produit de $e^{\frac{x^3}{12}}$ et de deux fonctions entières définies par des équations (B, II), et par suite est comme elles de genre et d'ordre 3. L'étude des intégrales de l'équation (A, IV) se ramène à celle de la fonction entière de genre 4.

Les intégrales de l'équation en u déduite de l'équation (B, IV) sont régulières en dehors des deux points $0, \infty$. Par le changement de variable (x, e^x), l'intégrale générale devient une fonction entière de genre infini. La dérivée logarithmique satisfait à une équation telle que

$$(y'' - y')^2 + 4y'^2(y' - y) + \alpha e^{2x}(y' - y)^2 + \beta e^x (y' - y) + \gamma e^{2x} + \delta e^x y' = 0:$$

[1] *Acta mathematica*, 1904.

on obtient de même l'ordre de grandeur de cette fonction entière. Pour $\alpha \neq 0$, le module maximum sur la circonférence de rayon r, $M(r)$, croît, si r est suffisamment grand, comme $e^{h e^{2r}}$, h désignant une constante: l'équation (B, IV) est alors transformée de l'équation (A, V). Pour $\alpha = 0$, l'équation (B, IV) est transformée de l'équation (A, III). Pour $\beta \neq 0$, le module maximum $M(r)$ croît comme $e^{h e^r}$; pour $\beta = 0$, $\gamma \neq 0$, comme $e^{h e^{\frac{3}{2} r}}$; pour $\beta = \gamma = 0$, $\delta \neq 0$, comme $e^{h e^{\frac{1}{2} r}}$. Ces résultats concordent avec ceux que M. Boutroux a obtenus directement sur l'équation (A, III).

Les intégrales de l'équation en u déduite de l'équation (B, V) sont régulières en dehors des pôles de $p(x)$ et du point $x = \infty$. Avec la nouvelle variable $X = 4p^3(x)$, elles sont régulières en dehors des trois points 0, 1, ∞; et par le nouveau changement de variable $X = \varphi(\xi)$, $\varphi(\xi)$ désignant la fonction modulaire, elles deviennent des fonctions de ξ holomorphes au-dessus et au-dessous de l'axe réel, qui est pour elles une coupure essentielle.

Remarquons encore que l'intégrale générale de chacune des deux premières équations du troisième ordre (23) est fonction transcendante de deux constantes d'intégration et fonction rationnelle de la troisième: au contraire l'intégrale générale de chacune des quatre dernières équations (23) est fonction transcendante des trois constantes d'intégration (parce que l'intégrale générale de l'équation $y'' = 2y^3 + xy + \alpha$ est fonction transcendante des deux constantes d'intégration et du paramètre α).

Signalons enfin des transformées algébriques des équations (A), du second degré comme les équations (B), et curieuses en raison de leur élégance:

$$(C)\quad \begin{cases} \text{I} & y'' = 6y^2 + \alpha + x\sqrt{y'^2 - 4y^3} \qquad 2\alpha y - \beta, \\ \text{II} & y'' = 2y^3 + \alpha y + \beta + 2i(y - e^x)\sqrt{y'^2 - y^4 - \alpha y^2 - 2\beta y - \gamma}, \\ \text{III} & y'' = \alpha y + \beta + 2\dfrac{y}{x}\sqrt{y'^2 - \alpha y^2 - 2\beta y - \gamma}, \\ \text{IV} & y'' = 6y^2 + \alpha y + \beta + \dfrac{2}{x}\left(y - \dfrac{x^2}{2}\right)\sqrt{y'^2 - 4y^3 - \alpha y^2 - 2\beta y - \gamma}, \\ \text{V} & y'' = 2y^3 + \alpha y + \beta + 2\operatorname{tg} x\left(y \qquad \dfrac{\delta}{\sin x}\right)\sqrt{y'^2 - y^4 - \alpha y^2 - 2\beta y - \gamma}. \end{cases}$$

Les quatre premières équations sont des dégénérescences de la cinquième. L'équation (C, V) est transformée de l'équation (A, VI), les équations (C, II) et (C, IV) sont transformées de l'équation (A, V), l'équation (C, I) de l'équation (A, IV), et l'équation (C, III) de l'équation (A, III). Dans les équations (C) l'élimination du radical conduit à des équations du troisième ordre de la forme (7), admettant comme simplifiée $y''' - \dfrac{y' y''}{y}$.

10. Les équations à points critiques fixes qui admettent comme équations réduites les équations II, IV, V, VII se ramènent à des équations du second ordre connues par les recherches de M. Painlevé et de M. Gambier. Chacune admet en effet comme équation réduite au voisinage de la valeur $y=\infty$ l'équation du second ordre, intégrale première de l'équation réduite du troisième ordre, dans laquelle on a annulé la constante C.

Il en est de même des équations à points critiques fixes admettant comme équations réduites les équations VIII et XIII, à l'exception d'équations qui se ramènent aux trois types

$$y'''=6y^2y'+12xyy'+4(x^2-\alpha)y'+4y^2+4xy,$$
$$y'''=12yy'+6y-6x,$$
$$y'''=12yy'+\frac{y''-6y^2-\alpha}{x}+12xy-6x^3.$$

La première équation est l'équation (A, IV) différentiée de façon à éliminer la constante β. La deuxième et la troisième deviennent par la transformation $(y,-y')$ et par intégration, des équations du troisième ordre admettant comme équation réduite l'équation I.

Les équations à points critiques fixes admettant comme équation réduite l'équation VI se ramènent à l'équation

$$y'''=yy''+5y'^2-y^2y'+3ay'+a'y+a'', \tag{24}$$

a désignant une intégrale de l'équation

$$a'''=aa', \text{ d'où } \frac{a'^2}{2}=\frac{a^3}{6}+\alpha a+\beta, \text{ et } a=12p\left(x+\gamma;-\frac{\alpha}{6},-\frac{\beta}{2}\right).$$

L'équation (24) admet l'intégrale première

$$(y''-yy'-y^3+ay+a')^2=\frac{8}{3}(y'-y^2)^2\left(y'+\frac{y^2}{2}+\frac{3a}{2}\right)+4(y'-y^2)(2ay^2+a'y+a'')$$
$$+4a^2y^2+4aa'y+2a'^2+C.$$

L'intégrale générale de cette équation du second ordre a ses points critiques fixes, et est fonction rationnelle des deux constantes d'intégration: on sait par suite la ramener aux équations linéaires. y s'exprime en fonction rationnelle de a, de ses dérivées, et des dérivées logarithmiques première et seconde de l'intégrale de l'équation linéaire et homogène

$$\theta'''=a\theta'+\frac{\sqrt{\beta+C}}{3}\theta.$$

y est fonction transcendante de la troisième constante d'intégration.

Les équations à points critiques fixes admettant comme équations réduites les équations IX et X se ramènent aux deux équations

$$y''' + 6y'^2 = 18(y' + y^2)(y' + 3y^2) + \alpha,$$

$$y''' = 6y^2 y' + 3\frac{9 + 7\sqrt{3}}{11}(y' + y^2)^2.$$

Je n'ai pas intégré ces équations. Elles ont cette propriété particulière, que leur intégrale générale possède deux familles de pôles simples mobiles, dont les résidus sont incommensurables l'un à l'autre. Mais cette propriété n'est pas essentielle, elle n'appartient plus aux équations transformées en $y' + y^2$. Il est vraisemblable que les intégrales de ces deux équations sont uniformes, mais ne sont pas des fonctions nouvelles, qu'elles s'expriment par les fonctions elliptiques par exemple.

11. Les équations à points critiques fixes admettant comme équation réduite l'équation XI se ramènent au système

$$y' = \frac{1 - k^2}{4} y^2 + z + a, \quad z'' = 6z^2 + b \quad (k \text{ entier} > 1, \text{ non multiple de } 6),$$

ou

$$\eta = \frac{4}{k^2 - 1}\frac{t'}{t}, \quad \frac{t''}{t} = \frac{k^2 - 1}{4}(z + a), \quad z'' = 6z^2 + b.$$

L'intégration de l'équation réduite ($a = b = 0$) se ramène ainsi à celle de l'équation linéaire

$$t'' = \frac{k^2 - 1}{4} p(x + A; 0, B)\, t.$$

Si k est impair, cette équation est une équation de Lamé. Si k est pair, mais non multiple de 6, l'intégrale générale n'est pas uniforme, mais le quotient de deux intégrales quelconques est uniforme, et l'on sait que l'intégrale générale s'exprime encore (algébriquement) au moyen des fonctions p, ζ, σ.

Les fonctions a et b ne sont pas arbitraires. Évidemment la fonction b est linéaire. Quant à la fonction a, des considérations d'homogénéité montrent qu'elle satisfait aux équations:

pour $k = 6m + 2$, m entier ≥ 0, $a = 0$,

$k = 6m + 3$, $a' = 0$,

$k = 6m + 4$, $a'' = \alpha a^2 + \beta b$

$k = 6m + 5$, $a''' = \alpha a a' + \beta b'$, d'où $a'' = \frac{\alpha a^2}{2} + \beta b + \gamma$,

α, β, γ désignant des constantes numériques. Dans ces quatre cas, la fonction a

est donc un polynome, une fonction elliptique ou s'exprime par les intégrales de l'équation $y'' = 6y^2 + x$.

Si k est de la forme $6m+1$, m entier >0, la fonction a satisfait à une équation présentant la même homogénéité, mais d'ordre égal à 5. Par exemple, pour $k=7$, après la substitution $\left(a, b; \frac{5a}{16}, \frac{-b}{24}\right)$, cette équation est

$$a^{V} = 15\,a\,a''' + \frac{75}{2}\,a'\,a'' - 45\,a^2\,a' + b\,a' + 2\,b'\,a, \quad b = \alpha x + \beta.$$

Je ne l'ai pas intégrée. Rappelons que l'étude des équations à points critiques fixes du second ordre et du premier degré a mis en évidence un fait curieux: les coefficients des équations canoniques auxquelles elles se ramènent sont arbitraires, ou, s'ils ne sont pas arbitraires, sont des fonctions uniformes classiques, ou enfin sont des fonctions uniformes intégrales des équations irréductibles (A): la théorie des équations différentielles à points critiques fixes a ainsi une application en elle-même. La nature des équations différentielles que nous obtenons pour $k = 6m+4$, $6m+5$ confirme cette remarque. L'équation obtenue pour $k=7$ est, en tout état de cause, introduite dans l'Analyse par la théorie des équations différentielles à points critiques fixes, mais il semble qu'elle a son intégrale générale uniforme, et il est possible qu'elle se ramène aux équations connues.

Enfin, pour $k>7$, la fonction a satisfait à d'autres équations différentielles, dont le nombre croît avec k, et qui la simplifient.

12. Considérons maintenant l'équation

$$\text{XII} \qquad y''' = 2yy'' - 3y'^2 + \frac{4}{36-k^2}(6y' - y^2)^2, \quad k \text{ entier} > 1, \neq 6, \text{ ou } k = \infty,$$

qui, pour $k=\infty$, devient l'équation III, et les équations à points critiques fixes qui admettent cette équation réduite. Par des quadratures, et par l'intégration d'une équation de Riccati, on peut annuler dans ces équations les termes en y'' et y^2, et les termes complémentaires sont alors: pour $k=2$, $ay+b$; pour $k=3$, b, a et b désignant des fonctions analytiques de x; pour k différent de 2, 3, il n'y a pas de termes complémentaires.

L'équation XII a la propriété de ne pas changer quand on prend pour nouvelle variable $\frac{Ax+B}{Cx+D}$, et qu'on remplace y par $\frac{AD-BC}{(Cx+D)^2}y - \frac{6C}{Cx+D}$, A, B, C, D désignant quatre constantes arbitraires. Cette propriété permet de déduire d'une intégrale particulière $y = f(x)$ l'intégrale générale $y = \frac{AD-BC}{(Cx+D)^2} f\left(\frac{Ax+B}{Cx+D}\right) - \frac{6C}{Cx+D}$, et nous conduit à considérer la fonction dont y est la dérivée logarithmique, ou une puissance de cette fonction.

L'équation XII admet les intégrales particulières:

$$\text{pour } k \text{ fini, } y = \frac{k-6}{2}\cdot\frac{1}{x+A} - \frac{k+6}{2}\cdot\frac{1}{x+B}, \text{ d'où } y = -\frac{6}{x+A};$$

$$\text{pour } k = \infty,\ y = -\frac{6}{x+A} + \frac{B}{(x+A)^2},$$

qui ne suffisent pas à donner l'intégrale générale. L'intégrale générale admet, si k est fini, une famille de pôles simples de résidu $\frac{k-6}{2}$. Posons $y = \frac{k-6}{2}\frac{u'}{u}$: l'équation XII devient

$$u\,u^{\mathrm{IV}} - (k-2)\,u'\,u''' + \frac{3\,k(k-2)}{2(k+6)}\,u''^2 = 0; \tag{25}$$

l'équation complète pour $k = 2$ devient

$$u\,u^{\mathrm{IV}} - a\,u\,u' - \frac{b}{2}u^2, \text{ équation linéaire;}$$

et l'équation complète pour $k = 3$

$$u\,u^{\mathrm{IV}} - u'\,u''' + \frac{u''^2}{2} = -\frac{2}{3}b\,u^2,$$

d'où, par dérivation,

$$u\,u^{\mathrm{V}} = -\frac{2}{3}(2\,b\,u\,u' + b'\,u^2), \text{ équation linéaire.}$$

L'équation (25) a la propriété de ne pas changer quand on prend pour nouvelle variable $\frac{Ax+B}{Cx+D}$, et qu'on remplace u par $u(Cx+D)^{\frac{12}{6-k}}$: on peut espérer l'intégrer par des fonctions analogues aux fonctions thétafuchsiennes.

Rendons la fonction u homogène de degré $\frac{12}{6-k}$ par rapport à la variable x et à une nouvelle variable x_1: l'équation (25) se transforme en l'équation aux dérivées partielles remarquable

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} - 4\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial x_1}\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial x_1^3} + 3\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial x_1^2}\right)^2 = 0. \tag{26}$$

Notre problème revient à la détermination des intégrales homogènes de degré $\frac{12}{6-k}$ de cette équation aux dérivées partielles, et distinctes des intégrales particulières $u = (Ax + Bx_1)^{6+k}(Cx + Dx_1)$, $u = (Ax + Bx_1)^{\frac{12}{6-k}}$.

Pour $k = 2, 3, 4, 5$, la fraction $\frac{12}{6-k}$ a les valeurs entières positives $3, 4, 6, 12$. Pour $k = 2$, l'intégrale générale de l'équation (25) est un polynome du troisième

degré à coefficients arbitraires; pour $k=3$, elle est un polynome du quatrième degré, dont les coefficients satisfont à la relation $S=0$. Il existe de même des polynomes de degrés 6 et 12, dont les coefficients dépendent de quatre paramètres, et dont le covariant (26) est identiquement nul.[1] Une transformation homographique de la variable permet d'écrire ces polynomes de degrés 4, 6 et 12

$$(27)\qquad \begin{cases} x^4 + 2i\sqrt{3}\,x^2 + 1, \\ x^5 + x, \\ x^{11} + 11\,x^6 - x. \end{cases}$$

Inversement l'intégrale générale de l'équation (25) se déduit de ces intégrales particulières par une transformation homographique de la variable. Ainsi, pour $k=2, 3, 4, 5$, l'intégrale générale de l'équation (25) est un polynome, et par suite celle de l'équation XII est rationnelle.

Les racines des polynomes (27) ont comme représentation sur la sphère, dans le mode de représentation des points du plan complexe sur la sphère introduit par Riemann, les sommets du tétraèdre régulier inscrit, les sommets de l'octaèdre inscrit, ou les centres des faces du cube circonscrit, les sommets de l'icosaèdre inscrit, ou les centres des faces du dodécaèdre circonscrit. Par les substitutions $\left(x, \frac{\alpha_i x + \beta_i}{\gamma_i x + \delta_i}\right)$ faisant partie des groupes des polyèdres inscrits correspondants, les polynomes se reproduisent, divisés par $(\gamma_i x + \delta_i)^{6-k}$. Rendons-les homogènes. Il résulte que le polynome $x x_1 (x^{10} + 11\,x^5 x_1^5 - x_1^{10})$ est inaltéré par les substitutions du groupe correspondant; le polynome $x x_1 (x^4 + x_1^4)$ est inaltéré, ou bien change de signe, car la fonction $(\gamma_i x + \delta_i)^{\frac{12}{2}}$ a deux valeurs égales et de signes contraires; la fonction $(\gamma_i x + \delta_i)^{\frac{12}{3}}$ a trois valeurs, et le polynome $x^4 + 2i\sqrt{3}\,x^2 x_1^2 + x_1^4$ est multiplié par une racine cubique de l'unité. Nous coordonnons ainsi des résultats[2] dont le lien n'était pas apparent. On peut d'ailleurs adjoindre aux polynomes (27) comme solution de l'équation (25) pour $k=2$ le polynome x^2+1. Ce polynome rendu homogène, par les substitutions du groupe correspondant, est multiplié par une racine quatrième de l'unité: effectivement par les substitutions du groupe du dièdre, la forme fondamentale $x^n + x_1^n$ est multipliée par une racine quatrième de l'unité, si n est impair; par une racine carrée, si n est pair.

Les polynomes (27) ont une propriété qui se rattache à la précédente, et qui par analogie va nous conduire à l'intégration de l'équation (25) pour $k>6$.

[1] Cf. Klein, *Vorlesungen über das Icosaeder*, p. 57.

[2] *Id.* p. 51, 54, 57.

Ils font partie des solutions du problème traité par Halphen: déterminer tous les systèmes de polynomes à une variable X, Y, Z, tels qu'on ait l'identité

$$X^m + Y^n + Z^p = 0, \tag{28}$$

m, n, p désignant trois entiers positifs. Il est clair que d'une solution on peut déduire une infinité d'autres, en y remplaçant la variable par une fraction rationnelle en une nouvelle variable: Halphen appelle primitive une solution formée de trois polynomes, dont les degrés ne peuvent être abaissés par le procédé inverse. Les identités entre solutions primitives sont en nombre très restreint: ce sont seulement celles que l'on rencontre dans la théorie des groupes linéaires finis. Les entiers m, n, p correspondants sont $2, n, 2$ (groupe du dièdre); $2, 3, 3$ (groupe du tétraèdre); $2, 3, 4$ (groupe de l'octaèdre); $2, 3, 5$ (groupe de l'icosaèdre): et dans ces trois derniers cas, les polynomes d'exposants $3, 4, 5$ peuvent, par une transformation homographique de la variable, recevoir les formes (27). Pour toutes ces solutions, la somme $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$ est plus grande que 1.

Halphen a obtenu de même des fonctions uniformes satisfaisant à l'identité (28) dans les cas, en nombre limité aussi, où la somme $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$ est égale à 1: ce sont des fonctions entières de la théorie des fonctions elliptiques. Et il a obtenu enfin des fonctions uniformes satisfaisant à l'identité (28) dans les cas en nombre infini où la somme $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$ est plus petite que 1:[1] ces fonctions ne sont définies que dans un cercle dont la circonférence est coupure essentielle. Elles dérivent des fonctions de Schwarz de la façon suivante.

Soit l'équation hypergéométrique de Gauss

$$t(1-t)\frac{d^2z}{dt^2} + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)t)\frac{dz}{dt} - \alpha\beta z = 0$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right), \quad \beta = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right), \quad \gamma = 1 - \frac{1}{m},$$

m, n, p désignant trois entiers positifs tels que l'on ait $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} < 1$, ou $\beta > 0$. Halphen considère les deux intégrales particulières qui, pour $|t| > 1$, se représentent ainsi:

$$z = t^{-\beta} F\left(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1, \frac{1}{t}\right), \quad z_1 = t^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, \frac{1}{t}\right),$$

[1] *Comptes Rendus*, 4 avril 1881.

F désignant la série hypergéométrique. Si l'on pose $x = -\frac{z_1(t)}{z(t)}$, la fonction $t(x)$ est une fonction de Schwarz, dont le triangle fondamental a comme angles $\frac{1}{m}, \frac{1}{n}, \frac{1}{p}$; elle est holomorphe dans un cercle dont le centre est à l'origine, et dont le rayon s'exprime au moyen de la fonction Γ (loc. cit.); la circonférence est pour la fonction $t(x)$ une coupure essentielle.

Formons les trois fonctions:

$$X(x) = (-t)^m z^{m\beta}, \quad Y(x) = (t-1)^n z^{n\beta}, \quad Z(x) = z^{p\beta}.$$

Ces trois fonctions satisfont à l'identité (28): elles sont définies dans le même cercle que la fonction $t(x)$, admettent la circonférence comme coupure; elles sont holomorphes dans ce cercle: il suffit de le constater au voisinage des valeurs $t = 0, 1, \infty$, puisque, $|x|$ restant fini, $z(t)$ ne peut s'annuler pour une autre valeur de t. Les fonctions X, Y, Z admettent respectivement comme zéros simples les points où la fonction $t(x)$ atteint les valeurs $0, 1, \infty$. Si m, n, p étaient des entiers positifs tels que l'on eût $\beta \leq 0$, les fonctions X, Y, Z obtenues par ce calcul seraient les polynomes, ou, en passant à la limite, les fonctions entières satisfaisant à l'identité (28). Halphen a remarqué que, si l'on considère les trois fonctions X, Y, Z comme des fonctions homogènes de degrés $-\frac{1}{m\beta}, -\frac{1}{n\beta}, -\frac{1}{p\beta}$, comme dans les cas où, β étant négatif, elles sont des polynomes, et si l'on calcule leurs invariants et covariants, ces invariants et covariants s'expriment au moyen des fonctions X, Y, Z elles-mêmes. Et il arrive que le covariant (26) de la fonction Z, qui est nul dans les cas où les entiers ont les valeurs: $2, 3, 2$; $2, 3, 3$; $2, 3, 4$; $2, 3, 5$ d'où $\beta < 0$, est nul encore pour $\beta > 0$, si m et n sont égaux à 2 et 3, et si p est un entier quelconque plus grand que 6. Le degré d'homogénéité de la fonction $Z(x)$ est $\frac{12}{6-p}$.

Une intégrale particulière des équations (25) ou (26) est donc la fonction $Z(x)$ construite avec les nombres $2, 3, k$, et vérifiant avec les fonctions associées $X(x)$, $Y(x)$ l'identité

$$X^2 + Y^3 + Z^k = 0.$$

Son développement au voisinage de l'origine se calcule de proche en proche:

$$Z(x) = x + \frac{k+6}{72(k^2-1)}x^{k+1} + \frac{(k-2)(k-3)(k-4)(k+6)}{12^4(k-1)^2(k+1)(4k^2-1)}x^{2k+1} + \dots;$$

le rayon du cercle de convergence, qui est coupure essentielle, a comme carré

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{k}\right)}\right]^2 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{11}{12}-\frac{1}{2k}\right)\Gamma\left(\frac{7}{12}-\frac{1}{2k}\right)\Gamma\left(\frac{5}{12}-\frac{1}{2k}\right)\Gamma\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{2k}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{12}+\frac{1}{2k}\right)\Gamma\left(\frac{7}{12}+\frac{1}{2k}\right)\Gamma\left(\frac{5}{12}+\frac{1}{2k}\right)\Gamma\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{2k}\right)}.$$

Pour $k=1$, cette expression est nulle. Pour $k=2, 3, 4, 5$, elle est négative: elle est en effet le carré du rayon du cercle orthogonal à un triangle d'arcs de cercle d'angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{k}$, ce cercle est imaginaire pour les valeurs de k considérées; le développement s'arrête au second ou au troisième terme, et se ramène par une transformation linéaire de la variable à l'un des polynomes considérés précédemment. Pour $k=6$, le rayon de convergence est infini; le développement n'est autre que le développement à l'origine de la fonction $\sigma(x; 0, -4)$. Pour $k>6$, le rayon de convergence décroît; lorsque k croît de 6 à ∞, l'expression donnée de ce rayon décroît constamment de la valeur ∞ à la valeur 1.

Il est clair que, pour obtenir l'intégrale de l'équation (25) et par suite celle de l'équation XII pour k fini, il suffit dans la définition de la fonction de Schwarz $t(x)$, de substituer aux deux intégrales de l'équation hypergéométrique

$$t(1-t)\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{2}-\frac{7}{6}t\right)\frac{dz}{dt} - \left(\frac{1}{36}-\frac{1}{k^2}\right)\frac{z}{4} = 0$$

choisies par Halphen deux intégrales distinctes arbitraires z et z_1. Les fonctions $u(x) = z^{k-6}$, $y(x) = \frac{6}{z}\frac{dz}{dx}$ sont les intégrales générales des équations (25) et XII. Elles admettent pour $k>6$ une droite ou une circonférence mobile comme coupure essentielle, et ne sont définies que dans la région variable du plan située d'un côté de la droite, à l'intérieur ou à l'extérieur de la circonférence. L'intégrale générale $y(x)$ est méromorphe dans cette région: elle admet les pôles de la fonction $t(x)$ comme pôles simples de résidu $\frac{k-6}{2}$. Quand elle est définie à l'extérieur de sa coupure, elle est régulière et nulle au point $x=\infty$, et admet au voisinage un développement de la forme

$$y = -\frac{6}{x+A} + \frac{\alpha}{(x+A)^3} + \frac{\beta}{(x+A)^4} + \cdots,$$

dans lequel la constante A et les coefficients α, β sont arbitraires.

L'intégrale générale $u(x)$ est holomorphe dans la région où elle est définie, sauf en général au point $x=\infty$, comme le montre le développement en produit infini déduit de la série précédente:

$$u = (x+A)^{6-k}\, e^{\frac{\alpha}{6-k}\cdot\frac{1}{(x+A)^2} + \frac{2\beta}{3(6-k)}\cdot\frac{1}{(x+A)^3} + \cdots}.$$

Si elle est définie à l'intérieur de sa coupure, ou si la coupure est une droite, elle est uniforme. Si elle est définie à l'extérieur de sa coupure, elle n'est pas uniforme en général; une détermination de l'intégrale, suivie le long d'un chemin qui tourne une fois autour de la coupure dans le sens direct, est multipliée par $e^{2\pi i \frac{12}{6-k}}$. Quand la coupure circulaire se réduit à un point, $x=0$, l'intégrale se réduit à l'une des intégrales particulières $u = x^{\frac{6+k}{6-k}}(x+C)$, $u = x^{\frac{12}{6-k}}$, dont les déterminations, suivies le long d'un chemin qui tourne autour du point $x=0$, sont multipliées par le même facteur. Les intégrales de cette seconde catégorie ont un nombre de branches égal au dénominateur de la fraction irréductible égale à $\frac{12}{6-k}$; elles sont uniformes pour $k = 7, 8, 9, 10, 12, 18$.

Pour $k=\infty$, l'intégrale générale de l'équation III est encore donnée par l'expression $y(x) = \frac{6}{z}\frac{dz}{dx}$, comme on peut le vérifier par un calcul direct. Elle admet une droite ou une circonférence mobile comme coupure essentielle, et est *holomorphe* dans la région où elle est définie. Quand elle est définie à l'extérieur de sa coupure, elle est nulle au point $x=\infty$, et admet au voisinage un développement de même forme que précédemment. La fonction $Y = \int y\,dx = 6\log z$ est l'intégrale générale de l'équation

$$Y^{IV} = 2\,Y'\,Y''' - 3\,Y''^2, \tag{29}$$

qui peut être déduite de l'équation (25) par un passage à la limite pour $k=\infty$. Si l'intégrale $Y(x)$ est définie à l'intérieur de sa coupure elle y est holomorphe et uniforme. Si elle est définie à l'extérieur de sa coupure, elle n'est pas holomorphe au point $x=\infty$; et est une fonction multiforme avec période, comme le montre son développement en série: une détermination de l'intégrale, suivie le long d'un chemin qui tourne une fois autour de la coupure dans le sens direct, est augmentée de la période $-12\pi i$, comme les déterminations de l'intégrale particulière $Y = -6\log x + \frac{C}{x}$.

Pour $k=\infty$, les nombres m, n, p sont $2, 3, \infty$: on peut choisir les intégrales z et z_1 de façon que leur quotient soit celui de deux périodes distinctes de l'intégrale elliptique admettant $1-t$ comme invariant absolu; la fonction de Schwarz correspondante est la fonction modulaire $J(x)$ de M. Klein. M. Klein a souvent aussi considéré les fonctions de Schwarz aux nombres $2, 3, k$: on sait qu'elles sont fonctions uniformes de la fonction $J(x)$. Les fonctions $u(x)$ sont des fonctions thétafuchsiennes, ou analogues à des fonctions thétafuchsiennes, et M.

Poincaré les signale à ce point de vue dans ses *Mémoires* des *Acta mathematica:* par les substitutions $\left(x, \frac{\alpha_i x + \beta_i}{\gamma_i x + \delta_i}\right)$ d'un groupe fuchsien, dont le polygone fondamental est un triangle d'angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{k}$, la fonction u est multipliée par $(\gamma_i x + \delta_i)^{\frac{12}{k-6}}$. L'exposant est entier pair, et la fonction u est thétafuchsienne pour $k = 7, 8, 9, 12$. M. Poincaré a d'ailleurs indiqué des solutions uniformes de l'identité (28) plus générales que les fonctions X, Y, Z.

La fonction v, définie par l'équation $y = -\frac{k+6}{2}\frac{v'}{v}$, et rendue homogène de degré $\frac{12}{6+k}$, satisfait à la même équation aux dérivées partielles que la fonction u. L'intégrale générale homogène de dégré $\frac{12}{6+k}$ de l'équation (26) est donc $v(x) = z^{-\frac{12}{k+6}} = u^{\frac{6-k}{6+k}}$, u désignant une intégrale homogène de degré $\frac{12}{6-k}$. Cette intégrale $v(x)$ admet, pour $k > 6$, une coupure circulaire mobile, et est définie à l'intérieur ou à l'extérieur de cette coupure, suivant les valeurs des constantes d'intégration. Dans les deux cas, elle admet comme points critiques algébriques les zéros de l'intégrale correspondante $u(x)$: autour de chaque point critique, et dans l'ensemble de la région où elle est définie, elle acquiert un nombre de déterminations égal au dénominateur de la fraction irréductible égale à $\frac{12}{k+6}$.

Nous avons ainsi obtenu l'intégrale homogène de degré $\frac{12}{6-N}$ de l'équation aux dérivées partielles (26), pour les valeurs de N entières, positives ou négatives, à l'exception des cinq valeurs: $0, \pm 1, \pm 6$.

13. L'équation $y''' = 2yy'' - 3y'^2$ est l'exemple le plus simple d'une équation dont l'intégrale générale a une coupure essentielle mobile, et n'est définie que dans une région du plan variable avec les constantes d'intégration. Il y a des exemples classiques d'équations du second ordre, dont l'intégrale générale a des points essentiels isolés mobiles. Ainsi l'équation

$$y'' = y'^2\left(\frac{6y^2 - \frac{g_2}{2}}{4y^3 - g_2 y - g_3} + \frac{1}{\lambda\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}\right) \quad (g_2, g_3, \lambda \text{ constantes numériques})$$

a comme intégrale générale $y = p[\lambda \log(Ax + B); g_2, g_3]$; si $2\omega i\lambda$ est période de la fonction elliptique p, cette intégrale générale est uniforme et admet le point $x = -\frac{B}{A}$ comme point essentiel isolé. Mais d'après un résultat établi par M. Painlevé, l'intégrale générale d'une équation du second ordre, algébrique en y'', y', y, ne peut

admettre une coupure; et il est vraisemblable que cette intégrale ne peut admettre non plus un ensemble parfait, discontinu de points singuliers mobiles. Nous avons vu déjà que la théorie des groupes automorphes a mis en évidence des équations de la forme

$$y''' = \frac{3}{2}\frac{y''^2}{y'} + y'^3 F(y),$$

$F(y)$ désignant une fonction rationnelle ou algébrique de y, dont l'intégrale présente de telles singularités.

Il est facile de former des équations différentielles du quatrième ordre, dont l'intégrale générale possède la même propriété que celles des équations (25) et (29). Considérons une fonction fuchsienne $y(x)$, admettant une coupure rectiligne ou circulaire, et dont $y = \infty$ soit une valeur singulière, la fonction modulaire d'HERMITE, ou la fonction $J(x)$ de M. KLEIN, par exemple: y satisfait à une équation du troisième ordre de la forme que nous venons de rappeler. La fonction $\int y\,dx$ satisfait à une équation différentielle algébrique du quatrième ordre: les intégrales de cette équation, définies à l'intérieur de leur coupure, sont uniformes; les intégrales, définies à l'extérieur de leur coupure, sont des fonctions multiformes. Dans le même ordre d'idées, M. KLEIN a formé des équations du troisième ordre, dont l'intégrale générale, pour certaines valeurs des constantes d'intégration, est définie seulement dans la région du plan comprise entre deux coupures circulaires concentriques, est holomorphe en tout point de cette région, et acquiert une infinité de déterminations autour du petit cercle

L'équation XII, pour $k > 6$, est intéressante encore au point de vue de la notion de simplifiée. Il est évident que, si l'intégrale générale de la simplifiée d'une équation à points critiques fixes, a des singularités essentielles mobiles, il en est de même de l'intégrale générale de l'équation elle-même. Mais, pour les équations à points critiques fixes du second ordre que l'on a formées jusqu'ici, la réciproque est vraie. Nous avons l'exemple d'équations du troisième ordre dont la simplifiée $y''' = 0$ a son intégrale générale rationnelle, et dont l'intégrale générale a une coupure essentielle mobile.

Les fonctions X, Y, Z ont permis à HALPHEN d'intégrer différents systèmes d'équations jouissant d'une propriété d'invariance analogue à celle de l'équation XII. Le plus simple avait été indiqué par M. DARBOUX:

$$y'_2 + y'_3 = y_2 y_3,\ y'_3 + y'_1 = y_3 y_1,\ y'_1 + y'_2 = y_1 y_2.$$

L'équation III est l'équation transformée de ce système en $y_1 + y_2 + y_3$.[1] Les équations transformées en y_1 ou $y_1 + y_2$ et leurs simplifiées donnent lieu à la même remarque.

[1] HALPHEN a donné la représentation d'un système particulier d'intégrales y_1, y_2, y_3 au moyen de séries de la théorie des fonctions elliptiques (*Comptes Rendus*, 13 juin 1881): on en déduit un développement à loi de récurrence simple qui représente une intégrale de l'équation III.

Signalons une équation formée[1] autrefois par Jacobi et qui offre une particularité analogue:

$$y^2(yy''' + 3y'y'')^2 = y''^2(16y^3y'' - \pi^2). \tag{30}$$

La simplifiée de cette équation, obtenue en supprimant $-\pi^2$, a comme intégrale générale $y = (Ax + B)e^{\frac{Cx+D}{Ax+B}}$, A, B, C, D désignant quatre constantes arbitraires: cette intégrale générale admet donc le point essentiel isolé $x = -\frac{B}{A}$. L'intégrale générale de l'équation (30) a au contraire une coupure essentielle mobile. Des intégrales particulières sont les expressions $\frac{\pi}{2K}$, $\frac{\pi}{2kK}$, $\frac{\pi}{2k'K}$, suivant les notations de Jacobi, considérées comme fonctions du rapport des périodes de l'intégrale elliptique. La première fonction, par exemple, est définie par la série

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2e^{i\pi x} + 2e^{4i\pi x} + 2e^{9i\pi x} + \cdots,$$

et définie seulement dans la région du plan où cette série converge, c'est-à-dire au-dessus de l'axe réel, qui est pour la fonction une coupure essentielle. D'ailleurs d'une intégrale particulière $y = f(x)$, on déduit l'intégrale générale $y = \frac{Cx+D}{\sqrt{AD-BC}} f\left(\frac{Ax+B}{Cx+D}\right)$: elle admet comme coupure la circonférence où la droite définie par l'équation

$$\text{partie imaginaire de } \frac{Ax+B}{Cx+D} = 0.$$

Enfin l'exemple de ces diverses équations montre que la théorie des groupes automorphes ne permet pas seulement d'intégrer les équations différentielles de la forme classique que vérifient les fonctions fuchsiennes et kleinéennes: elle est utile encore à l'intégration d'autres équations du troisième ordre, de forme toute différente. Il serait d'ailleurs intéressant de rechercher a priori des fonctions $f(x)$ qui, par les substitutions $\left(x, \frac{\alpha_i x + \beta_i}{\gamma_i x + \delta_i}\right)$ d'un groupe automorphe, soient altérées de façon simple et deviennent $\varphi[f(x), \gamma_i x + \delta_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i]$; les fonctions $f(x)$ pour lesquelles la fonction φ est homogène de degré zéro en $\gamma_i x + \delta_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$, vérifient des équations différentielles du troisième ordre, transcendantes en général.

14. La solution du problème que nous avons posé dans ce chapitre présente aux n°s 10 et 11 trois lacunes. D'autre part je n'ai pu décider si les équations (18) et (20) ont leur intégrale générale uniforme. Avant d'insister sur la difficulté que présente la solution de cette question, il est utile de faire quelques remarques au sujet des équations réduites que nous avons intégrées.

[1] *Journal de Crelle*, t. 36.

D'après la manière dont elle a été obtenue, l'équation réduite

$$y''' = a\,y^{\lambda}\,y'' + b\,y^{\lambda-1}\,y'^{2} + c\,y^{2\lambda}\,y' + d\,y^{3\lambda+1} \tag{17}$$

admet le groupe de transformations à deux paramètres x_0 et α $\left(x, y;\ x_0 + \alpha^{\lambda} x, \frac{y}{\alpha}\right)$; l'intégration de cette équation doit donc se ramener à celle d'une équation du premier ordre, suivie de deux quadratures. En effet la fonction u ne change pas par ce groupe de transformations, la fonction v définie par l'équation $\frac{dy}{y} = uv\,du$ ne change pas non plus, et ces deux fonctions sont liées par l'équation différentielle

$$\frac{dv}{du} = [(\lambda+1)(2\lambda+1)u^3 - [(\lambda+1)a+b]u^2 - cu - d]v^3 + [(4\lambda+3)u - a]v^2. \tag{31}$$

Inversement, nous avons intégré directement onze équations réduites; nous déduisons de cette intégration l'intégration des équations du premier ordre correspondantes: u et v sont exprimés en fonction de la variable $x_0 + \alpha^{\lambda} x$ et d'une constante d'intégration. u^2 et v dans le cas de l'équation XIII, u et v dans les dix autres cas sont des fonctions uniformes de x, et de la constante d'intégration si elle est convenablement choisie: dans les onze cas, la relation établie entre v et u, ou entre v et u^2, par l'équation différentielle (31) est ainsi uniformisée. Les cas d'intégrabilité de l'équation

$$y' = P\,y^3 + Q\,y^2 + R\,y + S, \tag{32}$$

P, Q, R, S désignant des fonctions de x, sont assez particuliers:[1] il peut être intéressant d'en ajouter quelques-uns.

L'équation transformée en u^2 de l'équation XIII, en u de chacune des dix autres équations réduites que nous avons intégrées, est une équation du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme, et de la forme *simplifiée*, puisqu'elle ne change pas si l'on change x en $x_0 + \alpha^{\lambda} x$. L'étude des intégrales d'une équation du second ordre et du premier degré au voisinage d'une valeur singulière se ramène ainsi au problème de la formation des simplifiées, et par suite au problème de Briot et Bouquet. Mais ici l'équation simplifiée est le résultat de l'élimination de y^{λ} entre les deux équations

[1] Voir Appell, *Journal de Liouville*, 1889; Darboux, *Théorie des Surfaces*, t. IV, note VI. Dans le 62e cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*, M. R. Liouville intègre par une quadrature l'équation renfermant les mêmes termes que l'équation (31), sous deux conditions entre les six coefficients: parmi les quatorze équations réduites de la forme (17) que nous avons à considérer, les équations VIII et XIII sont les seules dont les équations transformées satisfont aux deux conditions de M. Liouville.

$$(33)\quad \begin{cases} \dfrac{u''}{y^{2\lambda}} + [3(\lambda+1)u - a]\dfrac{u'}{y^{\lambda}} + (\lambda+1)(2\lambda+1)u^3 - [(\lambda+1)a+b]u^2 - cu - d = 0, \\ \dfrac{u'''}{y^{2\lambda}} + \dfrac{(\lambda+3)uu'' + 3(\lambda+1)u'^2 - au'}{y^{\lambda}} + 3(\lambda+1)^2u^2u' - [(\lambda+2)a+2b]uu' - cu' = 0. \end{cases}$$

Rendue rationnelle en u''', u'', u', elle est du second degré en u''': elle n'est donc pas de celles que nous avons formées précédemment. Ici encore, de l'intégrale générale de chacune des équations réduites, nous déduisons l'intégrale générale de l'équation transformée en u, et nous remarquons d'abord que les fonctions classiques qui permettent d'intégrer les équations simplifiées du troisième ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est uniforme, ne suffisent pas à intégrer celles du second degré. Pour intégrer celles-ci, il faut ajouter aux fonctions que nous avons énumérées des fonctions thétafuchsiennes et même des fonctions plus générales, ainsi que la transcendante définie par l'équation de Riccati $y' = y^2 + x$, ou celle définie par l'équation linéaire $t'' + xt = 0$.

M. Painlevé a indiqué un procédé de réduction[1] des équations simplifiées du troisième ordre dont l'intégrale générale $u(x)$ est uniforme, de degré quelconque: si l'on pose $\dfrac{d}{du}\log\dfrac{dx}{du} = w$, la fonction $w(u)$ satisfait à une équation différentielle du premier ordre, et les intégrales de cette équation ne peuvent avoir de points critiques mobiles, puisque l'intégrale générale $u(x)$ est uniforme, où elles aient une valeur finie.[2] Si l'équation simplifiée considérée est du second degré en u''', l'équation du premier ordre est elle-même du second degré en $\dfrac{dw}{du}$; dans le cas où la valeur $w = \infty$ n'est pas racine impaire du discriminant, et l'on peut évidemment considérer ce cas comme le cas général, cette équation n'a pas de points critiques mobiles: et l'on sait ramener l'intégration d'une équation à points critiques fixes du premier ordre à une quadrature ou à l'intégration d'une équation de Riccati. Mais, dans l'équation du premier ordre obtenue à partir de l'une des équations simplifiées que nous considérons ici, la valeur $w = \infty$ est racine impaire du discriminant; la transformation qui chasse le radical conduit, non à une équation de Riccati, mais à une équation de la forme (32), par exemple à l'équation (31). Les équations simplifiées, transformées des équations réduites de la forme (17) dont l'intégrale générale est uniforme, échappent donc au procédé de réduction indiqué par M. Painlevé.

L'intégration de l'équation (32) se ramène néanmoins à une quadrature ou à l'intégration d'une équation de Riccati, dans le cas où ses intégrales acquièrent

[1] *Acta mathematica*, 1902, p. 74, 78.

[2] Cf. Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 70.

un même nombre fini de déterminations autour des points critiques mobiles, sauf un nombre fini ou un ensemble dénombrable d'entre elles.[1] Tel est le cas des équations (31) transformées des équations réduites VIII et XIII: les intégrales de ces équations ont respectivement quatre et trois branches, sauf trois d'entre elles, et sont définies par les équations

$$\frac{v\left[v(u^2-1)+\frac{2}{3}\right]^3}{\left[v(u^2-1)+\frac{1}{2}\right]^4}=C,\qquad \frac{v\left[v(u^2-4)+1\right]^2}{\left[v(u^2-4)+\frac{2}{3}\right]^3}=C.$$

Parmi les équations (31) correspondant aux équations réduites que nous avons intégrées, il en est au contraire dont l'intégrale générale acquiert autour des points critiques mobiles une infinité de déterminations. Soient par exemple l'équation réduite II, $y''=2yy''+2y'^2$, et l'équation correspondante

$$\frac{dv}{du}=(6u^3-6u^2)v^3+(7u-2)v^2. \tag{34}$$

On peut démontrer que l'intégrale générale de l'équation (34) acquiert une infinité de déterminations autour des points critiques mobiles au moyen des expressions de u et v en fonction du paramètre x que nous possédons implicitement: nous allons donner une démonstration fondée sur la méthode de continuité. Il est clair que le caractère de l'intégrale n'est pas altéré au point de vue que nous considérons, si l'on effectue dans l'équation la substitution $\left[u,\ v;\ \varepsilon u,\ \frac{1}{\varepsilon(t+2u)}\right]$, quel que soit le nombre ε différent de zéro. Or, pour les petites valeurs de ε, l'intégrale générale de l'équation transformée

$$\frac{dt}{du}=-7\varepsilon u+\frac{6\varepsilon u^2(1-\varepsilon u)}{t+2u} \tag{34 bis}$$

peut être développée suivant les puissances de ε:

$$t=C+\varepsilon\left(-\frac{7u^2}{2}+6\int\frac{u^2\,du}{2u+C}\right)+\varepsilon^2(\cdots).$$

[1] Le cas où toutes les intégrales de l'équation (32) sont algébriques peut soulever des difficultés analogues à celles que nous signalons plus loin. Remarquons que, dans ce cas, toute intégrale générale $u(x)$ de l'équation simplifiée correspondante est fonction rationnelle de x, ou de $e^{\alpha x}$, ou fonction elliptique de x, ou de $a\log x+\beta$, a et β désignant des constantes. Tels sont en effet les résultats obtenus par M. Picard dans la détermination des équations de la forme $u''=u'^2a(u)$, $a(u)$ désignant une fonction algébrique de u, dont l'intégrale générale est uniforme, avec cette restriction que la fonction $e^{\int a(u)\,du}$ n'ait pas de points singuliers transcendants (*Traité d'Analyse*, t. III, p. 66). M. Painlevé a établi que les résultats de M. Picard sont encore complets si l'on lève cette restriction.

Si ε est assez petit, ce développement converge dans le plan des u sur la circonférence de centre $\frac{-C}{2}$ et de rayon $\left|\frac{C}{4}\right|$ par exemple, et quand le point u décrit cette circonférence autant de fois qu'on veut. Chaque fois l'intégrale qui figure dans le coefficient de ε est augmentée d'une même quantité. D'ailleurs les points singuliers fixes de l'équation (34 bis) sont $u = 0$, $u = \frac{1}{t}$, $u = \infty$: l'intégrale générale acquiert donc une infinité de déterminations autour des points critiques mobiles. Les déterminations correspondantes de l'intégrale générale de l'équation (34) ont des points critiques dans le cercle de centre $\frac{-C\varepsilon}{2}$ et de rayon $\left|\frac{C\varepsilon}{4}\right|$: ces points critiques mobiles admettent comme point-limite le point singulier fixe $u = 0$.

Assurément l'intégration de l'équation (34) se ramène à celle de l'équation de Riccati $y' = y^2 + x$, nous avons ramené aussi l'intégration de l'équation XII à celle d'une équation linéaire du second ordre; et de même toutes les équations réduites que nous avons intégrées, et par suite les équations (31) correspondantes, sont *réductibles* au sens le plus général du mot.[1] Il est possible encore que toute équation de la forme (32), transformée d'une équation simplifiée du troisième ordre et du second degré dont l'intégrale générale est uniforme, soit réductible, et s'intègre par les fonctions classiques, ou se ramène à une équation linéaire. Mais quand l'intégrale générale acquiert une infinité de déterminations autour des points critiques mobiles, l'intégration directe d'une telle équation est aléatoire, et il peut n'être plus avantageux de la considérer. En effet, pour en obtenir la réduction, on est amené[2] à rechercher une intégrale rationnelle d'une équation aux dérivées partielles: c'est là un problème pour la solution duquel on ne possède aucune méthode générale, aboutissant nécessairement après un nombre limité d'opérations.

15. Enfin les équations transformées en u de certaines équations réduites nous donnent l'exemple d'équations dont l'intégrale générale est uniforme, et dont l'intégrale singulière a des points critiques mobiles. Rappelons les principes de la théorie des intégrales singulières.

Considérons une équation du premier ordre

$$P(y', y, x) = 0, \tag{35}$$

P désignant un polynome en y' et y, à coefficients analytiques en x; supposons, pour fixer les idées, que ce polynome soit du second degré en y', indécomposable

[1] Voir Drach, *Thèse*, Paris, 1898; Painlevé, Conférence faite au Congrès d'Heidelberg, 1904.
[2] Cf. n° 16.

pour des valeurs arbitraires de y', y et x, et qu'il ne renferme en facteur aucun polynome en y. Soit $R(y, x)$ son discriminant: le polynome en y $R(y, x)$ peut se décomposer en plusieurs facteurs. L'équation obtenue en égalant à zéro un facteur $K(y, x)$ indécomposable et d'ordre impair, représente ou bien un lieu géométrique de points de rebroussement des courbes intégrales, ou bien une enveloppe des courbes intégrales: dans le second cas, la fonction $y(x)$, définie par l'équation $K(y, x) = 0$, est une intégrale *singulière* de l'équation (35). Il est clair que, si l'équation (35) n'a pas de points critiques mobiles, les facteurs de la seconde sorte peuvent seuls exister.

Considérons une équation différentielle d'ordre supérieur, soit

$$P(y'', y', y, x) = 0 : \tag{36}$$

P désigne un polynome en y'', y', y à coefficients analytiques en x, du second degré en y'', indécomposable pour des valeurs arbitraires de y'', y', y, x, et ne renferme en facteur aucun polynome en y' et y. Soit $K(y', y, x)$ un facteur indécomposable et d'ordre impair du discriminant: si l'équation (36) a ses points critiques fixes, toute intégrale non singulière de l'équation $K(y', y, x) = 0$ est nécessairement intégrale de l'équation (36). Elle en est une intégrale *singulière*. Ainsi nous avons rencontré l'équation

$$y''^2 + 4y'^3 + 2(xy' - y) = 0 \tag{B, I}$$

dont l'intégrale générale est uniforme. L'équation du premier ordre $y = xy' + 2y'^3$ admet l'intégrale générale $y = Cx + 2C^3$, qui est intégrale de l'équation (B, I): d'ailleurs l'intégrale singulière de l'équation du premier ordre, définie par l'équation $y^2 + \frac{2}{27}x^3 = 0$, n'est pas intégrale de l'équation du second ordre. Chacune des équations (B) et (C) du n° 9 fournit un exemple analogue.

Mais, au voisinage d'un point $x_0, y_0, y'_0, \ldots$ d'une intégrale singulière, le coefficient différentiel n'est pas fonction holomorphe de $x - x_0, y - y_0, y' - y'_0, \ldots$ On ne peut pas obtenir, à l'aide de l'équation aux variations, des intégrales infiniment voisines de cette intégrale singulière dans un domaine où elle est holomorphe, en choisissant arbitrairement et d'une manière indépendante les valeurs $y, y', \ldots$ de l'intégrale et de ses dérivées au point x_0 de ce domaine, à l'intérieur de cercles suffisamment petits de centres $y_0, y'_0, \ldots$ Toute intégrale infiniment voisine d'une intégrale singulière est une intégrale singulière, non une intégrale générale. Il résulte que l'intégrale singulière peut avoir des propriétés différentes de celles de l'intégrale générale. En particulier il y a des équations dont l'intégrale générale est uniforme, et dont l'intégrale singulière a des points critiques; telle est l'équation de Clairaut que nous venons de considérer.

Parmi les équations d'ordre supérieur au premier, il existe de même des équations dont l'intégrale générale est uniforme et dont l'intégrale singulière a des points critiques fixes. M. Appell en a rencontré des exemples dans une théorie toute différente.[1] L'équation

$$3x^2y''^2 - 2(3xy' + y)y'' + 4y'^2 = 0$$

a comme intégrale générale $y = A^2x^2 + ABx + B^2$, et comme intégrales singulières $y = Cx^{\frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}}$.

Il existe d'autre part des équations dont l'intégrale générale est uniforme ou a ses points critiques fixes, et dont l'intégrale singulière a des points critiques mobiles. Ainsi l'équation

$$y'' = -\left(y^3 + \frac{\partial P_2}{\partial y}\right)y' - \frac{\partial P_2}{\partial x} + yy'\sqrt{4y'^2 + y^4 + 4P_2},$$

P_2 désignant un polynome du second degré en y à coefficients analytiques en x; admet l'intégrale première

$$\sqrt{4y'^2 + y^4 + 4P_2} = y^2 + C, \text{ d'où } 4y' + 4P_2 = 2Cy^2 + C^2.$$

Les points critiques de l'intégrale générale ne peuvent être que des points singuliers des coefficients du polynome P_2, ou le point $x = \infty$: ils sont fixes. Mais l'intégrale singulière a évidemment des points critiques algébriques mobiles.

L'intégrale singulière d'une équation du troisième ordre, dont l'intégrale générale est uniforme, ou a ses points critiques fixes, peut avoir des points critiques non algébriques mobiles. Ainsi l'équation du second ordre

$$y'' = 2yy' + 2iy'\sqrt{y'^2 - 1}$$

a son intégrale générale entière: $y = e^{2iAx+B} + \frac{A^2 - 1}{4A}$: l'intégrale singulière $y = \operatorname{tg}(x + C)$ a des pôles mobiles. Si dans cette équation l'on pose $y = z'$, on obtient une équation du troisième ordre en z dont l'intégrale générale est entière, et dont l'intégrale singulière a des points critiques logarithmiques mobiles.

Considérons encore l'équation transformée en $u = \frac{y'}{y^{\lambda+1}}$ d'une équation réduite de la forme (17). Un calcul facile montre que le discriminant de cette équation transformée renferme le facteur simple

$$4u'' - \frac{u'^2[3(\lambda + 1)u - a]^2}{(\lambda + 1)(2\lambda + 1)u^3 - [(\lambda + 1)a + b]u^2 - cu - d}$$

[1] *Journal de Crelle*, 1889.

et qu'elle admet les intégrales de l'équation du second ordre obtenue en annulant ce facteur comme intégrales singulières, quelle que soit la nature, uniforme ou multiforme, de l'intégrale générale. En particulier l'équation en u transformée de l'équation réduite

$$y''' = 2yy'' + 2y'^2, \text{ d'où } y' = y^2 + Ax + B,$$

a, comme cette équation réduite, son intégrale générale méromorphe. Elle admet comme intégrales singulières les intégrales de l'équation

$$\frac{u''}{u'^2} = \frac{(3u-1)^2}{6u^2(u-1)}.$$

La fraction du second membre ayant un pôle double, ces intégrales ne sont pas uniformes, d'après une proposition établie[1] par M. Painlevé. Reprenons le calcul de M. Painlevé pour en préciser la conclusion. Remplaçons l'équation du second ordre par le système

$$u' = v, \quad v' = \frac{v^2(3u-1)^2}{6u^2(u-1)}.$$

Faisons dans ce système la substitution $(u, v; \varepsilon u, \varepsilon^2 v)$, et développons l'intégrale générale du système transformé

$$u' = \varepsilon v, \quad v' = \frac{v^2}{6u^2} + \varepsilon(\cdots)$$

suivant les puissances du paramètre ε :

$$u = u_0 + \varepsilon \cdot 6u_0^2 \log(x+C) + \varepsilon^2(\cdots), \quad v = \frac{6u_0^2}{x+C} + \varepsilon(\cdots),$$

u_0 et C désignant des constantes arbitraires. Si ε est assez petit, ce développement converge dans le plan des x sur une circonférence de centre mobile, $x = -C$, dont le rayon, le centre une fois fixé, peut être choisi aussi petit qu'on veut, et qui peut être décrite un nombre quelconque de fois. L'intégrale générale acquiert ainsi une infinité de déterminations formant une suite unilinéaire; le centre de la circonférence est un point critique tout à fait analogue à un point critique logarithmique.[2]

Signalons enfin le cas de l'équation (30): l'intégrale générale de cette équation possède une coupure circulaire mobile, et est uniforme dans la région du

[1] *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. XXVIII, p. 274.

[2] Voir Boutroux, *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre* p. 95 et suiv.

plan située à l'intérieur ou à l'extérieur de cette coupure; au contraire l'intégrale singulière, définie par l'équation $Ay^2 = (Ax + B)^2 + \frac{A^2}{16}$, est algébrique.

16. D'après la manière même dont a été obtenue l'équation

$$y''' = y^\lambda y'' - (\lambda + 1) y^{\lambda-1} y'^2, \qquad \lambda \text{ entier positif}, \tag{18}$$

ses intégrales ne possèdent ni points critiques algébriques, ni pôles. On a remarqué souvent que les équations de la forme $y'' = P(y', y, x)$, P désignant un polynome en y' et y à coefficients analytiques en x, dont les intégrales n'ont ni points critiques algébriques, ni pôles, sont linéaires: dans l'étude des équations du second ordre et du premier degré, la difficulté que nous rencontrons ici, ne se présentait pas.

L'étude de l'équation (18) peut être remplacée par celle du système

$$\frac{dv}{du} = (\lambda + 1)(2\lambda + 1) u^3 v^3 + [(4\lambda + 3) u - 1] v^2, \tag{37}$$

$$\frac{dx}{du} = v e^{-\lambda \int u v \, du}.$$

Si l'intégrale générale $y(x)$ est uniforme, il en est de même de la fonction u, définie par l'équation $y' = u y^{\lambda+1}$. Inversement, si la fonction $u(x)$, définie par le système précédent, est uniforme, les deux équations (33) font correspondre à cette fonction une fonction y^λ uniforme.

L'intégrale générale de l'équation du premier ordre (37) acquiert autour des points critiques mobiles une infinité de déterminations: comme pour l'équation (34), on peut démontrer ce résultat par la méthode de continuité. Cette méthode permet aussi d'établir que l'équation (37) est irréductible au sens le plus général du terme: $R(v, u)$ désignant le second membre de l'équation (37), il suffit de montrer que l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial I}{\partial u} + R \frac{\partial I}{\partial v} + 2 \frac{\partial R}{\partial v} I + \frac{\partial^3 R}{\partial v^3} = 0$$

n'admet pas d'intégrale I rationnelle en v et u. L'application des théories exactes à l'équation (37) ne donne donc que des résultats négatifs.

Il sera intéressant d'élucider le cas de l'équation (18), et de savoir si l'application de la première méthode de M. Painlevé, c'est-à-dire l'introduction dans l'équation d'un paramètre convenablement choisi, suffit à montrer que

l'intégrale générale n'est pas uniforme, ou s'il faut au contraire, pour mettre en évidence des points critiques ou des lignes critiques d'une nature particulière, avoir recours à un artifice plus subtil de la théorie des fonctions.[1]

Équations à points critiques fixes de la forme $y''' = R(y'', y', y, x)$, où R désigne une fraction rationnelle en y'', y', y à coefficients analytiques en x.

17. On sait depuis longtemps que, si l'équation $y' = R(y, x)$, R désignant une fraction rationnelle en y à coefficients analytiques en x, a ses points critiques fixes, la fraction R est un polynome du second degré en y. De même, si une équation d'ordre n, rationnelle en $y^{(n)}$ et $y^{(n-1)}$, algébrique ou analytique en $y^{(n-2)}, \dots y', y, x$, a ses points critiques fixes, les degrés en $y^{(n-1)}$ des coefficients des différentes puissances de $y^{(n)}$ sont limités. Par exemple, dans l'équation

$$y''^2 + A(y', y, x)\, y'' + B(y', y, x) = 0, \tag{38}$$

les fonctions A, B rationnelles en y', sont des polynomes de degrés 2 et 4.

La méthode introduite par M. Painlevé pour former des conditions nécessaires pour qu'une équation ait ses points critiques fixes, a eu pour résultat important de limiter le degré en y de l'équation $y'' = R(y', y, x)$, R désignant un polynome du second degré en y', à coefficients rationnels ou algébriques en y, analytiques en x: les pôles, ou les points de ramification $y = a(x)$ de la fraction R sont d'ordre 1, et par suite son degré d'infinitude pour $y = \infty$ est 3 au plus. La même méthode limite sans difficulté nouvelle[2] le degré en y d'une équation non résolue en y'' et de degré donné en y'': par exemple, si les fonctions A, B de l'équation (38) sont rationnelles en y, et si l'on suppose que l'intégrale générale de cette équation ait ses points critiques fixes, l'intégrale singulière pouvant avoir des points critiques mobiles, les pôles $y = a(x)$ des fractions A et B sont d'ordres 5 et 10 au plus. Dans une équation algébrique en $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$,

[1] Dans les *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre*, M. Boutroux étudie les intégrales des équations de la forme (32), quand ces intégrales acquièrent une infinité de déterminations autour des points critiques mobiles. Sur des exemples simples, et par application systématique de la méthode de continuité, M. Boutroux étudie la fonction multiforme en elle-même, les points critiques, les permutations de ses déterminations. Les recherches de M. Boutroux apportent une contribution utile à l'étude de l'équation (37), et par suite à celle de l'équation (18).

[2] Toutefois on utilise une proposition d'une nature un peu différente: m et n désignant deux nombres entiers, si les fonctions y^m, $(y-1)^n$ sont analytiques et uniformes dans un certain domaine, la fonction y est elle-même uniforme dans ce domaine.

le degré des coefficients en $y^{(n-2)}$ est limité de même, en fonction du degré en $y^{(n)}$ de la relation algébrique établie par l'équation entre $y^{(n)}$ et $y^{(n-1)}$.[1]

Admettons un instant qu'il soit démontré que l'équation (18) n'a pas son intégrale générale uniforme. Ce résultat achève de limiter le degré en y de l'équation à points critiques fixes

$$y''' = P(y'', y', y, x), \tag{2}$$

P désignant un polynome en y'', y', y à coefficients analytiques en x. Il montre que ce n'est pas une hypothèse arbitraire de supposer que la fonction P est un polynome en y, plutôt qu'une fonction transcendante; par la nature des choses, on doit attendre de cette hypothèse des simplifications: de même qu'il est plus simple d'étudier les équations du premier ordre algébriques en y' et y, que celles qui établissent entre y' et y une relation transcendante.

C'est d'ailleurs dans le cas de l'équation (2) que le problème de la formation des équations réduites au voisinage d'une valeur singulière est le plus difficile. Dans tout autre cas, ce problème n'offre pas de difficulté d'analyse nouvelle, et offre des difficultés arithmétiques moindres. Il est à prévoir que d'une façon générale le degré en y des coefficients de l'équation (8) est ainsi limité: tout pôle $y = a(x)$ de la fonction $B(y', y, x)$ (pour y' arbitraire) est simple, et $y = a(x_0)$ est pôle du coefficient $b(y, x_0)$ de l'équation simplifiée; tout pôle $y = a(x)$ de $C(y', y, x)$ est double au plus, si $y = a(x_0)$ est pôle double de $c(y, x_0)$, simple si $y = a(x_0)$ est pôle simple de $c(y, x_0)$; les fonctions $a_i(y, x)$ sont des polynomes du second degré en y.

J'ai démontré la proposition suivante: soit $y = a(x)$ un pôle des fonctions a_i, B, C de l'équation (8) pour y' arbitraire; si $y = a(x_0)$ n'est pas pôle des coefficients $b(y, x_0)$, $c(y, x_0)$ de la simplifiée, l'intégrale générale a des points critiques mobiles autour desquels elle acquiert une infinité de déterminations.

Remarquons que la proposition analogue n'est pas exacte pour les équations du second ordre: l'intégrale de l'équation $y'' = \frac{1}{y^3}$, définie par la relation $Ay^2 = (Ax + B)^2 + 1$, n'a que deux déterminations.

[1] Les nombres 5 et 10 sont en désaccord avec un nombre donné par M. Painlevé (*Acta mathematica*, 1902, p. 73), et qui est exact si l'on considère des équations dont l'intégrale générale et l'intégrale singulière ont leurs points critiques fixes. Nous adoptons ici une hypothèse plus rationnelle: les intégrales singulières de deux équations transformées algébriques de même ordre ne se correspondent pas par la transformation; il se peut que l'une des équations ait une intégrale singulière, et que l'autre n'en ait pas.

Si l'on suppose la valeur $y = \infty$ régulière pour la simplifiée, la proposition énoncée limite le degré d'infinitude pour $y = \infty$ des différentes fractions qui figurent dans l'équation (8); en particulier, le degré d'infinitude des fractions a_i est 2 au plus.

Une autre conséquence est la suivante. Supposons que les deux entiers N_1, N_2 relatifs dans la simplifiée à un pôle $y = a(x)$ de l'équation complète soient N et $(n+1)N$, et que N soit positif. Pour étudier les intégrales au voisinage de la valeur $a(x)$, faisons la transformation $y = a(x) + z^N$: la valeur $z = 0$ est régulière pour la simplifiée de l'équation transformée. Si $z = 0$ était un pôle de cette équation transformée, l'intégrale générale acquerrait une infinité de déterminations autour des points critiques mobiles, et la fonction z^N ne saurait avoir ses points critiques fixes. En particulier, non seulement $y = a(x)$ n'est pas un pôle des fractions $a_i(y, x)$, mais encore $y = a(x)$ est une intégrale de chacune des équations du premier ordre $y' + a_i(y, x) = 0$.

18. Formons comme application les équations à points critiques fixes dont la simplifiée a comme intégrale une fonction fuchsienne ou kleinéenne. Soit

$$y''' = \frac{3}{2}\frac{y''^2}{y'} + y'^3 F(y)$$

cette simplifiée. Supposons la valeur $y = \infty$ régulière: la fonction $F(y)$ a au moins trois pôles. Dans l'équation complète figurent des dénominations, au nombre de trois au plus, de la forme $y' + hy^2 + ky + l$, h, k, l désignant des fonctions analytiques de x, et chaque valeur singulière $y = a(x)$ doit vérifier chacune des conditions

$$a' + ha^2 + ka + l = 0.$$

A la vérité ces résultats ne dépendent de la proposition précédente qu'en ce qui concerne les pôles auxquels correspond un entier N fini; mais l'extension en est facile aux pôles auxquels correspond un nombre infini. Effectuons sur la fonction y une transformation homographique, de façon que trois des valeurs singulières $a(x)$ deviennent des constantes: h, k, l seront nuls, les autres valeurs singulières seront aussi des constantes, nous pourrons réunir les dénominateurs en y' en un seul, et l'équation prendra la forme

$$y''' = \frac{3}{2}\frac{y''^2}{y'} + y'^3 F(y) + y'^2 \Sigma \frac{B}{y - a} + Cy'' + Dy' + \frac{P(y)}{y'}.$$

Les fonctions B, C, D satifont aux conditions:

$$2C + \Sigma B = 0,$$

$$\text{pour chaque pôle, } B + \left(1 - \frac{1}{N}\right) C = 0.$$

$P(y)$ est un polynome du quatrième degré en y à coefficients analytiques en x, qui admet comme racines simples les valeurs $y = a$ auxquelles correspond un entier N égal à 2, et comme racines doubles les autres.

Si la fonction $F(y)$ a au moins quatre pôles, et si l'on écarte le cas où elle en a quatre et où les quatre entiers correspondants sont égaux à 2, le polynome $P(y)$ a au moins cinq racines, il est donc identiquement nul. Si C était différent de zéro, les entiers N, qui sont plus grands que 1, devraient satisfaire à l'équation arithmétique $\sum \left(1 - \frac{1}{N}\right) = 2$, ce qui est impossible. L'équation complète se réduit donc à

$$y'' = \frac{3}{2}\frac{y''^2}{y'} + y'^3 F(y) + D y'.$$

Si la fonction $F(y)$ a trois pôles, on sait que les entiers correspondants sont liés par l'inégalité $\sum \frac{1}{N} < 1$, donc C est nul: un seul des entiers peut être égal à 2, donc P est nul. Nous sommes ramenés à la même forme.

L'équation se réduit à son équation simplifiée par le changement de variable $\varphi(x) = X$ déterminé par l'équation

$$\varphi''' = \frac{3}{2}\frac{\varphi''^2}{\varphi'} + D\varphi',$$

ou par le système

$$\varphi' = \frac{1}{u^2}, \quad u'' + \frac{D}{2} u = 0.$$

L'intégrale de l'une des équations considérées se déduit donc de l'intégrale de la simplifiée de cette équation par l'intégration d'une équation linéaire suivie d'une quadrature.

Il est tout aussi simple de former les équations à points critiques fixes admettant une simplifiée dont l'intégrale générale a des points essentiels isolés mobiles. Ces équations se ramènent au système formé par l'une des cinq dernières quadratures (12) et par une équation du second ordre en z' de la forme

$$z'' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{z'^2}{z} + \frac{n-1}{n z^2} z'^3 + A z'^2 + B z z' + \frac{H}{z};$$

ou bien au système formé par la quadrature $z = \int \frac{dy}{y}$, et par une équation du

second ordre en z', qui peut avoir un, deux ou trois pôles en z'. Dans tous les cas, l'équation du second ordre en z' a ses points critiques fixes, et par suite est une équation connue. Réciproquement d'ailleurs, si dans le premier système les intégrales de l'équation en z' n'ont comme points singuliers mobiles que des pôles dont les résidus sont les quotients par $2\pi i$ de périodes de l'intégrale elliptique correspondante, l'équation transformée en y a ses points critiques fixes; son intégrale admet les pôles de z' comme points essentiels isolés. Si dans le second système les intégrales de l'équation en z' n'ont comme points singuliers mobiles que des pôles dont les résidus sont des nombres entiers, l'équation transformée en y a ses points critiques fixes; son intégrale admet comme points essentiels isolés les pôles multiples de z'.

J'ai donné précédemment des exemples d'équations à points critiques fixes dont l'intégrale générale a une coupure essentielle mobile, tandis que l'intégrale générale de la simplifiée a ses singularités non polaires fixes, ou possède un point essentiel isolé mobile. Je n'ai pas formé d'équation dont l'intégrale générale possède un point essentiel isolé mobile sans que l'intégrale générale de la simplifiée présente la même singularité. Il est possible qu'il n'en existe pas. D'une façon générale, les propriétés et les singularités d'une équation à points critiques fixes «se reflètent, en quelque sorte, dans celles de la simplifiée en s'affaiblissant».[1] Mais une différence apparaît ici entre les équations dont l'intégrale générale possède un point essentiel isolé mobile, et celles dont l'intégrale possède une coupure mobile.[2]

19. Considérons enfin la simplifiée

$$y''' = \frac{PQ'' - QP''}{PQ' - QP'}\, y'\, y'' - \frac{P'Q'' - Q'P''}{PQ' - QP'}\, y'^2. \tag{14}$$

P et Q désignent deux polynomes du quatrième degré en y à coefficients constants, P', Q', P'', Q'' leurs dérivées par rapport à y, et les racines du polynome $PQ' - QP'$ sont supposées simples et finies. Les équations à points critiques fixes admettant cette équation simplifiée sont nécessairement de la forme

$$\left\{\begin{aligned} y''' = {} & \sum \frac{(y' - a_i')(y'' - a_i'')}{y - a_i} + \sum \frac{A_i (y' - a_i')^3 + B_i (y' - a_i')^2 + C_i (y' - a_i')}{y - a_i} + \\ & + D\, y'' + E\, y' + H (y - a_i) \sum \frac{F_i}{y - a_i}. \end{aligned}\right. \tag{39}$$

[1] Painlevé, *Notice*, p. 75.

[2] Voir dans les *Leçons de Stockholm*, p. 440, quelques points de comparaison entre les fonctions qui possèdent un point essentiel isolé, celles qui possèdent une coupure, et celles qui admettent un ensemble parfait discontinu de points singuliers.

i prend les valeurs $1, 2, 3, 4, 5, 6$, et par suite les fonctions $a_i, A_i, B_i, C_i, D, E, F_i$ sont au nombre de trente-deux. Il est facile d'obtenir des conditions nécessaires pour que l'équation (39) ait ses points critiques fixes. D'une part la valeur $y = \infty$ doit être régulière:

$$\Sigma A_i = 0,\ \Sigma A_i a_i = -6,\ \Sigma A_i a_i^2 = -2\Sigma a_i,$$
$$2D + \Sigma(B_i - 3A_i a'_i) = 0,\ \Sigma F_i = \Sigma F_i a_i = \Sigma F_i a_i^2 = 0:$$

ces conditions remplies, les intégrales de l'équation (39) ont des pôles mobiles, et admettent au voisinage de chacun d'eux un développement de la forme

$$y = \frac{\alpha}{x - x_0} + \beta + \gamma(x - x_0)^2 + \delta(x - x_0)^3 + \cdots,$$

dans lequel les trois coefficients α, β, γ sont arbitraires. Exprimons d'autre part que l'équation (39) admet des intégrales qui prennent en un point arbitraire x_0 la valeur singulière $a_i(x_0)$, et dont le développement au voisinage est holomorphe:

$$y = a_i + \alpha(x - x_0) + \beta(x - x_0)^2 + \gamma(x - x_0)^3 + \cdots, \tag{40}$$

et renferme deux coefficients arbitraires, les coefficients α et γ:

$$2A'_i - \sum \frac{A_i - A_j}{a_i - a_j} = 0 \quad (j \text{ prend, sauf la valeur } i, \text{ les valeurs } 1, 2, 3, 4, 5, 6),$$

$$\left(-5\frac{A_i}{2} - \sum \frac{1}{a_i - a_j}\right) B_i + \sum \left(\frac{A_i}{2} + \frac{1}{a_i - a_j}\right) B_j + A'_i - A_i \sum \frac{a'_i - a'_j}{a_i - a_j} +$$
$$+ 3\sum \frac{A_j(a'_i - a'_j)}{a_i - a_j} - 3\frac{A_i}{2}\sum_{i=1}^{i=6} A_i a'_i = 0,$$

$$\left(-2A_i - \sum \frac{1}{a_i - a_j}\right) C_i + \sum \frac{C_j}{a_i - a_j} - B^2_i + B'_i - B_i \sum \frac{a'_i - a'_j}{a_i - a_j}$$
$$+ \sum 3\frac{A_j(a'_i - a'_j)^2 + 2B_j(a'_i - a'_j)}{a_i - a_j} - B_i D + E + \sum \frac{a''_i - a''_j}{a_i - a_j} = 0,$$

$$-a'''_i - B_i C_i + C'_i + \sum \frac{(a'_i - a'_j)(a''_i - a''_j - C_j)}{a_i - a_j} +$$
$$+ \sum \frac{A_j(a'_i - a'_j)^3 + B_j(a'_i - a'_j)^2 + C_j(a'_i - a'_j)}{a_i - a_j} + D(a''_i - C_i) +$$
$$+ E a'_i + F_i \Pi(a_i - a_j) = 0.$$

2°. Désignons par (S) le système de ces trente et une équations entre les trente-deux fonctions à déterminer, et par (E) une équation de la forme (39) dont les coefficients satisfont au système (S). Nous allons démontrer que réci-

proquement les conditions obtenues sont suffisantes, et que les intégrales de l'équation (E) n'ont, en dehors des points singuliers des coefficients, d'autres points singuliers que des pôles.

Soit l'intégrale $y(x)$ définie par les conditions initiales arbitraires x_0, y_0, y'_0, y''_0: d'une façon précise x_0 est un point régulier pour les déterminations des coefficients que nous considérons, la valeur y_0 est finie et différente des six valeurs $a_i(x_0)$, les valeurs y'_0, y''_0 sont finies. D'après le théorème de Cauchy, l'intégrale $y(x)$ est holomorphe dans un cercle de centre x_0. Prolongeons analytiquement les coefficients, et l'intégrale $y(x)$. Admettons que dans ce prolongement nous arrivions à un point X, où les coefficients soient holomorphes, et où l'intégrale $y(x)$ ne soit pas méromorphe: il suffit de montrer que cette hypothèse est absurde.

Supposons d'abord que sur un chemin λ, de longueur finie, aboutissant en X, et sur lequel les coefficients de l'équation (E) sont holomorphes, l'intégrale $y(x)$ soit méromorphe, sauf en X, et supposons en outre que, quand x tend vers X sur le chemin λ, l'indétermination de $y(x)$ ne soit pas complète, mais qu'une aire du plan du point y ne fasse pas partie du domaine d'indétermination. Comme une transformation homographique effectuée sur y ne change pas la forme de l'équation (E), nous pouvons aussi bien supposer que sur le chemin λ $y(x)$ finisse par être borné.

Selon le principe de la méthode que M. Painlevé a appliquée aux équations (A), considérons des expressions rationnelles en y'', y', y, analytiques en x, qui prennent en un point arbitraire x des valeurs arbitraires quand on y remplace $y(x)$ par une intégrale ayant au point x l'un des valeurs $a_i(x)$ et admettant au voisinage un développement de la forme (40). Ce sont les expressions

$$(41)\qquad u=\frac{Py''-\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial y}y'^2+Ry'+S}{H(y-a_i)},\quad v=\frac{Qy''-\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial y}y'^2+Ty'+W}{H(y-a_i)},$$

où P et Q sont deux polynomes du quatrième degré en y dont le jacobien est $H(y-a_i)$, et R, S, T, W des polynomes du cinquième degré en y, dont les coefficients sont déterminés par les conditions indiquées; d'ailleurs les coefficients des six polynomes P, Q, R, S, T, W sont holomorphes en tout point où les coefficients de l'équation (E) sont holomorphes.

S'il existe sur le chemin λ, aussi près que l'on veut du point X, des points où u et v sont bornés, l'intégrale $y(x)$ est holomorphe en X. En effet l'on déduit des deux équations (41) les équations

$$(41\text{ bis})\qquad \begin{cases} \dfrac{y'^2}{2} + P_3 y' + Q_3 + Pv - Qu = 0 \\ y'' + P_2 y' + Q_2 + \dfrac{\partial P}{\partial y} v - \dfrac{\partial Q}{\partial y} u = 0, \end{cases}$$

P_3, Q_3, P_2, Q_2 désignant des polynomes en y dont le degré est égal à l'indice, et dont les coefficients sont holomorphes en tout point où les coefficients de l'équation (E) sont holomorphes. Par suite y' et y'' sont aussi bornés aux points considérés. Si en certains d'entre eux, les six modules $|y - a_i(x)|$ sont supérieurs à un nombre positif fixe, l'intégrale $y(x)$ est, d'après le théorème de Cauchy, holomorphe au voisinage de chacun de ces points dans un cercle de rayon fixe: ce cercle finit par contenir le point X. Admettons au contraire qu'en chacun des points considérés l'une des quantités $y - a_i(x)$ soit arbitrairement petite. Au moyen des équations (41 bis), l'on peut mettre les dérivées u' et v' sous la forme

$$u' = R_1 y' + S_1 + R_2 u + S_2 v,$$
$$v' = T_1 y' + W_1 + T_2 u + W_2 v,$$

$R_1, S_1, R_2, S_2, T_1, W_1, T_2, W_2$ désignant des polynomes en y dont le degré est égal à l'indice, et dont les coefficients sont holomorphes en tout point où les coefficients de l'équation (E) sont holomorphes. Par suite les trois fonctions y, y', u satisfont à un système différentiel régulier pour y voisin de $a_i(x)$, et, d'après le théorème de Cauchy, l'intégrale $y(x)$ est holomorphe au voisinage de chacun des points considérés dans un cercle de rayon fixe: ce cercle finit encore par contenir le point X. Toutefois le système différentiel auquel satisfont les trois fonctions y, y', u n'est pas holomorphe pour les valeurs de x, y qui annulent la fonction $P(y, x)$: de sorte que le raisonnement est en défaut, si la valeur $a_i(X)$ est racine du polynome $P(y, X)$. Il suffit dans ce cas de considérer le système auquel satisfont les trois fonctions y, y', v pour arriver à la même conclusion. La valeur $a_i(X)$ ne peut être racine des deux polynomes $P(y, X)$ et $Q(y, X)$, car elle serait alors racine multiple du polynome $H[y - a_i(X)]$: ce qui ne peut avoir lieu en un point X où les coefficients de l'équation (E) sont holomorphes.

Supposons que le module maximum des deux quantités u et v tende vers l'infini, quand x tend vers X sur le chemin λ. Si nous substituons dans l'expression de u' l'expression de y' en fonction de u, v, y, x tirée de la première des équations (41 bis), nous voyons que la dérivée logarithmique $\dfrac{u'}{u}$ est bornée aux points où $\dfrac{v}{u}$ est lui-même borné, et où d'après notre hypothèse u tend vers

l'infini. Il est impossible que $\frac{v}{u}$ finisse par être borné: car il en serait de même de la dérivée logarithmique $\frac{u'}{u}$, et la fonction u ne pourrait croître indéfiniment. Il est impossible aussi que $\frac{u}{v}$ finisse par être borné. Il faut donc admettre que, quand x tend vers X, $\frac{u}{v}$ oscille indéfiniment dans son plan, et que sur le chemin λ il y a une infinité de segments sur chacun desquels $\left|\frac{u}{v}\right|$ passe de la valeur A à la valeur B, sans sortir de l'intervalle $A - B$, A et B désignant deux nombres positifs arbitraires. Or sur ces segments les dérivées logarithmiques $\frac{u'}{u}$, $\frac{v'}{v}$ sont bornées, la longueur de chacun d'eux est infiniment petite: $\left|\frac{u}{v}\right|$ s'écarte donc infiniment peu de la valeur initiale A et ne saurait atteindre la valeur B: cette dernière hypothèse est absurde.

Nous avons toutefois introduit une restriction: nous avons supposé que, quand x tendait vers le point transcendant X sur le chemin λ, l'intégrale $y(x)$ n'était pas complètement indéterminée. Notre discussion écarte déjà certaines singularités des fonctions classiques. Ainsi l'intégrale $y(x)$ ne peut avoir de points singuliers mobiles analogues au point singulier $x = 0$ de la fonction $e^{\frac{1}{x}}$, puisque cette fonction tend vers une limite quand la variable tend vers le point $x = 0$ sur un chemin qui ne coupe pas l'axe des quantités purement imaginaires et qui n'est pas tangent à cet axe. L'intégrale $y(x)$ ne peut admettre non plus une coupure mobile analogue à la coupure de la fonction modulaire, puisque la fonction modulaire tend vers une limite quand la variable tend vers un point d'abscisse rationnelle de l'axe réel sur un chemin normal à cet axe. Mais il existe des fonctions fuchsiennes et kleinéennes qui admettent une coupure essentielle, et qui sont complètement indéterminées quand la variable tend vers un point quelconque de cette coupure sur un chemin de longueur finie quelconque: telles sont les fonctions de Schwarz dont le triangle fondamental n'a aucun angle nul. Comme la fonction modulaire, ces fonctions fuchsiennes et kleinéennes vérifient une équation différentielle algébrique du troisième ordre, de forme classique, et, considérées comme intégrales de cette équation, admettent leur coupure comme singularité mobile: l'intégrale $y(x)$ pourrait admettre une coupure mobile de même nature. L'intégrale $y(x)$ pourrait posséder des points singuliers mobiles, isolés ou formant un ensemble parfait, et être complètement indéterminée quand la variable tend sur un chemin de longueur finie quelconque vers l'un quelconque

de ces points. Enfin l'intégrale $y(x)$ pourrait posséder des singularités transcendantes et critiques.

Il est donc nécessaire de lever la restriction que nous avons introduite, et de supposer maintenant que l'intégrale $y(x)$ est complètement indéterminée quand l'on s'approche du point X sur un chemin de longueur finie quelconque. Parmi les chemins situés dans la région où les coefficients de l'équation (E) ont été prolongés analytiquement, et qui aboutissent au point X, nous pouvons choisir un chemin formé de segments rectilignes, par exemple la ligne polygonale dont les sommets sont les centres des cercles successifs construits dans le prolongement. Nous pouvons admettre que l'intégrale $y(x)$ est méromorphe le long de cette ligne polygonale depuis l'origine jusqu'au point X: sinon notre raisonnement s'appliquerait au premier point où l'intégrale $y(x)$ ne serait pas méromorphe. Nous pouvons enfin nous borner à considérer le dernier côté de cette ligne polygonale; nous appellerons ce dernier côté le chemin l: remarquons seulement qu'il suffirait, pour que la suite du raisonnement fût applicable, que le chemin l eût une tangente continue. Nous allons montrer que l'on peut par déformation continue substituer au chemin l un chemin de longueur finie, aboutissant en X, sur lequel les coefficients de l'équation (E) sont holomorphes, et sur lequel, sauf en X, l'intégrale $y(x)$ est méromorphe, et tel en outre que, quand x tend vers X, le point y finisse par ne pas pénétrer dans un cercle de son plan: nous serons ramenés par là au cas précédent. Le centre de ce cercle peut être choisi arbitrairement en dehors des six points $a_i(X)$: comme une transformation linéaire effectuée sur y ne change pas la forme de l'équation (E), choisissons pour centre l'origine du plan des y.

Pour étudier l'intégrale $y(x)$ au voisinage de la valeur $y=0$, prenons y comme variable, et posons $y''=ty'^2$: l'équation (E) peut être remplacée par le système

$$(E_1)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=-t\frac{dx}{dy},\quad \frac{dt}{dy}=-2t^2+t\sum\frac{1}{y-a_i}+\sum\frac{A_i}{y-a_i}+\frac{dx}{dy}(\ \cdots\ ).$$

la parenthèse désignant un polynome en $\frac{dx}{dy}$. Donnons-nous un nombre positif très grand A, un nombre positif très petit r, et admettons que A soit assez grand et r assez petit pour satisfaire à toutes les conditions que nous allons obtenir. Considérons un segment y_1y_2 décrit par le point $y(x)$ dans le cercle de centre $y=0$ et de rayon r, quand le point x décrit le segment x_1x_2 du chemin l, et supposons qu'il existe sur le segment y_1y_2, extrémités comprises, un point y_0 qui corresponde à un point x_0 du segment x_1x_2 où l'on ait $|t_0|=-\left|\frac{y'_0}{y'^2_0}\right|\leq A$. Au point x_0, y'_0 est arbitrairement grand: sinon, y_0, y'_0, y''_0 seraient

bornés, et $|y_0 - a_i(x_0)|$ supérieur à un nombre fixe; l'intégrale $y(x)$ serait holomorphe en x_0 dans un cercle de rayon fixe, et par conséquent serait holomorphe en X. Par suite, d'après un théorème de M. Poincaré, l'intégrale du système (E_1), transformée de l'intégrale $y(x)$ de l'équation (E), peut être développée suivant les puissances du paramètre $\frac{1}{y'_0}$. Posons $\frac{dx}{dy} = \frac{Y}{y'_0}$: le système transformé en x, Y, t se réduit pour $y'_0 = \infty$ au système

$$\frac{dx}{dy} = 0, \quad \frac{dY}{dy} = -tY, \quad \frac{dt}{dy} = -2t^2 + t\sum \frac{1}{y - a_i} + \sum \frac{A_i}{y - a_i},$$

qui est équivalent à l'équation simplifiée de l'équation (E), et dont par suite nous possédons implicitement l'intégrale générale. L'intégrale de ce système, définie par les conditions initiales $y = y_0$, $x = x_0$, $Y = 1$, $t = t_0$ est holomorphe au point y_0: si A est assez grand, r assez petit et x_0 assez proche de X, la valeur du rayon de convergence de cette intégrale au point y_0 donnée par le théorème de Cauchy peut être limitée inférieurement en fonction de A seulement. Si r est inférieur à la moitié de cette limite inférieure, l'intégrale considérée, et par suite l'intégrale du système (E_1), transformée de l'intégrale $y(x)$, sont holomorphes dans le cercle de centre $y = 0$ et de rayon r, et sur la circonférence de ce cercle. Quand y varie dans ce domaine, la fonction $\frac{dx}{dy}$ est holomorphe et ne s'annule pas, d'après la relation $\frac{dx}{dy} = \frac{1 + \eta}{y'_0}$, où η désigne une fonction de $y, y_0, x_0, t_0, \frac{1}{y'_0}$, holomorphe en y dans le domaine considéré, nulle pour $\frac{1}{y'_0} = 0$ et holomorphe au voisinage de cette valeur: inversement, la fonction $y(x)$ est holomorphe quand x varie dans le domaine correspondant de son plan.

Désignons par δl et δs les longueurs des segments correspondants $x_1 x_2$ et $y_1 y_2$; et faisons décrire au point y le plus petit arc de la circonférence de centre $y = 0$ et de rayon r compris entre les points y_1 et y_2, soit $\delta\sigma$ la longueur de cet arc: le point x, d'après la relation $\frac{dx}{dy} = \frac{1 + \eta}{y'_0}$, décrit entre les deux points x_1 et x_2 un segment analytique régulier de longueur $\delta\lambda$, et l'intégrale $y(x)$ est holomorphe dans la région du plan comprise entre les deux segments δl et $\delta\lambda$ et sur le segment $\delta\lambda$. Les deux segments $\delta\lambda$ et δl sont de longueurs comparables: intégrons en effet l'égalité[1] $|dx| = \frac{(1 + \varepsilon)|dy|}{|y'_0|}$, quand y décrit le chemin δs, et

[1] Nous désignons par $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ des quantités positives ou négatives dont on peut rendre les valeurs absolues aussi petites que l'on veut, en choisissant A assez grand, r assez petit et x assez proche de X sur le chemin l.

appliquons au second membre la formule de la moyenne; il vient $\delta l = \frac{(1+\varepsilon_1)\,\delta s}{|y'_0|}$; l'on obtient de même $\delta\lambda = \frac{(1+\varepsilon_2)\,\delta\sigma}{|y'_0|}$, et par suite $\frac{\delta\lambda}{\delta l} < \frac{\pi}{2}(1+\varepsilon_3)$, car le rapport $\frac{\delta\sigma}{\delta s}$ ne peut surpasser $\frac{\pi}{2}$. Une première conséquence de cette inégalité est que le segment $\delta\lambda$ est à une distance arbitrairement petite du point x_1, et par suite, si x_1 est assez proche de X, est intérieur comme le segment δl au cercle de convergence des coefficients de l'équation (E) au point X: ces coefficients sont donc holomorphes dans la région du plan comprise entre les deux segments δl et $\delta\lambda$ et sur le segment $\delta\lambda$.

Substituons sur le chemin l le segment $\delta\lambda$ au segment δl, et faisons cette substitution pour tous les segments $y_1 y_2$ intérieurs au cercle de rayon r, sauf pour ceux sur lesquels on a constamment $\left|\frac{y''}{y'^2}\right| > A$: nous obtenons ainsi un chemin composé d'une infinité de segments analytiques réguliers, aboutissant en X, dont la longueur totale est finie, sur lequel les coefficients de l'équation (E) sont holomorphes, et sur lequel, sauf en X, l'intégrale $y(x)$ est méromorphe; le chemin correspondant décrit par le point y ne pénètre dans le cercle de rayon r que le long des segments exceptés. Parmi ces segments exceptés, les uns ne pénètrent pas dans le cercle de centre $y=0$ et de rayon $\frac{r}{2}$; il est clair que nous pouvons les laisser de côté, car il suffit d'obtenir un cercle de rayon non nul dans lequel le point y ne pénètre pas. Il reste donc à considérer les segments $y_1 y_2$ sur lesquels on a constamment $\left|\frac{y''}{y'^2}\right| > A$ et qui pénètrent dans le cercle de rayon $\frac{r}{2}$: nous allons substituer à chacun d'eux une suite de segments tels que $\left|\frac{y''}{y'^2}\right|$ soit borné sur les parties de ces segments intérieures au cercle de rayon $\frac{r}{2}$: ce qui nous ramènera au cas précédent.

Pour étudier l'intégrale $y(x)$ sur le segment $x_1 x_2$ correspondant à l'un des segments $y_1 y_2$ considérés, prenons comme nouvelle variable $\frac{y'}{\sqrt{y''}} = z$; en un point quelconque x_0 du segment $x_1 x_2$, $|z_0|$ est très petit, plus petit que $\frac{1}{\sqrt{A}}$. En outre, au point x_0 l'intégrale $y(x)$ est holomorphe, et y''_0 n'est pas infini; mais, quand le point x_0 tend vers X, y''_0 tend vers l'infini: sinon, en certains des points x_0, y_0, y'_0, y''_0 seraient bornés, et $|y_0 - a_i(x_0)|$ supérieur à un nombre fixe; l'inté-

grale $y(x)$ serait holomorphe en chacun de ces points dans un cercle de rayon fixe, et par suite serait holomorphe en X. Il résulte d'abord qu'il est inutile, pour définir la fonction $z(x)$ sur le segment $x_1 x_2$, de considérer deux feuillets sur le plan de la variable x. D'autre part l'équation (E) peut être remplacée par le système

$$(E_2)\quad \frac{dx}{dz} = \frac{1}{\sqrt{y''}}, \quad \frac{dy}{dz} = -\frac{z^2}{2}\sqrt{y''}\frac{d\frac{1}{y''}}{dz} - \frac{1}{\sqrt{y''}}\left(1 - \frac{z}{2}\sqrt{y''}\frac{d\frac{1}{y''}}{dz}\right)\left[z\sum\frac{1}{y-a_i} + z^3\sum\frac{A_i}{y-a_i} + \frac{1}{\sqrt{y''}}(\ldots)\right],$$

qui est holomorphe par rapport à $\frac{1}{\sqrt{y''}}$ et z, si y'' est assez grand et z assez petit. Par suite l'intégrale du système (E_2), transformée de l'intégrale $y(x)$ de l'équation (E), peut être développée suivant les puissances du paramètre $\frac{1}{\sqrt{y''_0}}$. Posons $\frac{1}{y''} = \frac{Z}{y''_0}$: le système transformé en x, y, Z se réduit pour $y''_0 = \infty$ au système

$$\frac{dx}{dz} = 0, \quad \frac{dy}{dz} = z - \frac{z^2}{2}Z\frac{dZ}{dz}, \quad \frac{dZ}{dz} = -Z\left(1 - \frac{z}{2}Z\frac{dZ}{dz}\right)\left(z\sum\frac{1}{y-a_i} + z^3\sum\frac{A_i}{y-a_i}\right),$$

qui est encore équivalent à l'équation simplifiée de l'équation (E). L'intégrale de ce système, définie par les conditions initiales $z = z_0$, $x = x_0$, $y = y_0$, $Z = 1$, est holomorphe, si A est assez grand, si r est assez petit, et si x_0 est assez proche de X, dans un cercle de centre $z = 0$ et de rayon fixe, et par conséquent dans le cercle de centre $z = 0$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{A}}$, qui contient le segment $z_1 z_2$: il en est de même de l'intégrale du système (E_2), transformée de l'intégrale $y(x)$.

D'ailleurs le segment $z_1 z_2$ n'est pas tout entier infiniment voisin du point $z = 0$. En particulier, si l'on désigne par y_3 et y_4 les points où le segment $y_1 y_2$ rencontre pour la première fois et pour la dernière fois la circonférence de centre $y = 0$ et de rayon $\frac{r}{2}$, il y a sur chacun des segments partiels $y_1 y_3$ et $y_2 y_4$ des points où $|z|$ est supérieur à un nombre fixe, et où par suite $\left|\frac{y''}{y'^2}\right|$ est inférieur à un nombre fixe. Supposons en effet que le segment $z_1 z_3$ soit tout entier intérieur au cercle de centre $z = 0$ et de rayon $\varrho\left(< \frac{1}{\sqrt{A}}\right)$. On déduit du système (E_2) les

deux équations $\frac{dx}{dz} = \frac{1+\eta}{\sqrt{y''_0}}$, $\frac{dy}{dz} = z(1+\eta_1)$, η et η_1 désignant des fonctions de $z - z_0$, $\frac{1}{\sqrt{y''_0}}$ et z, holomorphes et nulles pour $z = z_0 = \frac{1}{\sqrt{y''_0}} = 0$. Comme le segment $x_1 x_3$ est rectiligne, il résulte de la première équation que le segment $z_1 z_3$ est un segment analytique régulier, et que l'on peut rendre la variation de la tangente le long de ce segment aussi petite que l'on veut, en choisissant ϱ assez petit: la longueur du segment $z_1 z_3$ est au plus $2\varrho(1+\varepsilon)$, ε désignant une quantité arbitrairement petite. Il résulte alors de la seconde équation que le module $|y_3 - y_1|$ ne peut surpasser $2\varrho^2(1+\varepsilon_1)$, ε_1 désignant une quantité arbitrairement petite. Or ce module est supérieur à $\frac{r}{2}$. Si ϱ est assez petit, mais fixe, il y a donc sur le segment $y_1 y_3$ des points y_5, et il y a de même sur le segment $y_2 y_4$ des points y_6, tels que les points correspondants z_5 et z_6 soient extérieurs au cercle de centre $z = 0$ et de rayon ϱ.

En procédant comme précédemment, on peut dès lors remplacer les parties du segment $z_5 z_6$ intérieures au cercle de rayon ϱ par des segments de la circonférence. Le segment $x_1 x_2$ du chemin l est remplacé par une suite de segments analytiques réguliers, dont la somme a une longueur comparable à celle du segment primitif, et sur lesquels les coefficients de l'équation (E) et l'intégrale $y(x)$ sont holomorphes (sur les nouveaux segments z est holomorphe en x, et y est holomorphe en z). Le segment $y_1 y_2$ est remplacé aussi par une suite de segments: $\frac{y''}{y'^2}$ est borné sur les segments compris entre les points y_5 et y_6, et par suite sur tous les segments du nouveau chemin décrit par le point y qui sont intérieurs au cercle de centre $y = 0$ et de rayon $\frac{r}{2}$. La démonstration est terminée.[1]

[1] Cette démonstration est à un double point de vue une extension de celle que M. Painlevé a constituée pour les équations (A); en définitive l'une et l'autre sont fondées sur le théorème de Cauchy, sur le théorème de M. Poincaré qui exprime la continuité des intégrales d'un système différentiel en fonction d'un paramètre contenu dans ce système, et par suite en fonction des conditions initiales, et sur la considération des dérivées logarithmiques, qui joue un rôle essentiel dans toutes les questions de croissance.

Dans la deuxième partie, nous démontrons que, le point X étant supposé transcendant pour l'intégrale $y(x)$, il existe des chemins de longueur finie aboutissant au point X, sur lesquels l'intégrale $y(x)$ n'est pas complètement indéterminée. Cette partie de la démonstration n'est pas applicable à l'équation différentielle classique que vérifient les fonctions fuchsiennes et kleinéennes (cette équation ne peut être transformée en un système de la forme (E_2), holomorphe pour $z = 0$): nous avons vu qu'on ne doit pas s'en étonner. La deuxième partie de la démonstration est applicable au contraire à l'équation $y''' = 2yy'' - 3y'^2$, et à l'équation XII: elle permet de montrer que, pour l'intégrale générale de chacune de ces équations, il existe des

21. Nous avons ainsi démontré que l'équation (E) a ses points critiques fixes, en nous servant seulement des conditions établies entre les coefficients par le système (S), et sans avoir intégré ce système. Effectivement, à l'opposé des systèmes différentiels qui déterminent les coefficients des équations (A), et dont l'intégration est très simple, le système (S) présente une grande complexité: et je n'en ai pas achevé l'intégration. Il renferme neuf équations algébriques entre les fonctions a_i et A_i. Si l'on regarde les a_i comme donnés, ces neuf équations entre les A_i sont compatibles, et ont cinq solutions: la résolution de ces équations revient en effet à la détermination de la forme $P'Q''-Q'P''$ par la forme $PQ'-QP'$, c'est-à-dire à la détermination d'un faisceau biquadratique à une variable par sa jacobienne. Supposons les A_i exprimés en fonction des a_i par l'une des cinq solutions; il reste vingt-deux équations entre vingt-six fonctions inconnues. En écartant le cas où les rapports anharmoniques quatre à quatre des six fonctions a_i sont constants, cas qui ne conduit qu'à des équations banales, nous pouvons, par une transformation homographique de la fonction et un changement de variable, donner à quatre des fonctions a_i trois valeurs numériques et la valeur x. Pour déterminer les vingt-deux fonctions inconnues, nous avons alors un nombre égal d'équations. Ces équations forment un système différentiel du sixième ordre. Les coefficients de l'équation (E) ainsi réduite dépendent donc de six paramètres arbitraires.

D'autre part, si l'on considère l'équation simplifiée (14) dans laquelle les polynomes P et Q sont tels que le polynome $PQ'-QP'$ ait trois racines doubles, et si l'on forme les équations à points critiques fixes admettant cette équation simplifiée, on constate que ces équations se ramènent à l'équation du troisième ordre obtenue en différentiant l'équation (A, VI) pour éliminer l'un des quatre paramètres. J'ai démontré, au moyen du système (S), que l'équation (E) admet cette équation du troisième ordre comme dégénérescence. Il en résulte que l'équation (E) est une équation à points critiques fixes nouvelle. Mais deux cas peuvent encore se présenter: ou bien l'équation (E) se ramène à une équation irréductible du second ordre, ou plus probablement elle ne peut être remplacée par aucune équation plus simple.

Je renvoie à un Mémoire ultérieur la détermination de la classe d'équations irréductibles à laquelle appartient l'équation (E), et la détermination explicite des coefficients.

chemins de longueur finie aboutissant en un point quelconque de la coupure, et sur lesquels y tend vers l'infini. D'une façon générale, la deuxième partie de la démonstration, en raison du rôle qu'y joue l'équation simplifiée, permet de préciser la relation qui existe entre les singularités de l'intégrale de l'équation simplifiée et les singularités de l'intégrale de l'équation complète. Voir n° 18.

Equations à points critiques fixes du quatrième ordre et d'ordre supérieur.

22. Considérons l'équation à points critiques fixes

$$y^{IV} = P(y''', y'', y', y, x), \tag{42}$$

où P désigne un polynome en y''', y'', y', y, à coefficients analytiques en x. Les degrés de ce polynome en y''', y'', y' se limitent sans difficulté nouvelle, si l'on admet que l'équation (18), pour $\lambda \geq 1$, n'a pas son intégrale générale uniforme; l'équation (42) a nécessairement la forme

$$y^{IV} = Q(y,x)y''' + R(y,x)y'y'' + S(y,x)y'' + T(y,x)y'^3 + U(y,x)y'^2 + V(y,x)y' + W(y,x),$$

$Q, R, \ldots, W$ désignant des polynomes en y à coefficients analytiques en x. Pour limiter les degrés de ces polynomes en y, on rencontre la même difficulté que dans le cas des équations du troisième ordre: il faut décider si des équations telles que

$$y^{IV} = \alpha(yy''' - 3y'y'') + \beta(y^2y'' - 2yy'^2),$$

dont les intégrales n'ont ni points critiques algébriques, ni pôles, ont leur intégrale générale uniforme. Peut-être le procédé, qui permettra de résoudre la question pour les équations du troisième ordre, s'appliquera-t-il, aux équations du quatrième ordre et d'ordre supérieur, et donnera-t-il d'une façon générale la limitation suivante:[1] dans l'équation à points critiques fixes

$$y^{(n)} = P(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y, x),$$

où P désigne un polynome en $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots y', y$, à coefficients analytiques en x, considérons chaque dérivée $y^{(i)}$ et la fonction y comme de poids égal à l'indice de dérivation augmenté d'une unité: le poids de chaque terme du second membre, ne peut surpasser le poids du premier membre, $n+1$.

Pour déterminer les équations à points critiques fixes de la forme (42), on est conduit à déterminer les équations réduites de la forme

$$y^{IV} = ayy''' + by'y'' + cy^2y'' + dyy'^2 + ey^3y' + fy^5, \tag{43}$$

a, b, c, d, e, f désignant des constantes, dont l'intégrale générale est uniforme. Cette sorte de problème se traite toujours par la même méthode, mais les diffi-

[1] A la vérité l'intégrale générale de l'équation $y^{IV} = 2y'y''' - 3y''^2$, que nous écartons ici, n'a pas de points critiques mobiles, mais elle admet, pour certaines valeurs des constantes d'intégration, une ligne critique mobile (et le point critique $x = \infty$). Quand la ligne critique, qui est circulaire, se réduit à un point, l'intégrale générale se réduit à une intégrale particulière qui a un point critique mobile. Voir n° 12.

cultés arithmétiques croissent avec l'ordre différentiel. La détermination des équations de la forme

$$y'' = a\,y\,y' + b\,y^3$$

dont l'intégrale générale est uniforme, se ramène à la résolution en nombres entiers de l'équation

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N'} = \frac{1}{2}.$$

La détermination des équations de la forme

$$y''' = a\,y\,y'' + b\,y'^2 + c\,y^2 y' + d\,y^4$$

dont l'intégrale générale est uniforme est liée à la résolution en nombres entiers de l'équation

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N'} + \frac{1}{N''} = \frac{1}{1.2.3}.$$

De même la détermination des équations (43) dont l'intégrale générale est uniforme est liée à la résolution en nombres entiers de l'équation

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N'} + \frac{1}{N''} + \frac{1}{N'''} = \frac{1}{1.2.3.4}.$$

Les équations réduites du deuxième et du troisième ordre, dont l'étude conduit aux équations (A), sont les équations simples dont l'intégrale s'exprime par les fonctions elliptiques, ou la fonction ζ:

$$y'' = 6\,y^2,\ y'' = 2\,y^3,\ y''' + 6\,y'^2 = 0,\ y''' = 6\,y^2 y',\ y''' = 12\,y\,y'.$$

L'étude des équations (42) qui admettent l'équation réduite

$$y^{IV} + 12\,y'\,y'' = 0,\ \text{d'où}\ y''' + 6\,y'^2 + C = 0,$$

ne donne pas d'équation nouvelle.

Si dans le second membre de l'équation (42), tous les termes sont de poids inférieur à 5, l'équation réduite est de la forme

$$y^{IV} = a\,y\,y'' + b\,y'^2 + c\,y^3,$$

ses intégrales ont en général des pôles doubles. L'étude de l'équation

$$y^{IV} = 12\,(y\,y'' + y'^2),\ \text{d'où}\ y''' = 12\,y\,y' + C,$$

ne conduit encore à aucune équation nouvelle.

23. Citons enfin l'équation

$$y^{IV} = 30\,y\,y'' - 60\,y^3; \tag{44}$$

les intégrales de cette équation ont deux familles de pôles doubles mobiles, et admettent au voisinage les développements

$$y = \frac{1}{(x-x_0)^2} + \alpha + \beta(x-x_0) + \ldots + \theta(x-x_0)^8 + \ldots,$$

les coefficients des puissances 0, 1 et 8 étant arbitraires, et

$$y = \frac{-2}{(x-x_0)^2} + \alpha(x-x_0)^3 + \ldots + \lambda(x-x_0)^{10} + \ldots,$$

les coefficients des puissances 3 et 10 étant arbitraires. Ces développements polaires permettent, comme dans le cas des équations des deuxième et troisième ordre, de former des conditions nécessaires pour que les équations admettant l'équation (44) comme équation réduite n'aient pas de points critiques mobiles: elles se ramènent alors à la forme

$$y^{IV} = 30\,y\,y'' - 60\,y^3 + \alpha\,y + \beta, \tag{45}$$

α, β désignant des paramètres arbitraires. J'ai obtenu pour cette équation une intégrale dépendant de trois constantes:

$$y = p\left(x + A;\ \frac{\alpha}{12},\ \frac{-\beta}{24} + C\right) + p\left(x + B;\ \frac{\alpha}{12},\ \frac{-\beta}{24} - C\right),$$

mais je n'ai pu décider si l'intégrale générale est une combinaison de fonctions uniformes classiques, n'est pas uniforme, ou est une fonction uniforme nouvelle. L'équation se ramène au troisième ordre en prenant y comme variable: pour $\alpha = \beta = 0$, elle se ramène même au second. Mais l'équation différentielle que vérifient les fonctions fuchsiennes et kleinéennes, se ramène de même, en permutant les rôles de la fonction et de la variable, à une équation de Riccati, et l'intérêt de ces fonctions n'en est pas diminué.

Signalons une analogie remarquable. Faisons dans l'équation (45) la transformation $y = \frac{u'^2 - u\,u''}{u^2}$: aux deux familles de pôles des intégrales de l'équation (45) correspondent deux familles de zéros, simples et doubles, des intégrales de l'équation transformée:

$$u\,u^{VI} - 6\,u'\,u^V + 15\,u''\,u^{IV} - 10\,u'''^2 = \alpha(u\,u'' - u'^2) - \beta\,u^2. \tag{46}$$

Le premier membre est un invariant de la forme binaire en λ

$$u^{\mathrm{VI}} + 6\lambda u^{\mathrm{V}} + 15\lambda^2 u^{\mathrm{IV}} + 20\lambda^3 u''' + 15\lambda^4 u'' + 6\lambda^5 u' + \lambda^6 u.$$

C'est là un fait à rapprocher de ceux qu'a signalés M. Borel.[1] M. Borel a groupé un certain nombre d'équations dont l'intégrale générale est entière, et a remarqué qu'en séparant dans ces équations les termes de poids le plus élevé par rapport aux indices des dérivées, on obtient des invariants usuels de formes binaires telles que

$$u^{(n)} + n\lambda u^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 u^{(n-2)} + \cdots + n\lambda^{n-1} u' + \lambda^n u. \tag{47}$$

Séparer les termes de poids le plus élevé équivaut à remplacer dans l'équation x par $x_0 + \alpha x$, et à faire tendre α vers zéro: l'équation réduite obtenue a son intégrale générale entière, si l'équation complète a elle-même son intégrale générale entière. Ainsi l'équation

$$u\,u^{\mathrm{VI}} - 6\,u'\,u^{\mathrm{V}} + 15\,u''\,u^{\mathrm{IV}} - 10\,u'''^2 = 0 \tag{48}$$

est le troisième terme d'une suite dont les deux premiers termes sont

$$u\,u'' - u'^2 = 0, \text{ d'où } u = e^{Ax+B},$$

$$u\,u^{\mathrm{IV}} - 4\,u'\,u''' + 3\,u''^2 = 0, \text{ d'où } u = e^{Ax+B}\sigma(x + C;\, 0,\, D).$$

L'équation (48) admet une intégrale entière dépendant de cinq constantes arbitraires

$$u = e^{Ax+B}\sigma(x + C;\, 0,\, E)\,\sigma(x + D;\, 0,\, -E).$$

Il est à remarquer que, si l'intégrale générale de l'une des équations (48) et (46) est une fonction entière à croissance régulière, le genre et l'ordre de cette fonction entière ne peuvent surpasser 2, d'après l'équation (45): la fonction exponentielle et la fonction σ suffisent-elles à l'exprimer?

24. On pourrait être tenté d'induire des remarques de M. Borel que les équations différentielles déduites de tous les invariants usuels ont leur intégrale générale entière, et on pourrait espérer obtenir par cette voie de nouvelles fonctions entières. Les équations déduites des discriminants des formes binaires (47) ont leur intégrale générale entière, mais ne définissent pas de fonctions nouvelles: l'intégrale générale s'exprime très simplement par la fonction exponentielle.

[1] *Comptes Rendus*, 8 février 1904

Avant d'établir ce résultat, faisons quelques remarques générales au sujet de l'équation différentielle I_n obtenue en annulant un invariant quelconque de la forme (47). L'équation I_n est homogène par rapport à la fonction u et à ses dérivées, et ne change pas si l'on change u en $e^{\alpha x}u$, quel que soit le paramètre α, car cela revient[1] à former l'invariant correspondant en remplaçant dans la forme (47) λ par $\lambda+\alpha$: l'équation transformée de l'équation I_n en $\frac{u'^2-uu''}{u^2}$ est donc d'ordre $n-2$. On peut abaisser encore de deux unités l'ordre de cette transformée, en changeant de fonction et de variable, parce que l'équation I_n admet le groupe de transformations à deux paramètres $(x, \beta x+\gamma)$. En définitive l'intégration de l'équation I_n se ramène à l'intégration d'une équation d'ordre $n-4$, suivie de quatre quadratures. D'autre part l'équation I_n est vérifiée si l'on annule dans la forme (47) les $\frac{n+1}{2}$ premiers termes, si n est impair; et les $\frac{n}{2}+1$ premiers termes, si n est pair. L'équation I_n admet donc l'intégrale $u=P_k(x)$, et par suite l'intégrale $u=e^{Cx}P_k(x)$, $P_k(x)$ désignant un polynome en x de degré k à coefficients constants, et k le nombre entier $\frac{n-1}{2}$ ou $\frac{n}{2}-1$. Cette dernière intégrale dépend de $\frac{n+3}{2}$ ou $\frac{n}{2}+1$ constantes: elle est l'intégrale générale pour $n=2$ ou $n=3$.

Le discriminant de la forme binaire (47) est une expression définie, au moins à un facteur numérique près: appelons D_n l'équation différentielle obtenue en l'annulant. Cette équation résulte de l'élimination de λ entre les deux équations algébriques

$$(49)\quad \begin{cases} u^{(n)}+(n-1)\lambda u^{(n-1)}+\dfrac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}\lambda^2 u^{(n-2)}+\cdots+(n-1)\lambda^{n-1}u'+\lambda^{n-1}u'=0, \\ u^{(n-1)}+(n-1)\lambda u^{(n-1)}+\cdots \qquad\qquad +(n-1)\lambda^{n-2}u'+\lambda^{n-1}u=0. \end{cases}$$

Or on obtient une intégrale de ce système d'équations dépendant de $n-1$ constantes, en posant $\lambda=0$, $u^{(n-1)}=0$: une intégrale de l'équation D_n est donc $u=P_{n-2}(x)$. La fonction $u=e^{Cx}P_{n-2}(x)$ est encore une intégrale, quelle que soit la constante C, et par suite est l'intégrale générale. Pour obtenir les intégrales singulières, il faut annuler le discriminant par rapport à $u^{(n)}$ de l'équation

[1] On peut dire encore que le premier membre de l'équation I_n vérifie l'équation aux dérivées partielles qui exprime qu'un invariant est fonction des différences des racines de la forme dont il dérive: on retrouve ainsi les quatre conditions énoncées par M. Stephanos dans une Communication au Congrès de Rome (*Atti*, vol. II, p. 148). Au contraire l'équation (25) rentre dans le premier cas considéré par M. Stephanos (*ibid.*, p. 145). Tandis que les équations I_4 s'intègrent par quadratures, l'intégration de l'équation (25) dépend de l'intégration d'une équation linéaire du second ordre.

D_n, ou encore le discriminant par rapport à λ de la seconde équation (49): on obtient évidemment l'équation D_{n-1}. L'intégrale singulière de l'équation D_n est donc $u=e^{Cx}P_{n-3}(x)$, l'intégrale singulière de l'intégrale singulière est $u-e^{Cx}P_{n-4}(x)$, et ainsi de suite.

Si les équations D_n s'intègrent au moyen de la fonction exponentielle, les équations obtenues en ajoutant aux équations D_n des termes complémentaires, et dont l'intégrale générale est entière, peuvent définir des fonctions nouvelles. Ainsi, dans les équations transformées des équations (B) en $u=e^{\int y\,dx}$, et dont l'intégrale générale est entière, on a ses points singuliers fixes, les termes de poids le plus élevé proviennent des termes $y''^2+4y'^3$, et sont par suite $(uu'''-u'u'')^2-4(u'u'''-u''^2)(uu''-u'^2)$: les transcendantes définies par les équations (A) se rattachent à l'équation D_3. M. Borel a proposé d'appeler équations (P) les équations dont l'intégrale générale est entière; de même qu'on a été conduit par une extension de la classe des équations dont l'intégrale générale est uniforme, à considérer les équations à points critiques fixes, nous sommes amenés ici, pour des raisons connexes, par extension de la classe des équations (P), à considérer les équations dont l'intégrale générale a ses points singuliers fixes: ces équations sont la généralisation directe des équations linéaires.

Désignons d'une façon générale par u l'intégrale d'une telle équation (algébrique par rapport à la fonction et à ses dérivées, et analytique en x). M. Painlevé a démontré que l'intégrale générale de l'une des équations (A) ne peut, sauf pour des valeurs exceptionnelles des paramètres, s'exprimer par une fonction algébrique de u et de ses dérivées, analytique de x, l'ordre de l'équation différentielle qui définit u étant inférieur à 3:[1] les équations (B) fournissent la représentation la plus simple des intégrales des équations (A).

De même les équations différentielles de la suite

$$\begin{vmatrix} u'' & u' \\ u' & u \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} u^{IV} & u''' & u'' \\ u''' & u'' & u' \\ u'' & u' & u \end{vmatrix} = 0, \ldots$$

ont leur intégrale générale entière. Chaque déterminant est en effet un déterminant de Wronski, et l'équation obtenue en l'égalant à zéro équivaut à une relation linéaire et homogène à coefficients constants et arbitraires entre les éléments de la dernière ligne. L'intégrale générale s'exprime encore par la fonction exponentielle.

[1] *Comptes Rendus*, 10 novembre 1902.

25. Mais toutes les équations différentielles déduites des invariants usuels n'ont pas leur intégrale générale entière. Leurs intégrales n'ont pas de pôles; et si, au voisinage d'un point algébrique ou transcendant, le terme prépondérant du développement d'une intégrale est $(x+C)^r$, l'exposant r est entier positif. A ce point de vue, l'analogie ne va pas plus loin, comme nous allons le montrer sur un exemple.

Les invariants les plus simples à écrire sont ceux de la suite dont nous avons considéré trois termes, et dont le terme général fournit l'équation E_n:

$$u\,u^{(n)} - n\,u'\,u^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2}u''\,u^{(n-2)}\cdots + \frac{(-1)^n}{2}\frac{n(n-1)\cdots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{n\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdots 2}\left[u^{\left(\frac{n}{2}\right)}\right]^2 = 0,$$

n étant un entier pair. Pour $n>6$, l'intégrale générale de cette équation a des points critiques transcendants.

Pour étudier les intégrales voisines de l'intégrale $u=x+C$, on peut faire la substitution $u=x+C+\alpha v$, et développer v suivant les puissances du paramètre α: pour que l'intégrale générale soit entière, ou même uniforme, il est nécessaire que tous les coefficients du développement $v_0, v_1, v_2, \ldots$ soient uniformes. v_0 est donné par l'équation

$$(x+C)\,v_0^{(n)} - n\,v_0^{(n-1)} = 0, \text{ d'où } v_0^{(n-1)} = H(x+C)^n;$$

v_0 est uniforme.

De même, pour étudier les intégrales voisines de l'intégrale $u=(x+C)^2$, faisons la substitution $u=(x+C)^2+\alpha v$, et développons v suivant les puissances de α. v_0 est donné par l'équation

$$(x+C)^2\,v_0^{(n)} - 2n(x+C)\,v_0^{(n-1)} + n(n-1)\,v_0^{(n-2)} = 0.$$

C'est une équation linéaire d'Euler, posons $v_0^{(n-2)} = (x+C)^r$: l'équation caractéristique est

$$r^2 - (2n+1)r + n(n-1) = 0.$$

Pour que v_0 soit uniforme, il est nécessaire que les racines de cette équation soient entières, c'est-à-dire que $8n+1$ soit carré parfait: sinon, v_0 a un point critique transcendant qui permute une infinité de déterminations. $8n+1$ est carré parfait pour $n=6$, mais non pour $n=8$.

Pour $n>6$, l'équation E_n admet l'intégrale particulière $u=(x+C)^3$, et on est conduit de même à considérer l'équation

$$r(r-1)(r-2)-3nr(r-1)+3n(n-1)r-n(n-1)(n-2)=0$$

ou

$$(r-n)[r^2-(2n+3)r+(n-1)(n-2)]=0.$$

Les racines de cette équation sont entières, si $24n+1$ est carré parfait. Elles ne sont entières ni pour $n=8$, ni pour $n=10$.

D'une façon générale, pour que l'équation $E_n (n>6)$ ait son intégrale générale uniforme, il est nécessaire d'abord que $8n+1$ et $24n+1$ soient carrés parfaits: il existe une infinité de nombres pairs n dépendant d'une équation de PELL, tels que les deux nombres $8n+1$ et $24n+1$ soient carrés parfaits; le plus petit est le nombre 210. Mais il est encore nécessaire que, dans l'étude des intégrales voisines des intégrales $u=(x+C)^4, (x+C)^5, \ldots (x+C)^{\frac{n}{2}-1}$, les équations en r formées comme précédemment aient toutes leurs racines entières: par exemple, pour l'équation E_{210}, il reste à considérer cent une équations, dont les degrés croissent de 4 à 104. Il n'est pas vraisemblable qu'il existe des valeurs de n, pour lesquelles toutes ces conditions successives soient remplies. De plus la nature des points critiques mis en évidence est telle qu'il n'est pas facile de déduire de l'intégrale générale une fonction méromorphe, ou uniforme.

Enfin la notion d'invariant usuel n'est pas précise, et l'on ne voit guère comment préciser le choix des invariants qui fournissent des équations (P). Posons

$$S=u\,u^{\mathrm{IV}}-4\,u'\,u'''+3\,u''^2,\quad T=u\,u''\,u^{\mathrm{IV}}+2\,u'\,u''\,u'''-u'^2\,u^{\mathrm{IV}}-u''^3-u\,u'''^2;$$

les équations I_4 sont de la forme $S^3+\alpha T^2=0$, α désignant un paramètre arbitraire, et s'intègrent par quadratures. Parmi elles, seules les équations $S=0$, $T=0$ et $S^3-27T^2=0$, ou D_4, ont leur intégrale générale uniforme.

BIBLIOGRAPHIE.

Cambridge University Press.

1910.

HARDY, G. H., Orders of infinity. The »Infinitärcalcül» of Paul du Bois-Reymond (Cambrigde tracts in mathematics and mathem. physics. N:o 12.) — 62 pp. 8. Sh. 2. 6 d.

Ernest Flammarion.

Paris 1910.

POINCARÉ, H., Savants et écrivains. — XIV+279 pp. 8.

Sully Prudhomme. Gréard, écrivain. Curie et Brouardel. Laguerre. Hermite. Cornu. Halphen. Tisserand. Bertrand. Berthelot. Faye. Potier. Weierstrass. Lord Kelvin. Loewy. Les polytechniciens.

Gauthier-Villars.

Paris 1910—11.

Annuaire pour l'an 1911 publ. par le Bureau des Longitudes. — VII+750 pp. 16. Fr. 1:50.

Tableaux relatifs à la Métrologie, aux Monnaies, à la Géographie, à la Statistique et à la Météorologie.

Poincaré, H., Note sur la XVIe conférence de l'association géodésique internationale.

Bigourdan, G., L'éclipse de soleil du 17 avril 1912.

APPELL, PAUL, Biographie, bibliographie analytique des écrits, par *Ernest Lebon*. [Avec portrait.] — VIII+71 pp. 8. — (Savants du jour.)

APPELL, P., & DAUTHEVILLE, S., Précis de mécanique rationnelle. Introduction à l'étude de la physique et de la mécanique appliquée, à l'usage des can-

didats aux certificats de licence et des élèves des écoles techniques supérieures. — 729 pp. 8.

Notions préliminaires. Vecteurs. Cinématique. Principes de la mécanique: masse, force, travail. Equilibre d'un point; équilibre d'un système. Equilibre d'un corps solide. Systèmes déformables. *Dynamique.* Dynamique du point. Moments d'inertie. Dynamique des systèmes. Théorèmes généraux. Les sept équations universelles du mouvement. Mouvement d'un corps solide. Notions sur le frottement. Percussions. Principe de d'Alembert. Equations de Lagrange. Percussions. Théorème de Carnot. Attraction. Potentiel. Equilibre et mouvement intérieur d'un fluide parfait. Mouvement des fluides parfaits. Hydrodynamique. Exercices sur les différentes parties du précis.

Darboux, G., Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes. 2:e éd., complétée. — 567 pp. 8. Fr. 18:—.

L'équation du troisième ordre. Les coordonnées curvilignes. Théories générales.

Deslandres, H., Recherches sur l'atmosphère solaire; photographie des couches supérieures de la chromosphère; étude simultanée des formes et des mouvements des vapeurs. [Avec 28 planches.] (Annales de l'observatoire d'astronomie physique de Paris. T. 4.) — 123 pp. 4.

Haret, Sp. C., Mécanique sociale. — 254 pp. 8. Fr. 5:—.

Rappel de quelques notions mathématiques. Emploi de la méthode mathématique dans l'étude de quelques phénomènes et problèmes sociaux. Mode de représentation des phénomènes sociaux. Statique sociale. Dynamique sociale. Les forces sociales. Aperçu générale sur la civilisation.

Montel, Paul, Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions, publ. sous la direction de M. Emile Borel). — VI+127 pp. 8. Fr. 3:50.

Théorèmes généraux sur les fonctions analytiques. Développement d'une fonction holomorphe en série de polynomes. Les séries de polynomes et la représentation conforme. Les séries de polynomes convergentes dans plusieurs domaines. Les séries convergentes de polynomes.

Picard, E., Biographie, bibliographie des écrits, par *Ernest Lebon*. [Avec portrait.] — VIII+80 pp. 8.

Vivanti, G., Les fonctions polyédriques et modulaires. Ouvrage traduit par A. Cahen. — VI+318 pp. 8. Fr. 12:—.

Eléments de la théorie des groupes d'opérations. Substitutions linéaires. Pseudo-substitutions lin. Groupes finis de rotations d'une sphère sur elle-même et leur amplification. Construction des groupes finis de substitutions et de leurs groupes amplifiés. Représentation des groupes finis sur le plan. Considérations générales sur les réseaux

de triangles. Le groupe modulaire et les sous-groupes correspondants. Formes et fonctions polyédr. et modul. Existence des fonctions modul. Eq. polyédr. et modul. Etude algébr. des éq. polyédr. et de l'éq. modul. Résolvantes. Rapports entre les éq. polyédr. et la résolution algébr. des éq.

ZORETTI, LUDOVIC, Leçons sur le prolongement analytique, professées au collège de France. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions, publ. sous la direction de M. Emile Borel.) VI+114 pp. 8.

Les ensembles de points. La notion de fonction analytique. Les fonctions entières. Les ensembles parfaits discontinus de singularités. Les lignes singulières. Les fonctions multiformes. Sur la notion de coupure.

Ginn & Company.

Boston & London 1908.

Rara arithmetica. A catalogue of the arithmetics written before the year 1601 with a description of those in the library of George Arthur Plimton of New York, by DAVID EUGENE SMITH. — XIII+507 pp. 8.

E. Gnusé.

Liège 1910.

BARBETTE, EDOUARD, Les sommes de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes égales à une $p^{\text{ième}}$ puissance. — XII+154 pp. 4. Fr. 12:50.

Les sommes de nombres distincts égales à un nombre. Les sommes de carrés distincts égales à un carré. Les sommes de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes égales à une $p^{\text{ième}}$ puissance. Les nombres polygonaux de n côtés. Annexes.

G. J. Göschen.

Leipzig 1911.

KOMMERELL, V. und KOMMERELL, K., Spezielle Flächen und Theorie der Strahlensysteme. (Sammlung Schubert Bd. LXII.) Mit 9 Fig. — IV+171 pp. 8. geb. M. 4:80.

W-Flächen. Minimalflächen. Die Flächen von konstantem Krümmungsmass. Regelflächen. Dreifach orthogonale Flächensysteme. Strahlensysteme.

KOMMERELL, V. und KOMMERELL, K., Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen. Bd. II. Zweite Auflage. (Sammlung Schubert Bd. XLIV.) — IV+188 pp. 8. Mit 12 Fig. geb. M. 5:80.

Untersuchung von Flächen in der zweiten Form (Parameterform).

Voigt, A., Theorie der Zahlenreihen und der Reihengleichungen. — VIII + 133 pp. S. geh. M. 4:—.

Die Zahlenreihen. Die arithmetischen Zahlenreihen. Die Zahlenreihen mit unbegrenzten Formen. *Die Beziehungen der Reihen.* Die Beziehungen einzelner Zahlen zu Zahlenreihen. Die Beziehungen der Reihen zueinander.

Governement Printing Office.

Washington 1910.

The *star list* of the american ephemeris for the year 1911. (Supplement to the american ephemeris and nautical almanac for the year 1911.) — 310 pp. 8.

A. Hermann & Fils.

Paris 1910—11.

Burali-Forti, C., & Marcolongo, R., Éléments de calcul vectoriel avec de nombreuses applications à la géométrie, à la mécanique et à la physique mathématique. Trad. de l'italien par S. Lattès. — VI + 229 pp. 8. Fr. 8:—.

Opérations et fonctions vectorielles. Somme. Produit par un nombre. Calcul barycentrique. Produit vectoriel et produit intérieur. Rotations dans le plan. Fonctions de nombres. Fonctions de points. — *Applications.* Appl. à la géométrie. Formules de calcul intégral. Appl. à la mécanique. Appl. à l'hydrodynamique. Appl. à la théorie de l'équilibre des corps élastiques isotropes. Appl. à l'électrodynamique. — *Formes géométriques de Grassman et quaternions de Hamilton.* — Notes historiques et critiques.

Dumont, Émile, Arithmétique générale. Définitions et propriétés fondamentales des grandeurs géométriques et de leurs mesures: nombres naturels, qualifiés, complexes, ternions & quaternions. — XVII + 275 pp. 8. Fr. 10:—.

Hilbert, D., Théorie des corps de nombres algébriques. Ouvrage trad. de l'allemand par A. Lévy. T. 1: Le nombre algébrique et le corps algébrique. — 72 pp. 4. Fr. 3:—.

Richard, P. J., Étude sur l'assurance complémentaire de l'assurance sur la vie. Avec de nombreux développements sur les assurances contre la maladie et l'invalidité. 110 pp. 8. Fr. 3:50.

Sommer, J., Introduction à la théorie des nombres algébriques. Traduit de l'allemand par A. Lévy. Avec préface de J. Hadamard. — X + 376 pp. 8. Fr. 15:—.

Introduction. Le corps quadratique. Applications de la théorie du corps quadratique. Les corps du troisième degré. Le corps relatif.

Tannery, J., Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. 2:e éd. entièrement refondue. T. 2, avec une note de J. Hadamard. — 480 pp. 8. Fr. 15:—.

Intégrales définies. Sur quelques développements en série. Langage géométrique Nombres imaginaires. Fonctions de variables imaginaires. Dérivées et intégrales des

fonctions d'une variable imaginaire. Note de J. Hadamard: Sur quelques applications de l'indice de Kronecker.

Louis Lamm.

Berlin 1910.

Carlebach, Joseph, Lewi ben Gerson als Mathematiker. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik bei den Juden. 234 pp. 8. geh. M. 5:—; geb. M. 6:—.

A. Die Biographie Lewi ben Gersons. B I. De numeris harmonicis. B II. Proben aus Maasse-Choscheb.

Macmillan & C:o Ltd.

London, New York 1908—11.

Bromwich, T. J. I'A., An introduction to the theory of infinite series. — XIII +511 pp. 8. Sh. 15:—.

Sequences and limits. Series of positive terms. Series in general. Absolute convergence. Double series. Infinite products. Series of variable terms. Power series. Trigonometrical investigations. Complex series and products. Non-convergent and asymptotic series. Arithmetic theory of irrational numbers and limits. Definitions of the logarithmic and exponential functions. Some theorems on infinite integrals and gamma-functions.

Gibson, George A., & Pinkerton, P., Elements of analytical geometry. — XXI +475 pp. 8. Sh. 7. 6 d.

B. G. Teubner.

Leipzig 1908—1911.

Abhandlungen über die *Reform des mathematischen Unterrichts in Ungarn.* Im Auftrage der mathematischen Reformkommission des Landesvereins der Mittelschulprofessoren nach dem ungarischen Original unter Mitwirkung der Herren M. Balog und J. Rados deutsch hrsg. von E. Beke und S. Mikola. VI+160 pp. 8. geh. M. 4:—.

Berichte und *Mitteilungen*, veranlasst durch die internationale mathematische Unterrichtskommission. V. Die Versammlung in Brüssel. Nach dem von H. Fehr verfassten dritten Rundschreiben des Hauptausschusses bearbeiteter und bis Oktober 1910 ergänzter Bericht von W. Lietzmann. 74 pp. 8. geh. M. 0:60.

Bianchi, L., Vorlesungen über Differentialgeometrie. Autor. deutsche Übersetzung von Max Lukat. 2:e, vermehrte u. verbesserte Aufl. — XVIII+721 pp. 8. geh. M. 22:60; geb. M. 24:60.

Kurven doppelter Krümmung. Binäre quadrat. Differentialformen. Krummlinige Koordinaten auf den Flächen. Konforme Abbildung. Die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie. Die sphärische Abbildung nach Gauss. Ebenenkoordinaten. Geodä-

tische Krümmung. Geodät. Linien. Aufeinander abwickelbare Flächen. Verbiegung der Linienflächen. Evolutenfläche u. Weingartenscher Satz. Strahlensysteme (Kongruenzen). Unendlich kleine Verbiegungen der Flächen u. Entsprechen durch Orthogonalität der Elemente. W-Strahlensysteme. Die normalen Kreissyst. Die Minimalflächen. Das Plateausche Problem u. die Schwarzsche Minimalfläche. Pseudosphär. Geom. Die pseudopshär. Flächen u. die Bäcklundsche Transformation. Transformationen der Flächen konstanter positiver Krümmung u. ihre Beziehungen zu den Biegungsflächen der Rotationsflächen zweiten Grades. Transformationen B_k der auf das hyperbol. Paraboloid abwickelbaren Flächen. Transform. B_k der auf das einschalige Hyberboloid abwickelb. Flächen. Transform. B_k der auf andere Flächen 2. Grades abwickelb. Flächen. Allgem. Sätze üb. dreifache orthogonale Flächensysteme. Untersuchung einiger spezieller dreifacher Orthogonalsysteme. Die aus Flächen konstanter Krümmung bestehenden Laméschen Flächenfamilien.

Byk, A., Einführung in die kinetische Theorie der Gase. Bd. 1: Die idealen Gase. (Mathem.-physik. Schriften für Ingenieure ... hrsg. von E. Jahnke. Bd. 10:1.) — IV+102 pp. 8. geh. M. 2:80; geb. M. 3:20.

Statik der Gase. Dynamik der Gase.

Christoffel, E. B., Gesammelte mathematische Abhandlungen. Unter Mitwirkung von A. Krazer und G. Faber hrsg. von L. Maurer. Bd. 1—2. — XV+382, 343 pp. 8. Bd. 1 geh. M. 18:—; Bd. 2 geh. M. 16:—.

Bd 1 mit einer Biographie E. B. Christoffels von C. F. Geiser und seinem Bild in Lichtdruck.

Clebsch, A., Vorlesungen über Geometrie. Bearb. und hrsg. von D:r Ferdinand Lindemann. 2:te, vermehrte Aufl. Bd. 1, T. 1 Lfg. 2. 288 pp. 8. M. 9:—.

Einleitung in die Theorie der algebraischen Formen (Fortsetzung).

Cramer, H., Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Grossherzogtum Baden. (Abhandlungen üb. d. mathem. Unterricht in Deutschland ... hrsg. von F. Klein. Bd 2, H. 4.) — 48 pp. 8. geh. M. 1:60.

Cranz, C., Lehrbuch der Ballistik. Bd. 1, 4. — XIV+464 pp. 8. geb. M. 20:—; IV+81 pp. & 9 Taf. in-fol. kart. M. 14:—.

1. Äussere Ballistik oder Theorie der Bewegung des Geschosses von der Mündung der Waffe ab bis zum Eindringen in das Ziel.

4. Atlas für Tabellen, Diagramme und photographische Momentaufnahmen.

Czuber, E., Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehleraus-

gleichung, Statistik und Lebensversicherung. 2:e, sorgfältig durchgesehene u. erweiterte Aufl. Bd. 2. — X + 470 pp. 8. geb. M. 14:—.

Mathematische Statistik. Die menschlichen Massenerscheinungen. Sterblichkeitsmessung. Invalidität und Sterblichkeit. — *Mathematische Grundlagen der Lebensversicherung.* Versicherungswerte. Prämien. Prämienreserve. Das Risiko in der Lebensversicherung. Tafeln.

Dalwigk, F. v., Vorlesungen über darstellende Geometrie. Bd. 1: Die Methoden der Parallelprojektion. — XVI + 363 pp. 12 Tafeln. 8. geb. M. 13:—.

Monge'sche Methode mit Grund- und Aufriss. Schiefe Parallelperspektive und Axonometrie. — Anhang.

Dantscher, Viktor von, Vorlesungen über die Weierstrass'sche Teorie der irrationalen Zahlen. — VI + 79 pp. 8. geh. M. 2:80; geb. M. 3:40.

Additive Aggregate aus unendlich vielen positiven rationalen Zahlen. Eigenschaften der konverg. additiv. Aggregate aus unendl. vielen positiven rationalen Zahlen. Rechnungsoperationen mit konverg. additiv. Aggregaten aus unendl. vielen positiv. rational. Zahlen. Die additiv. Aggregate aus unendl. vielen, teils posit., teils negat. ration. Zahlen. Additive Aggregate aus unendl. vielen komplexen Zahlen der Form $a + bi$. Die multiplikat. Aggregate aus unendl. vielen Zahlen.

Färber, Carl, Arithmetik. (Grundlehren der Mathematik für Studierende und Lehrer. Teil 1. Bd. 1.) — XV + 410 pp. Mit 9 Fig. 8. geb. M. 9:—.

Die natürlichen Zahlen. Die gebrochenen Zahlen, insbesondere die gemeinen Brüche. Die systematischen Brüche. Die relativen Zahlen. Rechenoperationen im Bereiche der rationalen Zahlen. Die irrationalen Zahlen. Die komplexen Zahlen.

Festschrift zur Feier des 100 Geburstages Eduard Kummers mit Briefen an seine Mutter und an Leopold Kronecker. Hrsg. vom Vorstande der Berliner mathematischen Gesellschaft. Mit einem Bildnis E. Kummers. (Abhandlungen zur Geschichte d. math. Wissenschaften . . . H. 29.) — 103 pp. 8 geh. M. 4:—.

K. Hensel, Gedächtnisrede auf Ernst Eduard Kummer. — Briefe E. E. Kummers an seine Mutter und an Leopold Kronecker.

Fricke, Robert, und Klein, Felix, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. Bd. 2: Die funktionentheoretischen Ausführungen und die Anwendungen. Lfg. 2: Kontinuitätsbetrachtungen im Gebiete der Hauptkreisgruppen. Mit 66 Fig. 155 pp. 8. M. 7:—.

Hohenner, H., Geodäsie. Eine Einleitung zu geodätischen Messungen für Anfänger mit Grundzügen der Hydrometrie und der direkten (astronomischen)

Zeit- und Ortbestimmung. (Naturwissenschaft und Technik in Lehre und Forschung, hrsg. v. Doflein und Fischer.) Mit 216 Fig. — XI+347 pp. 8. — geb. M. 12:—.

Kalähne, A., Grundzüge der mathematisch-physikalischen Akustik. 1. (Mathem.-physik. Schriften für Ingenieure ... hrsg. von E. Jahnke. Bd. 11: 1). — VII+130 pp. 8. geh. M. 3:20; geb. M. 3:60.

Schwingungen und Wellen im allgemeinen. Fourier'sche Reihen und harmonische Analyse. Musikalische Gliederung des Tonbereichs. System mit einem Freiheitsgrad. Ungedämpfte Eigenschwingungen eines Massenpunktes. Gedämpfte Eigenschwingungen eines Massenpunktes. Mitschwingen und Resonanz ohne Rückwirkung. Erzwungene Schwingungen eines Massenpunktes. Systeme mit mehreren Freiheitsgraden und gekoppelte Schwingungen.

Klein, Chr. F., & Sommerfeld, A., Über die Theorie des Kreisels. H. 4: Die technischen Anwendungen der Kreiseltheorie. Für den Druck bearb. und ergänzt von Fritz Noether. — 205 pp. 8. geh. M. 8:—; geb. M. 9:—.

Die wichtigste Formel der Kreiseltheorie. Allgemeines üb. die Stabilierung durch Kreiselwirkungen. Kreiselwirkungen im Eisenbahnbetriebe. Der Geradlaufapparat der Torpedos. Whitehead- und Howell-Torpedo. Der Schlicksche Schiffskreisel. Allgemeines und Theorie. Spezielle Diskussion der Wirkung des Schiffskreisels. Resultate und praktische Erfahrungen am Schiffskreisel. Der Kreiselkompass. Stabilität des Fahrrads. Über vermeintliche und wirkliche Kreiselwirkungen bei der Laval-Turbine. Vermischte Anwendungen.

Korn, A., Über freie und erzwungene Schwingungen. Eine Einführung in die Theorie der linearen Integralgleichungen. — IV+136 pp. 8.

Die lin. Integralgl. mit stetigem, symmetrischem Kern. Die lin. Integralgl. mit symmetr. Kernen, welche gewisse Unstetigkeiten aufweisen. Die Fredholm'sche Lösung d. lin. Integralgl. mit beliebigem, stetigem Kern. Verallgemeinerungen der Lösungen für Kerne, welche gewisse Unstetigkeiten aufweisen, für mehrdimensionale Probleme und für Systeme von linearen Integralgl.

Lazzeri, G., und Bassani, A., Elemente der Geometrie (Unter Verschmelzung von ebener und räumlicher Geometrie). Mit Genehm. der Verf. aus dem Italien. übersetzt von P. Treutlein. Mit 336 Fig. — XIV+491 pp. 8. geb. M. 14:—.

Loria, G., Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Autor., nach dem Italienischen Manuskript bearb. deutsche Ausg. von Fritz Schütte. Aufl. 2, Bd. 2: Die transzendenten und die abgeleiteten Kurven. (B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern d. math. Wiss. Bd 5:2.) — VIII+384 pp. 8. geh. M. 12:50.

Transzendente Kurven. Abgeleitete Kurven.

MARCOLONGO, ROBERT, Theoretische Mechanik. Autor. deutsche Bearb. v. H. E. Timerding. 1:er Bd: Kinematik und Statik. Mit 110 Fig. — VIII+346 pp. 8. geh. M. 10:—; geb. M. 11:—.

T. 1. (Kinematik): Vektorgeometrie. Vektoranalysis. Geschwindigkeit und Beschleunigung. Endliche Verrückungen eines starren Systems. Die momentane Bewegung eines starren Systems. Kontinuierliche Bewegung eines ebenen starren Systems. Kontinuierliche Bewegung eines räumlichen starren Systems.

T. 2. (Statik): Zusammensetzung der Kräfte. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Gleichgewicht der Seilkurven. Hydrostatik.

MIKAMI, YOSHIO, Mathematical papers from the far east. (Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Begr. v. Moritz Cantor. H. 28.) Mit 15 Fig. — VI+229 pp. 8. geh. M. 10:—; geb. M. 11:—.

MINKOWSKI, H., Zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik. Mit einem Einführungswort von Otto Blumenthal. (Fortschritte d. mathem. Wissenschaften in Monographien ... H. 1.) — 82 pp. 8. geh. M. 2:40.

Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. Von H. Minkowski. — Eine Ableitung der Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern vom Standpunkte der Elektronentheorie. Aus dem Nachlass von H. Minkowski bearb. von Max Born.

— —, Gesammelte Abhandlungen. Unter Mitwirkung von Andreas Speiser und Hermann Weyl hrsg. von David Hilbert. 1:ter Bd. Mit einem Bildnis Hermann Minkowskis und 6 Fig. — IV+371 pp. 8. M. 14:—; 2:ter Bd. Mit einem Bildnis Hermann Minkowskis, 34 Fig. und einer Doppeltafel. — IV+465 pp. 8. M. 16:—.

1: Gedächtnisrede auf H. Minkowski von D. Hilbert. Zur Theorie der quadratischen Formen. Zur Geometrie der Zahlen.

2: Zur Geometrie der Zahlen (Forts.). Zur Geometrie. Zur Physik. Rede auf Dirichlet.

PERRY, J., Die Dampfmaschine (einschliesslich der Dampfturbine) und Gas- und Ölmaschinen. Autorisierte, erweit. deutsche Bearb. von H. Meuth. — XII +708 pp. 8. geb. M. 22:—.

Die gebräuchlichsten Formen und Einzelheiten der Dampfmaschine. Der Wert der Expansion. Der Indikator. Eine Reihe von Übungsaufgaben. Die hin- u. hergehende Bewegung des Getriebes. Wirkungsweise der Steuerung. Form u. Wirkungsweise verschiedener Steuerungsorgane u. die Vorrichtungen zur Veränderung der

Dampfverteilung. Regulierung. Kondensation u. Kesselspeisung. Dampfkessel. Festigkeit des Kessels. Dampfkesselfeuerungen. Eine Anzahl Rechenbeispiele ... Aufgewendete u. nutzbare Energie. Das hypothetische Diagramm. Entwicklung der hypothetischen Diagramme für Verbundmaschinen. Temperatur u. Wärme. Thermodynamik der Gase. Eigenschaften des Wasserdampfes. Kreisprozesse u. ihre Darstellung im Wärmediagramm. Die Zylinderkondensation. Der überhitzte Dampf. Brennmaterial u. Verbrennung. Der Wirkungsgrad eines Kessels. Die Trägheitskräfte des Kurbel-Getriebes und ihre Ausgleichung. Kurze Theorie der Kulissen- u. Lenkersteuerungen. Kinetische Gastheorie. Wie pflanzen sich in einer Flüssigkeit Wärme u. Bewegung fort? Strömung von Flüssigkeiten. Die Dampfturbine. Gas- u. Ölmaschinen.

Pringsheim, E., Vorlesungen über die Physik der Sonne. Mit 235 Abb. — VIII +435 pp. 7 Tafeln. 8. geh. M. 16—; geb. M. 18:—.

Massbestimmungen. Die Photosphäre und ihre Erscheinungen. Sonnenrotation und Periodizität der Sonnentätigkeit. Das Spektrum der Sonne und ihre chemische Zusammensetzung. Die totalen Sonnenfinsternisse und ihre Bedeutung für unsere Kentniss der Sonne. Die Chromosphäre und die Protuberanzen. Besondere Erscheinungen im Spektrum der Chromosphäre, Protuberanzen und Sonnenflecken. Sonnentheorien. Sonnentheorien (Fortsetz.). Korona und Sonnenatmosphäre. Flocken, Wirbel und Zeemaneffekt. Strahlung und Temperatur der Sonne.

Schnell, H., Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Grossherzogtum Hessen. (Abhandlungen üb. d. mathem. Unterricht in Deutschland ... hrsg. von F. Klein. Bd 2, H. 5.) — VI+51 pp. 8. geh. M. 1:60.

Sturm, Rudolf, Maxima und Minima in der elementaren Geometrie. Mit 32 Fig. — V+138 pp. 8. geh. M. 4:—; geb. M. 4:40.

B. G. Teubners Allgemeiner Katalog. 1811—1911. — XII, 352+184 pp. 8.

B. G. Teubner 1811—1911. Geschichte der Firma in deren Auftrag hrsg. von Friedrich Schulze. — 520 pp. 8.

Wanach, B., Tafel der Werte $\frac{a.b}{a+b}$ für alle zweistelligen Werte von a und b zur Berechnung der Gewichte von Summen, Differenzen, Mittelwerten usw. (Veröffentlichung des Königl. Preuss. Geodätischen Institutes. Neue Folge N:o 46.) 8. M. 1:20—.

Weber, H., und Wellstein, J., Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. Bd III: Angewandte Elementar-

Mathematik. I: Mathematische Physik von Rudolf H. Weber. 2:e Auflage. Mit 254 Fig. XII+536 pp. 8. geb. M. 12:—.

Mechanik. Elektrische und magnetische Kraftlinien. Maxima und Minima. Optik.

Witting, A., Der mathematische Unterricht an den Gymnasien und Realanstalten nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Königreich Sachsen. (Abhandlungen üb. d. mathem. Unterricht in Deutschland ... hrsg. von F. Klein. Bd. 2, H. 2.) — X+78 pp. 8. geh. M. 2:20.

V. Thaning & Appel.

København 1910.

Nørlund, N. E., Bidrag til de lineære Differensligningers Theorie. Afhandling for den filosofiske Doktorgrad. — XI+71 pp. 4.

Vieweg & Sohn.

Braunschweig 1910—11.

Günther, S., Vergleichende Mond- und Erdkunde. (Die Wissenschaft. Sammlung naturwissenschaftl. u. mathem. Monographien. H. 37.) — XI+193 pp. 8. geh. M. 5:—; geb. M. 5:80.

Die Pluralitätshypothesen im allgemeinen. Die Berechtigung einer vergleichenden Oberflächenkunde von Erde und Mond. Vergleiche zwischen beiden Weltkörpern in vorteleskopischer Zeit. Galilei und Kepler. Die Ausbildung der Selenographie im 17. und 18. Jahrhundert. Die lunare Pluraritätshypothese. Die teleskopische Mondbeobachtung im 19. und beginnenden 20. Jahrhundert. Die Mondphotographie und die physikalische Mondforschung überhaupt. Die Mondoberfläche auf Grund der Gegenwarterkenntnis betrachtet. Der lunare Vulkanismus. Tektonische Dislokationen auf dem Monde. Die Streitfrage nach den rezenten Veränderungen auf dem Monde. Mondoberfläche und Meteorkörper. Zusammenfassender Rückblick.

Kneser, A., Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik. Vorlesungen an der Universität zu Breslau gehalten. — VIII+243 pp. 8. geh. M. 6:—; geb. M. 7:—.

Integralgl. und lineare Wärmeleitung. Integralgl. und Schwingungen linearer Massensysteme. Integralgl. und die Sturm-Liouvillesche Theorie. Wärmeleitung und Schwingungen in Gebieten von zwei und drei Dimensionen. Existenztheoreme und das Dirichletsche Problem. Die Fredholmschen Reihen.

Scheel, Karl, Grundlagen der praktischen Metronomie. 39 Abb. — XII+168 pp. 8. — (Die Wissenschaft, Heft 36). geh. M. 5:20; geb. M. 6:—.

Einleitung. Längenmessungen. Einfluss d. Temperatur b. d. Längenmessungen.

Wärmeausdehnung. Massenmessungen. Einfluss äusserer Verhältnisse auf d. Wägungen. Ihre Berücksichtigung. Raummessungen. Sicherungen des metr. Mass-systems.

WEBER, H., Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik. Nach RIEMANN's Vorlesungen in fünfter Aufl. bearb. Bd. 1. — XVIII+527 pp. 8. geh. M. 12:—; geb. M. 13:60.

Analytische Hilfsmittel. Geometrische und mechanische Grundsätze. Elektrizität und Magnetismus.

John Wiley & Sons.

New York 1911.

COFFIN, J. G., Vector analysis. An introduction to vector-methods and their various applications to physics und mathematics. — XVIII+248 pp. 8. $ 2:50.

Elementary operations of vector analysis. Scalar and vector products of two vectors. Vector and scalar products of three vectors. Differentiation of vectors. The differential operators. Applications to electrical theory. Applications to dynamics, mechanics and hydrodynamics. Notation and formulæ.

Yale University Press.

New Haven 1910.

The *New Haven* mathematical colloquium. Lectures delivered before members of the American Mathematical Society in connection with the summer meeting, held September 5th to 8th, 1906, under the auspices of Yale University by E. H. MOORE, E. J. WILCZYNSKI, MAX MASON. — X+222 pp. 8.

Moore, E. H., Introduction to a form of general analysis. — *Wilczynsky, E. J.*, Projective differential geometry. — *Mason, M.*, Selected topics in the theory of boundary value. Problems of differential equations.

QA
1
A2575
v.34
Physical &
Applied Sci.
Serials

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

Acta mathematica